Mecánica Cuántica II

Tiempo: de 9:30 a 13:30

HACER SÓLO 4 PREGUNTAS

1. Determinar para qué valores de a, b y c, el operador $C := a\vec{J}^2 + b\vec{K}^2 + c\vec{J}\vec{K}$, es invariante bajo el grupo de Lorentz. Expresar el resultado en notación covariante (es decir, en términos de $J_{\mu\nu}$).

2. Sea $\mathcal{H}_+$ el espacio de soluciones de energía positiva de la ecuación de Klein-Gordon libre, con producto escalar $\langle\phi_1|\phi_2\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{E_p}{m} \tilde{\phi}_1^*(p)\tilde{\phi}_2(p)$ (en representación de momentos, $\phi(\vec{r}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\vec{r}}\tilde{\phi}(p)$). Si el operador posición es de la forma $\vec{Q} = i\vec{\nabla}_p + \vec{f}(\vec{p})$, determinar la función $\vec{f}$ más general de modo que $\vec{Q}$ sea aceptable (hermiticidad, relaciones de conmutación $[Q_i, Q_j]$ y transformación correcta bajo traslaciones y rotaciones).

3. Calcular explícitamente $[H, \vec{L}]$ y $[H, \vec{S}]$ para el hamiltoniano de Dirac de una partícula libre y comprobar que $\vec{J}$ se conserva.

4. El cálculo directo de la integral de caminos para un oscilador armónico cuántico unidimensional con lagrangiano $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2x^2$, produce una amplitud $\langle x, T|x, 0\rangle$ (igual punto inicial y final)

$$\langle x, T|x, 0\rangle = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\,\mathrm{sen}\,(\omega T)}} \exp\left(\frac{m\omega}{i\hbar}\tan(\frac{\omega T}{2})x^2\right) .$$

a) Haciendo una traslación, obtener la misma amplitud cuando el lagrangiano es $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2x^2 - fx$ (siendo f una fuerza constante).
b) Particularizar el resultado al caso $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - fx$.

5. Para la teoría bosónica $S = \frac{1}{2}m_{ij}\phi^i\phi^j + \frac{1}{3!}g_{ijk}\phi^i\phi^j\phi^k$ (con el convenio $Z = \int D\phi \exp S[\phi]$):
a) Usando el teorema de Wick, calcular el valor del diagrama de la figura, que es una contribución al propagador $\langle\phi^a\phi^b\rangle$.
b) Enumerar todos los diagramas conexos de orden g^4 correspondientes a Z así como sus factores de simetría, y calcular uno de ellos aplicando las reglas de Feynman.

HACER SÓLO 4 PREGUNTAS