MECÁNICA CUÁNTICA II.

Duración: cuatro horas

1. Como se vio en clase, el grupo de Poincaré, $x \to \Lambda x + a$, se puede representar en $L^2(\mathbb{R}^4)$, con generadores

$$P^\mu = i\partial^\mu, \qquad J^{\mu\nu} = x^\mu P^\nu - x^\nu P^\mu.$$

El grupo conforme (dimensión 15) se completa añadiendo las siguientes transformaciones:

$$x^\mu \mapsto e^s x^\mu, \qquad\qquad x^\mu \mapsto \frac{x^\mu + b^\mu x^2}{1 + 2b^\nu x_\nu + b^2 x^2},$$

con coordenadas s y b^μ $(x^2 = x^\mu x_\mu$, ídem $b^2)$. Se pide:

a) Calcular los generadores asociados a las nuevas transformaciones (D y C^μ). Usar el convenio $\delta L = -\delta a_\mu P^\mu + \frac{1}{2}\delta\omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} + \delta s D + \delta b_\mu C^\mu$.

b) Calcular los conmutadores $[P^\mu, D]$ y $[P^\mu, C^\nu]$ y expresarlos como combinación lineal de P, J, D, y C.

2. En clase, partiendo del operador hamiltoniano, se construyó la integral de caminos para una partícula de masa M en un potencial $V(\boldsymbol{x}, t)$. Se pide:

a) Hacer la construcción análoga para un partícula con carga q en un campo electromagnético con potenciales $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t)$ y $\Phi(\boldsymbol{x}, t)$. Se puede suponer que $\boldsymbol{A}$ satisface la condición de gauge de Coulomb, $\boldsymbol{\nabla A} = 0$, y $q = \hbar = c = 1$. Se puede usar la identidad $\dfrac{\langle \boldsymbol{x}|e^{\epsilon\mathcal{O}}|\boldsymbol{p}\rangle}{\langle \boldsymbol{x}|\boldsymbol{p}\rangle} = \exp\left(\epsilon \dfrac{\langle \boldsymbol{x}|\mathcal{O}|\boldsymbol{p}\rangle}{\langle \boldsymbol{x}|\boldsymbol{p}\rangle}\right) + O(\epsilon^2)$, para un operador genérico $\mathcal{O}$.

b) En ausencia de potencial vector, la inserción de un operador $f(\hat{\boldsymbol{p}})$ en tiempo t_j daba lugar a un factor

$$\langle f(M\boldsymbol{v}_j + \boldsymbol{q})\rangle_{\boldsymbol{q}}, \qquad \boldsymbol{v}_j := \frac{\boldsymbol{x}_{j+1} - \boldsymbol{x}_j}{\epsilon}, \tag{1}$$

en la integral de caminos. Estudiar la modificación que introduce $\boldsymbol{A}$ en este factor.

3. En una teoría bosónica, sea A un operador tipo campo (combinación lineal de operadores de creación y destrucción).

a) El valor esperado $\langle 0|e^A|0\rangle$ se puede expresar como una función de la contracción $\underset{\sqcup}{AA}$. Encontrar dicha expresión. Se puede usar el teorema de Wick, o bien Campbell-Hausdorff con $A = A^{(+)} + A^{(-)}$, relacionando $[A^{(+)}, A^{(-)}]$ con $\underset{\sqcup}{AA}$.

b) Usando el resultado anterior encontrar la distribución de probabilidad de ϕ en el vacío, siendo $\phi = f_\alpha^* a_\alpha + f_\alpha a_\alpha^\dagger$ (los f_α son coeficientes numéricos). Notar que la densidad pedida se puede escribir como $\rho(x) = \langle 0|\delta(\phi - x)|0\rangle$. Sugerencia: usar la identidad $\delta(x) = \int e^{ikx} dk/2\pi$.

4. Calcular $\displaystyle\int d\xi_3 d\xi_2 d\xi_1 \exp(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{\xi}\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\xi}\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{\xi})$, donde $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ son tres vectores arbitrarios en $\mathbb{R}^3$ y $\boldsymbol{\xi}$ son tres generadores del álgebra de Grassmann.

Puntuación de estos ejercicios: $(1{,}5 + 1{,}5) + (1{,}5 + 1{,}5) + (1{,}5 + 1{,}5) + 1$.