Este volumen está dedicado a la memoria del Prof. Florentino García Santos. Con él, un grupo de sus compañeros y amigos hemos querido rendirle homenaje de la mejor forma que sabemos: exponiendo labores de investigación, docentes y de gestión en las que estuvo directamente involucrado y contribuciones de aquellos que estuvieron cercanos a él personal y profesionalmente.

A todos los que han colaborado en este libro, nuestro sincero agradecimiento.

Granada, julio de 2011

Manuel Barros
Miguel Ortega
Juan de Dios Pérez
Alfonso Romero
Ceferino Ruiz
Miguel Sánchez

Francisco González Lodeiro
Prólogo I

Índice de contribuciones

Antonio Alarcón, Francisco J. López,
Inmersiones armónicas de superficies de Riemann en $\mathbb{R}^3$ 1

David Arcoya,
Teoría de Morse y ecuaciones elípticas no lineales 9

Margarita Arias, Juan Campos,
Jugando con matrices positivas: eficiencia de un estado inicial 15

Manuel Barros, Ángel Ferrández,
Conversando sobre hélices y recordando a Floro 23

Antonio Cañada, Salvador Villegas,
Resultados recientes sobre estabilidad de ecuaciones diferenciales lineales periódicas 35

María A. Cañadas-Pinedo, Ceferino Ruiz,
Equivalencia de sistemas de Pfaff en bandera y en dimensión cinco 43

Pilar Carrasco, Antonio M. Cegarra, Antonio R. Garzón,
Sobre el espacio clasificador de una categoría monoidal trenzada 51

Matteo Galli, Manuel Ritoré,
Existencia de regiones isoperimétricas en variedades sub-riemannianas de contacto 59

José A. Gálvez,
La ecuación de Codazzi para superficies 69

Óscar J. Garay,
Un problema variacional geométrico: Las curvas elásticas de J. Bernoulli . . 77

Ana Hurtado, César Rosales,
Estabilidad de superficies en la 3-esfera sub-riemanniana 87

Imsoon Jeong, Young J. Suh,
Real hypersurfaces in complex two-plane Grassmannians with $\mathfrak{F}$-parallel normal Jacobi operator 95

Rafael López,
Aprendiendo con un blog: análisis de una experiencia en los estudios de Matemáticas 107

Francisco Martín, Cristóbal Reyes,
Una extensión del teorema de Krust para superficies mínimas 115

Antonio Martínez, Francisco Milán,
Aportación en Geometría Diferencial Afín 119

Miguel Ortega, Juan D. Pérez, Young J. Suh,
Apuntes sobre la producción científica de Florentino 129

Joaquín Pérez,
Sinh-Gordon type equations for CMC surfaces 145

Alfonso Romero, Miguel Sánchez,
Geometría Diferencial y sus Aplicaciones: algunos avances recientes del grupo de investigación 157

Antonio Ros,
Superficies mínimas 171

M. Mar Rueda, Agustín Santiago, Antonio Arcos,
Algunas técnicas de estimación en áreas pequeñas para variables cualitativas 177

Francisco Urbano,
Una nueva demostración de la clasificación de las superficies estables con curvatura media constante de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{S}^3$ 185

José L. Verdegay,
Extensiones de la Soft Computing con "Rough Sets" 191

Prólogo

El mejor homenaje de reconocimiento a la labor de un profesor universitario es dedicarle un libro que recoja los trabajos de sus compañeros y amigos. Y Florentino García Santos, que fue un hombre cabal y lo demostró a lo largo de su vida, merece nuestro mejor recuerdo.

Su dedicación a la Universidad fue total y en su trayectoria abarcó todas las facetas del auténtico universitario: docencia, investigación y gestión. Para muchos resulta imposible que una persona pueda realizar con brillantez todas estas tareas a lo largo de su vida universitaria; pues bien, Florentino fue sin duda la excepción a la regla, pues supo hacer todo, y la muestra es su propio currículum, dejando su indeleble huella en su Universidad de Granada.

A lo largo de siete años ocupó la dirección de la Sección de Matemáticas, durante un año y medio fue vicedecano de Asuntos Económicos y de Ordenación Académica de la Facultad de Ciencias, y entre los años 1992 y 2000 estuvo a cargo de los vicerrectorados de Planificación Docente y de Ordenación Académica. Asumiendo las competencias y tareas de un tiempo complejo, en el que en la Universidad se producen grandes transformaciones como consecuencia de la entrada en vigor de la Ley de Reforma Universitaria, y donde Florentino, sin abandonar su dedicación a la docencia y a la investigación, participa activamente en la gestión desde los puestos que ocupa. Así, quiero resaltar su gestión desde los vicerrectorados de Planificación Docente y posteriormente del de Ordenación Académica en la implantación de los nuevos títulos y la transformación de los que ya existían. Una tarea inmensa, y complicada, en la que había que combinar el rigor con los diversos intereses, siempre legítimos, de los departamentos y áreas de conocimiento. Su conocimiento de la Universidad hizo que fueran posibles los cambios en un corto periodo de tiempo y, además, en una época en que las condiciones económicas de la Universidad no eran las más deseables para continuar con la consolidación y ampliación de la plantilla de profesorado. Su capacidad de diálogo, adoptando los criterios consensuados con los centros, departamentos y representantes sindicales, hizo posible atender a las necesidades de nuevo profesorado y las aspiraciones de promoción y estabilización de la plantilla existente.

Los que le conocimos y disfrutamos de su amistad, afecto y cariño no podremos olvidar su dedicación a la universidad y su preocupación por todo lo que ocurría en su entorno. En mi caso, fue a principios del año 1981 y desde el inicio me inspiró una gran confianza por su manera de comportarse ante los problemas y en su toma de decisiones. Siempre tuvo en cuenta los objetivos principales de la Universidad: la docencia, investigación y extensión, y para él, con su claridad de ideas, todo lo demás estaba supeditado a estas tres acciones y las actuaciones de gobierno debían dirigirse a que se alcanzaran con la mayor calidad posible.

En los últimos años ocupó la gerencia de la Universidad sin variar en su excepcional comportamiento universitario, dando un ejemplar modelo de su forma de pensar a favor de una Universidad en la cual tenía muy claro a qué se debían dedicar los recursos. Por eso recortó en lo que pudo los gastos superfluos, y estableció un plan de austeridad donde no se escatimó para que la Universidad cumpliera con sus funciones esenciales. Gracias a él hemos podido sanear nuestras cuentas y cumplir con nuestros compromisos.

Su autoridad, reconocida por todos, se basaba en la persuasión y en el convencimiento. Así, en las reuniones de equipo siempre valoraba los pros y contra de las decisiones, y su opinión, clara, precisa y convincente, tenía siempre un gran peso en la acción de gobierno. De hecho, conocía perfectamente los problemas del profesorado, de los estudiantes y del personal de administración y servicios.

En Florentino hubo mucho más, pues era un gran docente y poseía una inteligencia capaz de hacer pensar. Le acompañó siempre el sentido de la amistad profunda, y le recordaremos como un hombre íntegro que hizo de su vida la defensa permanente de los intereses de la Universidad.

Nos dejó un hombre cabal, trabajador infatigable, un universitario con un profundo sentido humano y social. La comunidad universitaria de Granada siempre le recordará, pues para todos Florentino García Santos será un referente al que constantemente tendremos presente.

Francisco González Lodeiro
Rector y compañero

Contribuciones

Florentino García Santos: In Memoriam
Universidad de Granada, 2011, págs. 1–8

Inmersiones armónicas de superficies de Riemann en $\mathbb{R}^3$

Antonio Alarcón • Francisco J. López

Resumen En estas notas repasamos algunas propiedades globales de las inmersiones armónicas de superficies de Riemann en el espacio euclidiano tridimensional, enfatizando aquellas relacionadas con la aplicación de Gauss.

1. Introducción

La interrelación entre los conceptos de inmersión mínima, inmersión conforme e inmersión armónica de superficies de Riemann en el espacio euclidiano tridimensional $\mathbb{R}^3$ es un asunto crucial en la teoría de superficies. Sabemos que una inmersión conforme es mínima si y sólo si es armónica, y en este caso su aplicación de Gauss es también conforme. Sin embargo, una immersión armónica no tiene que ser necesariamente conforme como muestra la siguiente parametrización del helicoide, o para ser más precisos, de una mitad de ésta superficie con borde su eje:

$$X : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^3, \quad X(z) = \Re(e^z, \imath e^z, \imath z).$$

Ciertamente, la familia de inmersiones armónicas de superficies de Riemann en $\mathbb{R}^3$ es muy amplia y difícil de tratar de forma sistemática. Sin embargo, la subfamilia de tales inmersiones con aplicación de Gauss cuasiconforme da lugar a una teoría muy rica que engloba a la clásica de superficies mínimas. En estas notas haremos un repaso breve de algunos de los resultados globales obtenidos recientemente por los autores en [1] para esta familia de superficies. Muchos de ellos representarán una clara generalización de lo conocido para el caso mínimo, en especial en lo relativo al tamaño de la imagen esférica de la superficie.

No quisiéramos acabar esta introducción sin dedicar unas palabras a nuestro añorado compañero Florentino García Santos. Florentino fue para muchos un ejemplo de rigor y dedicación a su profesión, y aunque nuestra relación se circunscribió al ámbito de lo estrictamente profesional, en nosotros permanecerán imborrables tanto su inquebrantable compromiso con toda la comunidad universitaria como su sencillez y cercanía hacia aquellos que tuvimos la fortuna de conocerle.

Antonio Alarcón, *alarcon@ugr.es*
Francisco J. López, *fjlopez@ugr.es*
Dep. Geometría y Topología, Facultad de Ciencias, Universidad de Granada, 18071-Granada

2. Inmersiones armónicas y representación de Weierstrass

Sea M una superficie de Riemann y $X = (X_j)_{j=1,2,3} : M \to \mathbb{R}^3$ una inmersión de M en $\mathbb{R}^3$. Por definición, la inmersión X se dice armónica si X es una aplicación armónica (esto es, si X_j es armónica, $j = 1, 2, 3$). En este caso, también se dice que $S = X(M)$ es una superficie armónica con parametrización X.

Una superficie armónica puede admitir diferentes parametrizaciones armónicas, como ocurre en el caso del helicoide:

$$\begin{aligned} Y_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^3, &\qquad Y_1(z) = \Re(e^z, \imath e^z, \imath z), \\ Y_2 : \{\Re(z) > 0\} \to \mathbb{R}^3, &\qquad Y_2(z) = \Re\big(\sinh(z), \imath \cosh(z), \imath z\big) \end{aligned} \tag{1}$$

Obsérvese que Y_2 es conforme, mientras que Y_1 no lo es.

Como consecuencia del principio del máximo para funciones armónicas, las superficies armónicas no tienen puntos elípticos, esto es, su curvatura de Gauss es no positiva en toda la superficie. Nótese que la composición de una inmersión armónica con una transformación lineal proporciona otra inmersión armónica, que en lo que sigue se dirá linealmente equivalente a la anterior.

Sea $X : M \to \mathbb{R}^3$ una inmersión armónica.

Por la armonicidad de X, la 1-forma vectorial $\Phi = (\Phi_j)_{j=1,2,3} := (\partial_z X_j)_{j=1,2,3}$ es holomorfa sobre M. La pareja (M, Φ) es referida como la representación de Weierstrass de X. La 2-forma holomorfa sobre M dada por $\mathfrak{H} := \sum_{j=1}^3 \Phi_j^2$ es conocida en la literatura como la *diferencial de Hopf* de X. Una inmersión armónica es mínima si y sólo si su diferencial de Hopf es nula.

La métrica conforme $\|\Phi\| := \Big(\sum_{j=1}^3 |\Phi_j|^2\Big)^{1/2}$ fue introducida por Klotz en [3] y satisface la desigualdad $ds^2 \leq \|\Phi\|^2$, donde ds^2 es la métrica riemanniana en M inducida vía X por la métrica euclidiana de $\mathbb{R}^3$. La desigualdad $|\mathfrak{H}| < \|\Phi\|^2$ se satisface sobre M y expresa simplemente el hecho de que X es una inmersión.

Este proceso es reversible. En efecto, la construcción de una inmersión armónica $X : M \to \mathbb{R}^3$ pasa por dotar a la superficie de Riemann M de una tripleta holomorfa *sin periodos reales* $\Phi = (\Phi_j)_{j=1,2,3}$ satisfaciendo la condición $|\sum_{j=1}^3 \Phi_j^2| < \sum_{j=1}^3 |\Phi_j|^2$. Con esos ingredientes, basta con definir

$$X : M \to \mathbb{R}^3, \quad X(P) = \Re\Big(\int^P \Phi\Big).$$

Llamaremos $\mathfrak{G} : M \to \mathbb{S}^2$ a la aplicación de Gauss de X que preserva la orientación (o de jabociano positivo). No es difícil ver que

$$\mathfrak{G} = \frac{\Im(\Phi_2\overline{\Phi}_3, \Phi_3\overline{\Phi}_1, \Phi_1\overline{\Phi}_2)}{\|\Im(\Phi_2\overline{\Phi}_3, \Phi_3\overline{\Phi}_1, \Phi_1\overline{\Phi}_2)\|} = \frac{\imath\Phi \wedge \overline{\Phi}}{\|\imath\Phi \wedge \overline{\Phi}\|}. \tag{2}$$

Si $\xi : \mathbb{S}^2 - \{(0,0,1)\} \to \mathbb{R}^2$, $\xi(x_1,x_2,x_3) = (x_1/(1-x_3), x_2/(1-x_3))$ es la proyección estereográfica, la aplicación $g := \xi \circ \mathfrak{G}$ es conocida como la aplicación de Gauss compleja de X. Si $X(M)$ no es un plano, $\mathfrak{G}$ es una aplicación abierta de rango máximo salvo en un conjunto discreto de puntos donde presenta ramificaciones topológicas. Además, para cualquier $\nu \in \mathbb{S}^2$, el conjunto $\mathfrak{G}^{-1}(\{\nu, -\nu\})$ coincide con el conjunto de ceros de la 1-forma $\langle \nu, \Phi \rangle$ sobre M, siendo el orden de cada cero igual a la ramificación de $\mathfrak{G}$ en ese punto.

Si fijamos una parametrización conforme $(U, z = u + \imath v)$ en M y escribimos $\Phi_j|_U = \phi_j(z)dz$, $j = 1,2,3$, y $\Phi = \phi(z)dz$, se tiene que

$$\mathcal{K} = -4\frac{|\langle \mathfrak{G}, \phi' \rangle|^2}{\|\phi \wedge \overline{\phi}\|^2}, \quad H = -2\frac{\langle \mathfrak{G}, \Re(\overline{h}\phi') \rangle}{\|\phi \wedge \overline{\phi}\|^2},$$

donde $\mathcal{K}$ es la curvatura de Gauss de (M, ds^2), H la curvatura media de X en la dirección de $\mathfrak{G}$ y $h := \mathfrak{H}/|dz|^2 = \sum_{j=1}^3 \phi_j^2$.

Los datos de Weierstrass de X se pueden reescribir en términos de $\mathfrak{H}$ y g como sigue:

(W.1) $\Phi_1 = \dfrac{\Re(g)(1-|g|^2)}{|g|(1+|g|^2)}\lambda - \imath\dfrac{\Im(g)}{|g|}\sqrt{\lambda^2 - \mathfrak{H}}$,

(W.2) $\Phi_2 = \dfrac{\Im(g)(1-|g|^2)}{|g|(1+|g|^2)}\lambda + \imath\dfrac{\Re(g)}{|g|}\sqrt{\lambda^2 - \mathfrak{H}}$, y

(W.3) $\Phi_3 = \dfrac{2|g|}{1+|g|^2}\lambda$,

donde $\lambda := \frac{\Phi_3(1+|g|^2)}{2|g|}$. Además,

$$\frac{\partial_{\overline{z}} g}{\overline{\partial_z g}} = -\frac{g(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \mathfrak{H}})}{\overline{g}(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \mathfrak{H}})}, \quad \left|\frac{\partial_{\overline{z}} g}{\overline{\partial_z g}}\right| \leq 1, \text{ y } \frac{|\mathfrak{H}|}{|\lambda|^2 + |\lambda^2 - \mathfrak{H}|} < 1. \tag{3}$$

Como consecuencia, $\|\Phi\|^2 = |\lambda|^2 + |\lambda^2 - \mathfrak{H}|$.

Recíprocamente, supongamos que M está dotada de una 2-forma holomorfa $\mathfrak{H}$, una 1-forma holomorfa Φ_3 y una aplicación diferenciable preservando la orientación $g : M \to \overline{\mathbb{C}}$. Asumamos que (3) se sostiene para $\lambda = \frac{1+|g|^2}{2|g|}\Phi_3$, y la 1-forma vectorial $\Phi = (\Phi_j)_{j=1,2,3}$ dada como en $((\text{W}.j))_{j=1,2,3}$ no tiene periodos reales. Entonces Φ es holomorfa y la aplicación $Y : M \to \mathbb{R}^3$, $Y = \Re(\int \Phi)$, es una inmersión armónica con diferencial de Hopf $\mathfrak{H}$ y aplicación de Gauss compleja g.

2.1. Inmersiones armónicas cuasiconformes

Le geometría de las inmersiones armónicas está fuertemente influenciada por las propiedades de su aplicación de Gauss. Por ejemplo, una inmersión armónica $X : M \to \mathbb{R}^3$ es conforme (luego mínima) si y sólo si su aplicación de Gauss $\mathfrak{G} : M \to \mathbb{S}^2$ es conforme, y en este caso la aplicación de Gauss compleja g es meromorfa. Resulta por tanto natural preguntarse acerca de las propiedades geométricas de las inmersiones con aplicación de Gauss cuasiconforme. Dado que la proyección estereográfica es conforme, $\mathfrak{G}$ es cuasiconforme si y sólo si lo es g, esto es, si y sólo si $|\mu| < 1 - \epsilon$, $\epsilon > 0$, donde $\mu := \frac{\partial_{\bar{z}} g}{\partial_z g}$ es el coeficiente de Beltrami de g (una expresión explícita de $|\mu|$ puede encontrarse en la equación (3)).

Definición 2.1. *La inmersión armónica $X : M \to \mathbb{R}^3$ se dice* cuasiconforme *si $\mathfrak{G}$ (o equivalentemente g) es cuasiconforme.*

Es importante resaltar que una superficie armónica puede admitir parametrizaciones cuasiconformes y no cuasiconformes. Por ejemplo, el helicoide admite parametrizaciones armónicas y conformes (es una superficie mínima), mientras que la parametrización armónica de esta superficie presentada en la introducción no es cuasiconforme. Esto significa que el calificativo “cuasiconforme” debe entenderse asociado a la inmersión armónica de la superficie de Riemann, nunca relativo a su imagen dentro de $\mathbb{R}^3$.

Dada una función acotada $f : M \to \mathbb{R}$, escribamos

$$\limsup_{P \to \infty} f(P) = \lim_{n \in \mathbb{N}} \sup_{M - C_n} f,$$

donde $C_1 \subset C_2 \subset \ldots$ es cualquiera sucesión de compactos en M tal que $\cup_{j=1}^{\infty} C_j = M$. Si como siempre denotamos por Φ y $\mathfrak{H}$ a los datos de Weierstrass y a la differencial de Hopf de X, respectivamente, llamaremos

$$i_X := \limsup_{P \to \infty} |\mu|, \qquad i^X := \limsup_{P \to \infty} \frac{|\mathfrak{H}|}{\|\Phi\|^2}.$$

No es difícil probar que $i_X \leq i^X \leq \dfrac{2 i_X}{1 + i_X^2} \leq 1$.

Estos números reales deben ser interpretados como índices de conformidad de la inmersión. La cuasiconformidad de X puede reescribirse de forma más operativa como se indica en cualquiera de los tres siguientes enunciados equivalentes:

- $i^X < 1$.
- $\sup_M |\mathfrak{H}|/\|\Phi\|^2 < 1$.
- $i_X < 1$.

Desde el punto de vista de la teoría de Teichmüller, es interesante resaltar que X es cuasiconforme si y sólo si $\mathrm{Id} : M \to M^{\mathcal{E}}$ is cuasiconforme, donde $M^{\mathcal{E}}$ denota a la superficie de Riemann con soporte topológico M y la estructura conforme inducida por las parametrizaciones isotermas de X.

De otra parte, Osserman [5] introdujo el concepto de superficie *cuasimínima* para referir a aquellas superficies de $\mathbb{R}^3$ cuyas curvaturas principales k_1, k_2 satisfacen una desigualdad del tipo

$$0 < \delta \leq -k_1/k_2 \leq \delta$$

en todo punto donde no se anulen simultáneamente. Por la fórmula clásica de Rodrigues, la diferencial de la aplicación de Gauss aplica circunferencias en elipses con semi-ejes menor y mayor de longitudes $|k_1|$ y $|k_2|$, respectivamente. En particular, la propiedad de ser cuasimínima es equivalente a la de tener curvatura de Gauss no positiva y aplicación de Gauss cuasiconforme, donde en este caso la superficie se entiende dotada de la estructura conforme inducida por las parametrizaciones isotermas.

Aunque cuasiminimalidad y cuasiconformidad no son propiedades equivalentes, sí que están estrechamente relacionadas. De hecho, si $X : M \to \mathbb{R}^3$ es cuasiconforme entonces la superficie $X(M)$ es cuasimínima (lo contrario, como se deduce de lo comentado anteriormente para el helicoide, es falso).

3. Algunos resultados de tipo Bernstein

En esta sección enunciaremos algunos de los resultados obtenidos por los autores acerca de la aplicación de Gauss de superficies armónicas. Como en el caso de las superficies mínimas, pueden entenderse como generalizaciones del teorema de Bernstein.

Teorema 3.1 ([1]). *Sea M una superficie de Riemann abierta, y sea $X : M \to \mathbb{R}^3$ una inmersión armónica completa. Supongamos que la imagen por la aplicación de Gauss de la superficie está contenida en la región esférica $\mathbb{S}^2 \cap \{x_3 > \epsilon\}$ para algún $\epsilon > 0$. Entonces $X(M)$ es un plano.*

La imagen gaussiana de la trompeta armónica (ver la figura 1) es, salvo movimientos rígidos, $\mathbb{S}^2 \cap \{x_3 > 0\} - \{(0,0,1)\}$. En este sentido, el anterior teorema es fino.

En el caso cuasiconforme podemos dar más información. Por ejemplo, es conocido que los únicos grafos enteros (no necesariamente armónicos) en $\mathbb{R}^3$ con aplicación de Gauss cuasiconforme son los planos, ver [8]. El siguiente resultado es una generalización de lo probado por Klotz para inmersiones armónicas en [3]:

Teorema 3.2 ([1]). *Sea M una superficie de Riemann abierta, y sea $X : M \to \mathbb{R}^3$ una inmersión armónica completa y cuasiconforme. Supongamos que la imagen*

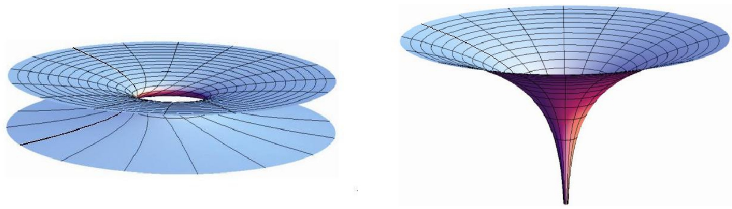

Figura 1: Dos superficies armónicas rotacionales (ver [1]). A la izquierda un catenoide armónico y a la derecha una trompeta armónica.

por la aplicación de Gauss de la superficie está contenida en la región esférica $\mathbb{S}^2 \cap \{|x_3| < 1 - \epsilon\}$ *para algún* $\epsilon > 0$*. Entonces* $X(M)$ *es un plano.*

4. Inmersiones armónicas con curvatura total finita

Una inmersión armónica $X : M \to \mathbb{R}^3$ se dice *algebraica* si M es biholomorfa a una superficie de Riemann compacta $\overline{M}$ menos una cantidad finita de puntos llamados finales (esto es, M tiene tipo conforme finito), y sus datos de Weierstrass Φ extienden de forma meromorfa a $\overline{M}$ con polos efectivos en los finales topológicos de M. Si $P \in \overline{M} - M$ es un final arbitrario de M, escribiremos

$$I_P := \text{máx}\{\text{Ord}_P(\Phi_j),\ j = 1, 2, 3\} - 1 \geq 0,$$

donde $\text{Ord}_P(\cdot)$ significa "orden del polo en P".

Es interesante observar que existen inmersiones armónicas algebraicas no completas. Por ejemplo, consideremos $X : \mathbb{C} - \{0\} \to \mathbb{R}^3$, $X(z) = \Re(z, \imath z, 1/z)$, y notemos que $X(c)$ tiene longitud finita, donde c es la curva divergente dada por $c : [-1, 0[\to \mathbb{C} - \{0\}$, $c(t) = \imath t$.

Definición 4.1. *La inmersión* X *se dice de curvatura total finita si* $\int_M \|\sigma\|^2 dS < +\infty$, *donde* σ *es la segunda forma fundamental de* X *y* dS *es el elemento de área de* ds^2.

Obviamente, la condición $-\int_M \mathcal{K} dS = \int_M |\mathcal{K}| dS < +\infty$ es más débil que la de tener curvatura total finita (recordemos que $\|\sigma\|^2 = 4\mathcal{H}^2 - 2\mathcal{K}$). Sin embargo es posible probar que:

Teorema 4.1 ([1])**.** *Sea* $X = (X_j)_{j=1,2,3} : M \to \mathbb{R}^3$ *una inmersión armónica, donde* M *es una superficie de Riemann abierta, y denotemos por* $\Phi = (\Phi_j)_{j=1,2,3}$ *sus datos de Weierstrass. Entonces, las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(I) *X es completa y de curvatura total finita.*

(II) *X es completa y algebraica, y su aplicación de Gauss $\mathfrak{G} : M \to \mathbb{S}^2$ extiende de forma contínua a la compactificación $\overline{M}$ de M.*

(III) *X es algebraica, y para cada final topológico $P \in \overline{M} - M$ se tiene que $I_P \geq 1$ y existe una isometría lineal $R_P \in O(3, \mathbb{R})$ tal que*

$$\mathrm{Ord}_P\left((R_P \circ \Phi)_3\right) < \mathrm{Ord}_P\left((R_P \circ \Phi)_2\right) = \mathrm{Ord}_P\left((R_P \circ \Phi)_1\right) = I_P + 1$$

y

$$\frac{(R_P \circ \Phi)_2}{(R_P \circ \Phi)_1}(P) \notin \mathbb{R}.$$

(IV) *X es completa, algebraica y cuasiconforme.*

(V) *X es completa, cuasiconforme y $\int_M |\mathcal{K}| dS < +\infty$.*

Además, si X es completa y de curvatura total finita, entonces X es una inmersión propia que vista desde el infinito $X(M)$ se corresponde con una colección finita de planos (con multiplicidad) que pasan por el origen.

El anterior teorema generaliza los bien conocidos resultados de Osserman [6] y Jorge-Meeks [2] para superficies mínimas en $\mathbb{R}^3$. Este teorema facilita la construcción de inmersiones armónicas completas y de curvatura total finita (ver la figura 2).

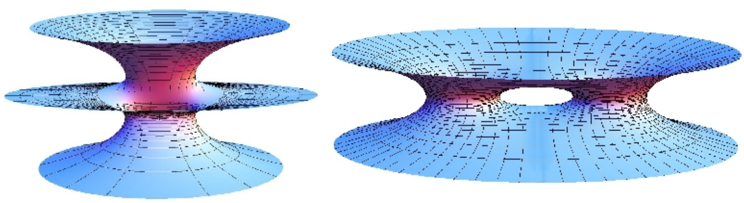

Figura 2: Dos ejemplos de embebimientos propios y armónicos de superficies en $\mathbb{R}^3$ (ver [1]). A la izquierda una esfera con tres finales y a la derecha un toro con dos finales. No existen superficies mínimas en $\mathbb{R}^3$ con estas características (ver [4, 7]).

Una de las consecuencias más significativas del teorema anterior es que la fórmula de Jorge-Meeks [2] sigue siendo válida para este tipo de inmersiones:

Corolario 4.1 ([1])**.** *Sea M una superficie de Riemann abierta, y sea $X : M \to \mathbb{R}^3$ una inmersión armónica completa no llana de curvatura total finita. Denotemos por $\{Q_1, \ldots, Q_k\} = \overline{M} - M$ a los finales topológicos de M. Entonces las siguientes afirmaciones son ciertas:*

(a) *La aplicación de Gauss de* X, $\mathfrak{G} : \overline{M} \to \mathbb{S}^2$, *es un recubridor topológico ramificado con un número finito de hojas.*

(b) Q_j *es un punto de ramificación de* $\mathfrak{G}$ *de orden* $I_{Q_j} - \mathrm{Ord}_{Q_j}(\langle\Phi, G(Q_j)\rangle)$, *donde* $\Phi = (\Phi_j)_{j=1,2,3}$ *son los datos de Weierstrass de* X, $j = 1, \ldots, k$.

(c) *Si escribimos por* ν *el género topológico de* $\overline{M}$ *entonces*

$$\int_M \mathcal{K}dS = -4\pi Deg(\mathfrak{G}) = -2\pi\big(2\nu - 2 + \sum_{j=1}^{k}(I_{Q_j} + 1)\big),$$

donde $Deg(\mathfrak{G})$ *es el grado topológico de* $\mathfrak{G}$.

Agradecimientos

Esta investigación ha sido parcialmente financiada por el proyecto MTM2007-61775 del MCYT-FEDER y por el grupo P09-FQM-5088 de la Junta de Andalucía.

Referencias

[1] A. Alarcón and Francisco J. López, On harmonic quasiconformal immersions of surfaces in $\mathbb{R}^3$. *En preparación*.

[2] L.P. Jorge and W.H. Meeks III, The topology of complete minimal surfaces of finite total Gaussian curvature, *Topology* **22** (1983), 203-221.

[3] T. Klotz Milnor, Mapping surfaces harmonically into E^n, *Proc. Amer. Math. Soc.* **78** (1980), 269-275.

[4] F.J. López and A. Ros, On embedded complete minimal surfaces of genus zero, *J. Differential Geom.* **33** (1991), 293-300.

[5] R. Osserman, On complete minimal surfaces, *Arch. Rational Mech. Anal.* **13** (1963), 392-404.

[6] R. Osserman, Global properties of minimal surfaces in E^3 and E^n, *Ann. of Math.* (2) **80** (1964), 340-364.

[7] R. Schoen, Uniqueness, symmetry, and embeddedness of minimal surfaces, *J. Differential Geom.* **18** (1983), 791-809.

[8] L. Simon, A Hölder estimate for quasiconformal maps between surfaces in Euclidean space. *Acta Math.* **139** (1977), 19-51.

Florentino García Santos: In Memoriam
Universidad de Granada, 2011, págs. 9–14

Teoría de Morse y ecuaciones elípticas no lineales

David Arcoya

1. Introducción

Tuve la oportunidad de conocer a Floro en el año 1985. Durante el curso 1985/86 asistí como alumno de quinto año de la Licenciatura de Matemáticas a su curso de Topología Algebraica. Desde el primer momento, quede impresionado por su seriedad, responsabilidad y *"buen hacer"* en una de las disciplinas más abstractas de la Matemática. Aún recuerdo sus palabras cuando estaba acabándose el curso: *"¡Bueno, ya podéis ir a trabajar a Italia!"*. Por supuesto, reconozco que ha sido sólo con el tiempo y tras continuados estancias de trabajo en diversas universidades italianas que he ido comprendiendo todo el significado de su frase; pero aún así, desde los inicios de investigación, Floro ejerció y, sin lugar a dudar, seguirá ejerciendo, una gran influencia sobre la misma. Ya en la elaboración de mi Tesis Doctoral, bajo la dirección de Antonio Cañada, me ocupe del estudio de la existencia de soluciones periódicas de sistemas hamiltonianos en los que la Teoría de Morse y, por tanto, la Topología Algebraica jugaba un papel fundamental. No me cabe la menor duda que sin la formación recibida por su parte en la teoría de la Homología Singular difícilmente me habría sido posible realizar el trabajo [3]. Por ello, quiero agradecer al grupo de investigación "Geometría Diferencial y sus Aplicaciones", del Plan Andaluz de Investigación, J. A., (Cód. FQM-324) el haberme ofrecido la posibilidad de colaborar en este volumen en el que, como un tributo personal a Floro, he pensado dedicar estas notas a presentar una pequeña introducción a la Teoría de Morse y su aplicación al estudio de problemas elípticos no lineales.

La teoría de Morse es una teoría matemática que liga dos disciplinas aparentemente diversas: la Topología, o más concretamente la Topología Algebraica, y el Análisis Matemático, o más concretamente la Teoría de puntos críticos. Aún a riesgo de simplificar en exceso, permítaseme considerar un paisaje montañoso y sea h la función que asigna a cada punto su elevación. Si imaginamos el paisaje formado por un medio poroso e inundado por agua , la región h_c cubierta por agua hasta la altura c sería el conjunto $h^{-1}(-\infty, c]$. La teoría de Morse estudia como la topología de esta región cambia cuando el agua sube (o baja). Intuitivamente, la topología de esta región sólo cambia cuando el nivel de inundación del agua supera la altura

David Arcoya, *darcoya@ugr.es*
Dep. Análisis Matemático, Facultad de Ciencias, Universidad de Granada, 18071-Granada

de un punto crítico de h, es decir, un punto en el que el gradiente de h es 0. A título de ejemplo podemos considerar el caso en el que M es un toro de ecuación $x = (R+r\cos t)\cos s$, $y = r\mathrm{sen}\, t$, $z = (R+r\cos t)\mathrm{sin}\, s$, $s, t \in [0, 2\pi)$ con $R, r > 0$. En este caso, $h(x, y, z) = z$, para $(x, y, z) \in M$. Esta función posee cuatro niveles críticos correspondientes respectivamente a un mínimo, $c_1 = \text{mín}_M h$, dos puntos de silla, $c_2 < c_3$ y un máximo, $c_4 = \text{mín}_M h$. Empezando por $c < c_1$, $h_c = \emptyset$, mientras que cuando el nivel supera a c_1, pero no a c_2, h_c es topológicamente hablando un disco. Para $c_2 < c < c_3$, el conjunto de subnivel h_c es un cilindro (o un disco con un asa (1-cell)). Si $c_3 < c < c_4$ nos queda que h_c es un toro al que le cortamos un disco (o un cilindro con una asa (1-cell)). Finalmente, para $c \geq c_4$, $h_c = M$.

Verificamos así que existe una profunda conexión entre los distintos niveles críticos de la función h y la topología de los subconjuntos de subnivel h_c. No es de extrañar así que los topólogos intenten usar funciones simples h que le proporcionen información topológica de subconjuntos de subnivel complicados, mientras que el uso de esta teoría por parte de un analista se dirija al estudio de la topología de subconjuntos de subnivel simples de los que obtener información sobre los niveles críticos de funciones complicadas. En la Sección 2 de estas notas presentamos meramente algunos resultados básicos de la teoría de Morse. Remitimos al lector al tratado clásico [5] o al más reciente [4] para un estudio más exhaustivo de la teoría. Una aplicación a la existencia de soluciones (débiles) de problemas de Dirichlet no lineales que pueden ser obtenidos como puntos críticos de funcionales definidos en espacios de Hilbert de dimensión infinita será llevada a cabo en la Sección 3.

2. Teoría de Morse

Consideremos un funcional $J : E \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 definido en un espacio de Hilbert E cuyo producto escalar será denotado como $(\cdot, \cdot)$. Si, para $u \in E$, $dJ(u)$ representa la derivada de Fréchet de J en u, definimos $J'(u)$ como el único elemento de E que verifica,

$$dJ(u)(v) = (J'(u), v)\,, \quad \forall v \in E.$$

Análogamente, si $d^2J(u)$ es la derivada de Fréchet de segundo orden, $J''(u) : E \longrightarrow E$ es el operador lineal dado por

$$dJ(u)(v, w) = (J''(u)(v), w)\,, \quad \forall v, w \in E.$$

También denotamos como Z el conjunto de todos los puntos críticos de J, es decir,

$$Z = \{u \in E \,:\, J'(u) = 0\}.$$

Para $c \in \mathbb{R}$, llamaremos el conjunto de subnivel c a

$$J_c = \{u \in E \,:\, J(u) \leq c\}\,,$$

y el conjunto de puntos críticos con nivel c a

$$Z_c = \{u \in Z \,:\, J(u) = c\}\,.$$

Definición 2.1 (Indice de Morse)**.** *Un punto crítico $u \in E$ de J se dice no-degenerado si $J''(u)$ es invertible. En este caso, llamamos índice de Morse del punto u a la dimensión del subespacio vectorial en el que $J''(u)$ es definida negativa.*

Dado $c \in \mathbb{R}$ y $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se denota por $C_q(J_c)$ al cardinal del conjunto de los puntos $u \in Z \cap J_c$ que tienen índice de Morse q. Análogamente, ($c = \infty$), C_q será el número de puntos críticos de J con índice de Morse q.

Supondremos que el funcional J verifica:

(J_1) J está acotado inferiormente.

(J_2) Todo punto crítico de J es no degenerado.

Además, impondremos la siguiente hipótesis sobre J:

(PS) Toda sucesión $\{u_n\}$ en E para la que $J(u_n)$ sea acotada y $J'(u_n)$ converja a cero en E posee una subsucesión $\{u_{n_k}\}$ convergente en E.

La desigualdades siguientes son una consecuencia de la conexión entre $C_q(J_c)$ y los grupos de homología $H_q(J_c)$:

Teorema 2.1 (Desigualdades de Morse)**.** *Si $J \in C^2(E, \mathbb{R})$ verifica (J_1), (J_2) y (PS), entonces para cualesquiera $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $c > \inf_E J$, se cumple*

$$\sum_{k=0}^{q} (-1)^k \mathit{rank}\, H_{q-k}(J_c) \leq \sum_{k=0}^{q} (-1)^k C_{q-k}(J_c)\,.$$

Observemos que en el caso particular que exista $c \in \mathbb{R}$ tal que todo punto crítico de J pertenezca al subnivel J_c, tendríamos que $C_q(J_c) = C_q$. Además, la no existencia de puntos críticos con nivel superior a c implica que J_c es un retracto de deformación de E y, por tanto,

$$\operatorname{rank} H_q(J_c) = \operatorname{rank} H_q(E) = \begin{cases} 1, & \text{if } q = 0, \\ 0, & \text{if } q \neq 0\,. \end{cases}$$

Así, deducimos que

Corolario 2.1. *Si además de las hipótesis del Teorema 2.1, suponemos que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $Z \subset J_c$, entonces*

$$(-1)^q \leq C_q - C_{q-1} + \cdots + (-1)^q C_0\,,$$

para todo $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Nota 2.1. *El caso en el que J posea un número finito de mínimos aislados posiblemente degenerados puede ser cubierto por el teorema previo sin más que contar tales mínimos en C_0.*

3. Aplicaciones a problemas de contorno elípticos no lineales

Dado un subconjunto abierto y acotado $\Omega \subset \mathbb{R}$, estudiaremos en esta sección una aplicación simple de los resultados anteriormente discutidos al estudio de la existencia de solución del problema de Dirichlet no lineal

$$\begin{array}{c} -\Delta u = f(x,u)\,, \quad x \in \Omega \\ u = 0\,, \quad x \in \partial\Omega \end{array} \tag{4}$$

donde supondremos que $f \in C^1(\Omega \times \mathbb{R})$ verifica

$$\lim_{|u|\to\infty} \frac{|f(x,u)|}{u} < \lambda_1\,, \tag{5}$$

uiformemente en $x \in \Omega$, siendo $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k < \dots$ la sucesión de valores propios del operador de Laplace $-\Delta$ (con condición de Dirichlet nula en el borde). Recordemos que ésta diverge positivamente.

En primer lugar, observemos que la condición (5) implica que existen constantes positivas C_1, C_2 tales que

$$|f(x,u)| \le C_1|u| + C_2, \quad \forall x \in \Omega,\ u \in \mathbb{R},$$

y, por tanto, es fácil comprobar que, en el espacio de Sobolev usual $E = H_0^1(\Omega)$ de las funciones de $L^2(\Omega)$ que son débilmente derivables con derivada débil también en $L^2(\Omega)$ y que tienen traza cero en el borde $\partial\Omega$, está bien definido el funcional J dado por

$$J(u) = \frac{1}{2}(u,u) - \int_\Omega F(x,u)dx\,, \quad u \in E,$$

donde $(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx$ es el producto escalar de E (vía la desigualdad de Poincaré) y $F(x,t) = \int_0^t f(x,s)\, ds$. La regularidad C^1 de f da que $F \in C^2(\Omega \times \mathbb{R})$ y, en consecuencia, $J \in C^2(E)$, correspondiendo los puntos críticos de J con las soluciones débiles del problema (4). El lector no tendrá ningún problema en verificar que la función $u \mapsto \int_\Omega F(x,u)\, dx$ es continua para la topología débil de E, y, en consecuencia, que J es débilmente semicontinua inferiormente (w.l.s.c.).

Además, la condición (5) y la caracterización variacional de $\lambda_1 = \inf\{(u,u) : \int_\Omega u^2\, dx = 1\}$ también permite probar la acotación inferior y la coercividad de J, es decir, $\lim_{\|u\|\to\infty} J(u) = \infty$. Por consiguiente, el teorema clásico de minimización de Weierstrass establece la existencia de un mínimo global de J que porporciona la existencia de una solución (débil) de (4).

Pero, nuestro objetivo es mostrar cómo la teoría de Morse, o más concretamente las desigualdades Morse deducidas en el Corolario 2.1 proporcionan una mejora sustancial del resultado de existencia anterior para (4). Concretamente, supondremos que el problema admite a $u = 0$ como solución trivial, es decir que $f(x, 0) = 0$, para todo $x \in \Omega$ y trataremos de probar la existencia de varias (dos o tres) soluciones no triviales. Sólo con el objeto de facilitar la lectura de estas notas supondremos, por simplicidad, que f es independiente de $x \in \Omega$.

Teorema 3.1 ([2])**.** *Supongamos que $f \in C^1(\mathbb{R})$ verifica (5) y $f(0) = 0$. Si $\lambda = f'(0) > \lambda_1$, entonces el problema (4) tiene al menos una solución positiva u_1 y una solución negativa u_2. Si, además suponemos que*

$$\frac{f(u)}{u} > f'(u)\,, \forall u \neq 0\,, \tag{6}$$

entonces (4) tiene una tercera solución $u_3 \neq u_1, u_2$ siempre que $\lambda > \lambda_2$.

Demostración. Empezamos probando la existencia de la solución positiva u_1 si $\lambda > \lambda_1$. Para ello truncamos la no-linealidad f tomando

$$\overline{f}(t) = \begin{cases} f(t), & \text{si } t \geq 0, \\ 0, & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

Considerando $\overline{F}(t) = \int_0^t f(s)ds$ y el funcional truncado $\overline{J}$ definido en E por $\overline{J}(u) = \frac{1}{2}(u, u) - \int_\Omega \overline{F}(x, u)dx$. Un argumento similar al que hemos empleado para J prueba de nuevo que $\overline{J}$ alcanza su mínimo $\mathrm{mín}_E\, \overline{J}$ en un punto crítico $u_1 \in E$, es decir, una solución débil de

$$\begin{aligned} -\Delta u = \overline{f}(u)\,, \quad x \in \Omega, \\ u = 0\,, \quad x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Ya que $\lambda > \lambda_1$, si $\varphi_1 > 0$ denota una función propia asociada a λ_1, entonces $\overline{J}(u_1) = \mathrm{mín}_E\, \overline{J} \leq \overline{J}(t\varphi_1) < 0$ para $t > 0$ suficientemente pequeño y consecuentemente, $u_1 \neq 0$. Puesto $\overline{f} \leq 0$ en $(-\infty, 0]$, el principio del máximo implica que $u_1 > 0$ en Ω y, por tanto, es solución de (4).

De una forma análoga, truncando, en este caso, la no-linealidad en $(0, +\infty)$, el lector puede probar la existencia de la solución negativa u_2 y la primera parte del teorema queda probada.

Para la segunda parte, empezamos probando que u_1 es, de hecho, un mínimo local de J. Para ello, puesto que $u = u_1 > 0$ verifica

$$\begin{aligned} -\Delta u = \frac{f(u_1)}{u_1}u\,, \quad x \in \Omega, \\ u = 0\,, \quad x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

se tiene que el primer valor propio $\lambda_1\left[\frac{f(u_1)}{u_1}\right]$ del problema de valores propios con peso $\frac{f(u_1)}{u_1}$ tiene que ser igual a uno:

$$\lambda_1 \left[\frac{f(u_1)}{u_1} \right] = 1.$$

En virtud de (6), deducimos entonces que $1 < \lambda_1 [f'(u_1)]$, lo cual significa que el índice de Morse de u_1 es cero. Similarmente, $u_2 < 0$ también es un mínimo local de J.

Supongamos ahora que $\lambda > \lambda_2$ y supongamos por contradicción que se cumple $Z = \{0, u_1, u_2\}$. Si λ no es un valor propio λ_k, entonces $u = 0$ es un punto crítico no-degenerado de J con índice de Morse mayor o igual que 2 (puesto que $\lambda > \lambda_2$). Así, $C_0 = 2$ y $C_1 = 0$ lo cual contradice el Corolario 2.1 con $q = 1$ y prueba la existencia de una terceraa solución no cero. La prueba en el caso $\lambda = \lambda_k$ es ligeramente más técnica y dirigimos al lector a [2] para los detalles. □

Nota 3.1. *La tesis del teorema sigue siendo cierta aunque la hipótesis* (6) *no se verifique (véase otra vez [2]). Para más resultados, incluyendo el número exacto de soluciones remetimos al trabajo reciente [1].*

Agradecimientos

Trabajo sufragado por MICINN Ministerio de Ciencia e Innovación MTM2009-10878 y la Junta de Andalucia FQM-116.

Referencias

[1] A. Ambrosetti, On the number of positive solutions of some semilinear elliptic problems, *preprint* (2010).

[2] A. Ambrosetti y D. Lupo, On a class of nonlinear Dirichlet problems with multiple solutions, *Nonlinear Analysis, TMA* **8** (1984), 1145-1150.

[3] D. Arcoya, Periodic solutions of Hamiltonian systems with strong resonance at infinity, *Differential and Integral Equations* **3** (1.990), 909-921.

[4] K.C. Chang, *Methods in Nonlinear Analysis*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, Berlin, 2005.

[5] J.T. Schwartz, *Nonlinear Functional Analysis*, Gordon&Breach, New York, 1969.

Florentino García Santos: In Memoriam
Universidad de Granada, 2011, págs. 15–22

Jugando con matrices positivas: eficiencia de un estado inicial

Margarita Arias • Juan Campos

Resumen Conocedores del interés que el profesor García Santos mostraba por todos los temas relacionados con la docencia, en este trabajo presentamos algunos resultados, en parte novedosos, sobre el comportamiento asintótico de ciertos sistemas dinámicos generados por matrices positivas, que bien podrían estar incluidos en uno de los cursos de álgebra lineal que tantas veces impartió Floro.

1. Introducción

Una matriz A, cuadrada de orden k y positiva, es decir, con todas sus entradas positivas o cero, permite definir un sistema dinámico en $\mathbb{R}_+^k = [0, +\infty)^k$ por medio de la ecuación

$$\vec{v}_{n+1} = A\vec{v}_n. \tag{7}$$

Son muy diversos los modelos matemáticos que se ajustan a este tipo de ecuaciones. Por ejemplo, algunos modelos de poblaciones estructuradas por edad, como el modelo de Leslie, o los clásicos modelos de economía de Leontief (ver, por ejemplo, [1], [3]). La matriz A es la llamada *matriz de transición* y $\vec{v}_n$ es el *vector de estados* en la etapa n-ésima.

Aunque la ecuación (7), conocido el vector de estados inicial, $\vec{v}_0$, permite determinar por recurrencia el vector de estados en cualquier etapa posterior, no proporciona de forma inmediata un retrato general de la dinámica del proceso que describe. Para realizar este estudio es necesario investigar los valores propios y los vectores propios de la matriz. Como A es positiva es conocido que

$$\lambda_p = \text{máx}\{|\lambda| / \ \lambda \in \sigma(A)\} \tag{8}$$

es valor propio y que $\ker(A - \lambda_p I_k) \bigcap \mathbb{R}_+^k \neq \emptyset$. Nos referiremos a λ_p como *valor propio principal*. Se dice que el valor propio principal es *dominante* cuando es algebráicamente simple, esto es, es simple como raíz del polinomio característico, y

$$\lambda_p > |\lambda| \ , \forall \lambda \in \sigma(A) - \{\lambda_p\}. \tag{9}$$

Margarita Arias, *marias@ugr.es*
Juan Campos, *campos@ugr.es*
Dep. Matemática Aplicada, Facultad de Ciencias, Universidad de Granada, 18071-Granada

Existen muchos resultados que permiten asegurar la dominancia del valor propio principal. Probablemente el más conocido sea el clásico Teorema de Perron-Fröbenious, [4] (ver también [3]), que asegura que λ_p es dominante si la matriz A es tal que para algún $s \in \mathbb{N}$, A^s tiene todas sus entradas estrictamente positivas (lo que algunos autores denominan *matrices ergódicas*).

Tambien se conocen, por ejemplo, condiciones sencillas para matrices de transición de un modelo de Leslie. Recordemos que los modelos de Leslie son modelos para estudiar la evolución del número de hembras de una población estructurada por edades. En su versión más simple, se divide la población en k grupos de edad equiespaciados de duración d, de forma que la edad máxima de supervivencia de un individuo es kd y se recuenta cada d unidades de tiempo; la evolución de la población se describe mediante la ecuación (7) con

$$A = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_{k-1} & f_k \\ s_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & s_1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & s_{k-1} & 0 \end{pmatrix}$$

donde $f_i \geq 0$ es el número medio de crías hembras que tiene cada hembra del grupo i (la llamada tasa de fertilidad), y $0 < s_i < 1$ es la probabilidad de que un individuo del grupo i sobreviva al siguiente (la tasa de supervivencia del grupo). Se demuesta, [2], que el valor propio principal de A es dominante siempre que existan dos grupos fértiles consecutivos, es decir, cuando $f_i f_{i+1} > 0$ para algún $i \in \{1, \ldots, k-1\}$.

Bajo condiciones de dominancia es evidente que $\lambda_p > 0$. Además, si denotamos por $\vec{p}$ el único vector propio cuyas componentes suman 1, se puede demostrar (ver, por ejemplo, [2]) que dado cualquier vector de estados inicial $\vec{v}_0 \in \mathbb{R}^k_+$, existe una constante $c(\vec{v}_0) \in \mathbb{R}_+$ tal que, si $\vec{v}_n = A^n \vec{v}_0,\ n \in \mathbb{N}$, es la solución de (7) que parte de ese estado inicial, entonces

$$\frac{1}{\lambda_p^n} \vec{v}_n \to c(\vec{v}_0)\vec{p},\ n \to +\infty. \tag{10}$$

En otras palabras, la solución de (7) que parte del estado inicial $\vec{v}_0$ se comporta a largo plazo como $c(\vec{v}_0)\lambda_p^n \vec{p}$. Vamos a llamar a la constante $c(\vec{v}_0)$ *eficiencia* del estado $\vec{v}_0$. El cálculo de la eficiencia de un estado inicial requiere del conocimiento de una base de $\mathbb{R}^k$ en la que A se escriba en algún tipo de forma canónica y su obtención no es en absoluto trivial.

El propósito de este trabajo es relacionar la eficiencia con un vector propio de la matriz traspuesta de A, A^t, asociado al valor propio dominante. Hay que observar que, como es evidente a partir de (8) y (9), el valor propio principal y la condición de dominancia son invariantes por trasposición.

Aunque toda esta teoría es válida para cualquier matriz positiva, nuestro interés se centra en las matrices de transición de los modelos lineales discretos de dinámica de poblaciones, como el de Leslie, puesto que el conocimiento de la eficiencia de cualquier estado inicial permite conocer a priori una estimación precisa del número de individuos en cada estado, no sólo su comportamiento asintótico. Como consecuencia se puede determinar, por ejemplo, la estrategia más conveniente de distribución inicial de la población en procesos de repoblación.

2. Eficiencia de un estado inicial

Dado $\vec{v} \in \mathbb{R}^k_+$, denotamos por $|\vec{v}| = \sum_{i=1}^k v_i$ donde v_i es la i-ésima componente de $\vec{v}$. Con esta notación $\vec{p}$ cumple $|\vec{p}| = 1$ y es un vector de tantos por uno que en virtud de (10) es el límite en n de

$$\frac{\vec{v}_n}{|\vec{v}_n|}$$

para cualquier solución de (7) no eventualmente nula. Podemos, por tanto, llamar a a $\vec{p}$ el *vector de proporciones asintóticas* del sistema dinámico (7).

La solución de (7) dada por

$$\vec{p}_n = \lambda_p^n \vec{p} \tag{11}$$

representa la evolución de un individuo inicialmente distibuido en la proporción asintótica del modelo. Como consecuencia de la normalización $|\vec{p}_n| = \lambda_p^n$.

Llamamos *eficiencia* de un estado inicial $\vec{v}_0$ al "límite"del cociente entre la solución $\vec{v}_n$ que comienza en dicho estado y la solución (11) cuando $n \to \infty$. Este límite puede entenderse componente a componente en las componentes de $\vec{p}$ no nulas o el cociente entre la suma total de las componentes de cada vector, y coincide con el valor de $c(\vec{v}_0)$ de la fórmula (10). Se deduce de (10) que $c : \mathbb{R}^k_+ \to \mathbb{R}$ es la restricción de una aplicación lineal definida en $\mathbb{R}^k$ (de hecho (10) se puede hacer para cualquier $\vec{v}_0 \in \mathbb{R}^k$).

Si consideramos $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_k\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^k$, el valor $c_i = c(\vec{e}_i)$ se puede ver como la eficiencia de un individuo del estado i en relación con un individuo distribuido en la proporción asintótica del modelo.

Definición. Denominamos *vector de eficiencia* del modelo al vector formado por las eficiencias de los vectores de la base caónica de $\mathbb{R}^k$, es decir, $\vec{c} = (c_1, \ldots, c_k)^t$.

Con esta notación se tiene que, para cualquier $\vec{v} \in \mathbb{R}^k$,

$$c(\vec{v}) = \sum_{i=1}^{k} c_i v_i :=< \vec{c}, \vec{v} >$$

donde $<,>$ denota el producto escalar usual en $\mathbb{R}^k$.

Teorema 2.1. *Supongamos que el vector propio principal λ_p de una matriz positiva A es dominante. Entonces, el vector de eficiencia $\vec{c}$ es el vector propio de A^t asociado a λ_p que cumple $< \vec{c}, \vec{p} >= 1$.*

Demostración. Sea w un vector propio de A^t asociado a λ_p. Dado $\vec{v} \in \mathbb{R}^k$,

$$< \vec{w}, \vec{v} >= \frac{1}{\lambda_p^n} < (A^t)^n \vec{w}, \vec{v} >= \frac{1}{\lambda_p^n} < \vec{w}, A^n \vec{v} >,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Haciendo $n \to \infty$ y teniendo en cuenta (10), se tiene entonces que

$$< \vec{w}, \vec{v} >= c(\vec{v}) < \vec{w}, \vec{p} > . \tag{12}$$

Si $< \vec{w}, \vec{p} >= 0$, entonces $< \vec{w}, \vec{v} >= 0$ para cualquier $\vec{v} \in \mathbb{R}^k$ y $\vec{w} = \vec{0}$, en contradición con que es un vector propio de A^t. Por tanto, $< \vec{w}, \vec{p} > \neq 0$ y

$$c(\vec{v}) = \frac{< \vec{w}, \vec{v} >}{< \vec{w}, \vec{p} >},$$

para todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^k$. En particular,

$$\vec{c} = \frac{1}{< \vec{w}, \vec{p} >} \vec{w}, \tag{13}$$

con lo que $\vec{c}$ es el vector propio de A^t asociado a λ_p que cumple $< \vec{c}, \vec{p} >= 1$, c.q.d.

Observación. Dado que $\mathrm{rg}(A^t - \lambda_p I) = \mathrm{rg}(A - \lambda_p I) = k - 1$, el vector de eficiencia $\vec{c}$ es la única solución del sistema

$$(A^t - \lambda_p I)\vec{x} = \vec{0}, \tag{14}$$

que cumple $< \vec{x}, \vec{p} >= 1$. Esta última ecuación resulta de imponer que la eficiencia del vector de proporciones asintóticas del sistema dinámico es igual a 1.

Un ejemplo. En [2], ejercicio 5, pag. 345, los autores proponen un sencillo ejercicio en el que se trata de describir la distribución por edades y el comportamiento asintótico de una población estructurada en dos grupos de edad con $f_1 = 1$, $f_2 = 3$ y $s_1 = 2/3$, partiendo de un estado inicial de 100 miembros en el primer grupo de edad y ninguno en el segundo.

Es un ejercicio elemental determinar que para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2/3 & 0 \end{pmatrix},$$

$\lambda_p = 2$ y $\vec{p} = (3/4,\, 1/4)^t$. Estos dos datos nos permiten asegurar que la población total se hace cada vez más grande y que a largo plazo la proporción de individuos en cada grupo de edad se ajustará al vector de proporciones $\vec{p}$, es decir, un $75\,\%$ del total pertenecerá al primer grupo de edad y el $25\,\%$ restante al segundo.

Sin embargo, si calculamos la eficiencia del estado inicial podemos ser más concretos en nuestras predicciones. Se comprueba que $\vec{c} = (8/9,\, 4/3)^t$, con lo que la eficiencia del estado inicial dado es $c((100,\, 0)^t) = 800/9$ y, por tanto, la población en el recuento n, $\vec{v}_n$, cumple

$$\vec{v}_n = A^n \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2/3 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix} \simeq 2^n \frac{800}{9} \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}.$$

La siguiente tabla presenta los datos reales y los obtenidos mediante esta aproximación.

n	0	5	10	15	20
$A^n \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix}$	100 0	2100 733	68300 22733	2184500 728200	69905100 23301667
$2^n \frac{800}{9} \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$	67 22	2133 711	68267 22756	2184533 728178	69905067 23301689

El vector de eficiencia $\vec{c}$ indica la mejor estrategia a seguir en este modelo con vistas a la repoblación: 100 individuos del primer estadio se comportan a largo plazo como $\frac{800}{9} \simeq 88{,}89$ individuos repartidos según las proporciones de $\vec{p} = (3/4,\, 1/4)^t$, mientras que si partimos de 100 individuos en el segundo estadio, como $c((0,\, 100)^t) = 400/3 \simeq 133{,}33$, su evolución corresponderá a la de 133,33 individuos repartidos según $\vec{p}$. También es posible analizar hasta qué punto es rentable pagar un precio más alto por individuos adultos.

3. El caso no dominante

Cuando el valor propio principal λ_p no es dominante, el estudio del comportamiento de $A^n \vec{v}_0$ para una condición inicial dada, $\vec{v}_0$, se puede llegar a complicar mucho, tanto por la posible existencia de valores propios complejos con norma λ_p, como por la multiplicidad del valor propio principal. Sin embargo, cuando λ_p es geométricamente simple aún es posible obtener resultados semejantes a los de la sección anterior.

Diremos que λ_p es *geométricamente dominante* si verifica (9) y además

$$\dim\left(\ker\, (A - \lambda_p I)\right) = 1.$$

En este caso, $\vec{p}$ viene naturalmente definido como el único elemento de ker $(A - \lambda_p I)$ con $|\vec{p}| = 1$. Se demuestra (ver anexo)

Lema 3.1. *Para cada $\vec{v} \in \mathbb{R}^k$ existe una constante $c(\vec{v})$ tal que*

$$\frac{1}{n^{s-1}\lambda_p^n} A^n \vec{v} \to c(\vec{v})\vec{p}, \tag{15}$$

donde s es la multiplicidad algebráica de λ_p (multiplicidad como raíz del polinomio característico). Además existen vectores tales que $c(\vec{v}) \neq 0$.

Podemos por tanto llamar, de forma análoga al caso dominante, a la constante $c(\vec{v})$ eficiencia del estado inicial $\vec{v}$ y el vector de eficiencia del modelo será $\vec{c} = (c_1, \ldots, c_k)^t$, con $c_i = c(\vec{e}_i),\ i = 1, \ldots, k$. Obsérvese que $\vec{c} \neq \vec{0}$ puesto que hay vectores con $c(\vec{v}) \neq 0$. Con esta notación,

$$c(\vec{v}) =< \vec{c}, \vec{v} >,\ \vec{v} \in \mathbb{R}.$$

Como en el caso dominante, el resultado anterior permite dar una estimación del número de individuos en el estado n, conocido el estado inicial $\vec{v}_0$, siempre que $c(\vec{v}_0) \neq 0$:

$$|\vec{v}_n| = |A^n \vec{v}_0| \simeq n^{s-1}\lambda_p^n c(\vec{v}_0),$$

y la proporción en cada clase tiende a asemejarse a la determinada por el vector de proporciones asintóticas, $\vec{p}$. Como en el caso dominante, se tiene el siguiente resultado, cuya demostración incluimos también en el anexo final.

Teorema 3.1. *Sea A una matriz positiva con valor propio principal λ_p geométricamente dominante. Entonces, el vector de eficiencia, $\vec{c}$, es un vector propio de la matriz A^t asociado a λ_p.*

Observación 1. Dado que $A^n\vec{p} = \lambda_p^n\vec{p}$, es evidente que $c(\vec{p}) = 0$ y, por tanto, no está claro el tipo de normalización necesario para obtener el vector de eficiencia en este caso. Un problema abierto es obtener una normalización apropiada que permita determinar $\vec{c}$ sin necesidad de conocer una base de Jordan de la matriz de partida. Tampoco es obvio que halla una solución modelo con la que comparar, como ocurre en el caso dominante con la determinada por el vector de proporciones asintóticas.

Observación 2. Como hemos comentado antes, cuando el valor propio principal no es geométricamente dominante la dinámica de la ecuación (7) puede llegar a complicarse enormemente. Si lo que ocurre es que hay valores propios complejos de norma λ_p, es posible todavía obtener alguna información puesto que las oscilaciones están bien estudiadas y se trata de tomar valor medio en un periodo. Cuando λ_p es geométricamente múltiple, cada vector propio asociado a λ_p puede tener una eficiencia diferente y parece difícil determinar a priori cual va a ser el comportamiento de un estado inicial.

4. Anexo: demostración del Lema 3.1 y del Teorema 3.1

Por simplicidad y, principalmente, por cuestiones de espacio, vamos a demostrar únicamente el caso $s = 2$. Sea $J =$ diag $(J_1, \ldots, J_r)$ una forma canónica de Jordan de la matriz A. Como $\dim(\ker\,(A - \lambda_p I)) = 1$ y la multiplicidad algebráica de λ_p es 2, hay un único bloque de Jordan asociado a este valor propio y tiene orden 2. Podemos suponer sin perdida de generalidad que es el primero, es decir, $J_1 = \lambda_p I + N_2$, siendo N_2 la matriz nilpotente de orden 2

$$N_s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces, $\frac{1}{n\lambda_p^n} A^n = P$ diag $(\frac{1}{n\lambda_p^n} J_1^n, \ldots, \frac{1}{n\lambda_p^n} J_r^n) P^{-1}$, para cierta matriz P no singular. Por (9), es evidente que $\frac{1}{n\lambda_p^n} J_i^n \to 0,\ n \to \infty$ para todo $i = 2, \ldots, k$, luego hemos de centrarnos únicamente en el primer bloque de Jordan. Se tiene

$$\frac{1}{n\lambda_p^n} J_1^n = \frac{1}{n}(I + \frac{1}{\lambda_p} N_2)^n = \frac{1}{n}(I + n\frac{1}{\lambda_p} N_2),$$

ya que $N_2^2 = 0$ y

$$\lim_n \frac{1}{n\lambda_p^n} J_1^n = \frac{1}{\lambda_p} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Fijado $\vec{v} \in \mathbb{R}$, se tiene entonces que, poniendo $P = (\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_k)$,

$$\lim_n \frac{1}{n\lambda_p^n} A^n \vec{v} = \frac{1}{\lambda_p} (\vec{0}, \vec{w}_1, \vec{0}, \ldots, \vec{0}) P^{-1} \vec{v},$$

pero si $\vec{v}$ tiene coordenadas $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ respecto de la base $\{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_k\}$, es claro que $P^{-1}\vec{v} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)^t$ y

$$\lim_n \frac{1}{n\lambda_p^n} A^n \vec{v} = \frac{\alpha_2}{\lambda_p} \vec{w}_1.$$

Basta tener en cuenta que, por construcción, $A\vec{w}_1 = \lambda_p \vec{w}_1$ para concluir la demostración del Lema 3.1.

En cuanto a la demostración del Teorema 3.1, también por construcción, se observa que $A\vec{w}_2 = \lambda_p \vec{w}_2 + \vec{w}_1$. Por tanto, fijado $\vec{z} \in$ ker $(A^t - \lambda_p I)$,

$$< \vec{z}, \vec{w}_1 > = < \vec{z}, A\vec{w}_2 - \lambda_p \vec{w}_2 > = < (A^t - \lambda_p I)\vec{z}, \vec{w}_2 > = 0.$$

Además, para cada $i \in \{3, \ldots, k\}$, $A^n \vec{w}_i$ está en el subespacio invariante generado por $\{\vec{w}_3, \ldots, \vec{w}_k\}$ y, por tanto,

$$\frac{1}{\lambda_p^n} A^n \vec{w}_i \to \vec{0}, \ n \to \infty, \tag{16}$$

con lo que $< \vec{z}, \vec{w}_i >= 0, \ i \in \{3, \ldots, k\}$ y $\vec{z}$ es ortogonal al subespacio generado por $\{\vec{w}_1, \vec{w}_3, \ldots, \vec{w}_k\}$.

Por otra parte, como $\vec{w}_1 \in \ \ker\,(A - \lambda_p I), \ < \vec{c}, \vec{w}_1 >= 0$ y teniendo en cuenta (16) y la definición de eficiencia, es evidente que $< \vec{c}, \vec{w}_i >= 0, \ i \in \{3, \ldots, k\}$, con lo que $\vec{c}$ es también ortogonal al subespacio generado por $\{\vec{w}_1, \vec{w}_3, \ldots, \vec{w}_k\}$ y los vectores $\vec{c}$ y $\vec{z}$ han de ser colineales, lo que permite concluir la demostración.

Agradecimientos

Los autores agradecen la financiación del proyecto D.G.I. MTM2008-02502, Ministerio de Educación y Cultura.

Referencias

[1] H. Anton, C. Rorres, *Elementary Linear Algebra with Applications*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1987.

[2] F. Brauer, C. Castillo-Chávez, *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*, Texts in Applied Mathematics, 40, Springer-Verlag New York, Inc., 2001.

[3] C. Meyer, *Matrix analysis and applied linear algebra*, SIAM, 2000.

[4] O. Perron, Zur Theorie der Matrices, *Mathematische Annalen* **64 (2)** (1907), 248–263.

Florentino García Santos: In Memoriam
Universidad de Granada, 2011, págs. 23–34

Conversando sobre hélices y recordando a Floro

Manuel Barros • Ángel Ferrández

Resumen Traemos a la memoria un hecho real, donde aparece Floro resolviendo un problema de caracterización de hélices, para mostrar y encontrar la solución a idéntico problema en el contexto de la Geometría de Lorentz, y evocar la figura de nuestro amigo en las tres facetas que con tanto acierto y valentía practicó: docencia, investigación y alta gestión.

1. El almuerzo de año nuevo

Angel Ferrández: Bueno chico, cincuenta y nueve tacos, el año que viene sesenta.

Manuel Barros: Cierto, pero a tí te faltan unos días para estar lo mismo que yo.

AF: ¿Qué tal lo llevas?

MB: Dentro de lo que cabe bien, pero tengo que reconocerte que desde esta mañana estoy un poco jodido. No se me va del coco el recuerdo de Floro. Él también hubiera cumplido hoy cincuenta y nueve.

AF: Por cierto, recuerdo nuestro primer año en el Departamento, el curso 1974-75, cuando llegaba Pepito Castellano hablando maravillas de un zamorano que venía de la Universidad de Salamanca para acabar la carrera de Matemáticas en Granada. Sin embargo, la primera vez que yo lo ví fue en un bar donde íbamos algunas veces, estaba en lo que hoy es la plaza Einstein, no recuerdo su nombre pero sí que lo llevaba un hombre, ya mayor, bajito y de pelo cano. Además, habitualmente, su mujer estaba en la cocina preparando las tapas.

MB: Sí hombre, el bar Modelo, el de Nicolás y Victoria.

AF: Allí estaba con dos amigos, creo que también estudiaron Matemáticas.

MB: Luis Blázquez, *el Rubio*, y Rafael Verguillo, *el Pollo*.

AF: El curso siguiente, 1975-76, fue cuando Martínez Naveira llegó a Granada. Recuerdo que se encargó de una asignatura que había en el quinto curso de la antigua licenciatura de Matemáticas, aquel plan que nosotros mismos estudiamos.

Manuel Barros, *mbarros@ugr.es*
Dep. Geometría y Topología, Facultad de Ciencias, Universidad de Granada, 18071-Granada
Ángel Ferrández, *aferr@um.es*
Departamento de Matemáticas, Universidad de Murcia, Campus de Espinardo, 30100-Murcia

La asignatura se llamaba Matemática Elemental II y en ella se explicaba Geometría Diferencial.

MB: Precisamente yo me hice cargo de dar las clases de problemas en ella. Entre los estudiantes se encontraba Florentino. Recuerdo que en una primera parte de la materia se impartió la teoría clásica de curvas y superficies.

AF: Siguiendo el libro de Vidal Abascal.

MB: Cierto, y además yo disponía de una colección de problemas escritos en unas fichas, las cuales me había proporcionado Naveira. Eran los problemas que se resolvían en la Universidad de Santiago.

AF: Me acuerdo de aquella colección de problemas.

MB: En una de aquellas clases tuve mi primer contacto matemático y directo con Florentino. A partir de entonces, y hasta la lectura de su tesis doctoral, no se interrumpió.

AF: ¿Cómo recuerdas a Florentino de estudiante?

MB: Te voy a contar algo que probablemente recordarán algunas de las personas que compartían con Florentino y conmigo mismo aquella clase de problemas. Sería el mes de octubre, ya entrado, de 1975. Había que resolver uno de los problemas de alguna de las fichas que Naveira traía desde Santiago. Se trataba del teorema clásico de Lancret.

AF: Ya, el que caracteriza las hélices, las hélices generales quiero decir, por la proporcionalidad entre sus invariantes geométricos, curvatura y torsión.

MB: En efecto, se sabe que una hélice general es una curva que forma un ángulo constante, tiene pendiente constante, con una dirección fija del plano, el eje de la hélice.

AF: Pero eso es equivalente a que la torsión, τ, y la curvatura, κ, de dicha curva verifiquen una relación de proporcionalidad del siguiente tipo

$$\frac{\tau}{\kappa} = \cot \omega,$$

donde ω es el ángulo constante que forma con su eje.

MB: Cierto, y la cuestión es que Florentino se presentó voluntariamente para resolver en la pizarra esta equivalencia.

AF: Y ¿cómo fue la cosa?

MB: La resolución de Florentino fue rotunda, rigurosa y perfecta. En cualquier caso, fue incontestable por la manera de exponerla, llena de fuerza, convencimiento e ímpetu. Cuando hubo acabado siguió el silencio y creo que nos faltó muy poco para aplaudir. Aquel octubre de 1975 descubrí que Floro era un todo terreno de la matemática.

AF: Oye ¿qué te parece si, aprovechando esta anécdota, escribimos sobre hélices, para recordar a Floro?

MB: Me gusta la idea ¿quizá sobre alguna extensión de la idea de hélice?

AF: Si te parece, podemos hablar de hélices en la esfera para poder invitar a la fiesta a las estructuras helicoidales cerradas, ya sabes en el sentido de tu artículo en los Proceedings de la AMS. También podríamos tomar la autopista variacional para ver a las hélices como puntos críticos de acciones relacionadas con las teorías de partículas, justo en el sentido de nuestro reciente artículo en el Journal of Mathematical Physics.

MB: Yo pienso que deberíamos tomar un camino que fuese más asequible, menos técnico, que involucre maquinaria menos sofisticada. Hay que tratar de llegar al recuerdo de Floro acompañados del mayor número posible de personas que también le querían y admiraban.

AF: Entonces, si te parece, podemos coger la vertiente relativista. Ver a las estructuras helicoidales, a las hélices, en el mismo espacio $\mathbb{R}^3$, pero cambiando la métrica Euclidea por otra con interés en Física, en Teoría de la Relatividad, por la métrica de Lorentz-Minkowski. Ya sabes que el espacio es el mismo $\mathbb{R}^3$. Este espacio, con la métrica Euclidea, se representa por $\mathbb{E}^3$, mientras que el mismo espacio con la métrica de Lorentz-Minkoski se representa por $\mathbb{L}^3$. Es decir

$$\mathbb{E}^3 = (\mathbb{R}^3, dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

$$\mathbb{L}^3 = (\mathbb{R}^3, dx^2 + dy^2 - dz^2).$$

MB: Ya, tú lo que quieres es verme otra vez a vueltas con los B-scrolls. Ya sabes que me convenciste de su interés hace tiempo. Bueno, dejando al lado las bromas, me parece que has tenido una gran idea.

2. La sobremesa con café, copa y Lorentz-Minkowski

MB: Vamos a ver, la idea de ángulo en $\mathbb{E}^3$ es clara y también es manifiesto su protagonismo en la definición de hélice general. Para proceder con la idea de hélice general en $\mathbb{L}^3$, podríamos comenzar considerando la de ángulo hiperbólico.

AF: Puede ser, pero aunque tratemos con curvas no luminosas, evitaríamos una situación esencial en $\mathbb{L}^3$, cual es la posibilidad de hélices con eje luminoso.

MB: Tienes razón, entonces deberíamos ver a las hélices generales en $\mathbb{L}^3$ de otra manera diferente para no involucrar la idea de ángulo, aunque obviamente equivalente.

AF: Date cuenta que una curva, $\gamma(s)$, parametrizada por su arco en $\mathbb{E}^3$ es una hélice general si y sólamente si su indicatriz tangente $T(s) = \gamma'(s)$ está toda ella contenida en un plano, Π, de $\mathbb{E}^3$, precisamente ortogonal con su eje.

MB: Bueno, esto puede funcionar como definición de hélice general en $\mathbb{L}^3$. Si tienes una curva, $\gamma(s)$, en $\mathbb{L}^3$ que no sea tangente en ningún punto al cono de luz, lo que equivale a que en cada uno de sus trozos conexos tengas

$$\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle > 0 \qquad \text{curva espacial, o}$$

$$\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle < 0 \qquad \text{curva temporal,}$$

entonces puedes definir su indicatriz tangente (tangente unitario) por $T(s) = \gamma'(s)$.

AF: Claro, y además observa que esta indicatriz vive en el hiperboloide de una hoja cuando la curva es espacial, mientras que lo hace en el de dos hojas si es temporal

$$T(s) \in \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 - z^2 = 1\} \qquad \text{caso espacial,}$$

$$T(s) \in \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 - z^2 = -1\} \qquad \text{caso temporal.}$$

MB: Ahora está claro, entenderemos que $\gamma(s)$ es una hélice general en $\mathbb{L}^3$ cuando su indicatriz tangente esté dentro de un plano, Π, y por tanto en una sección plana de uno de los dos hiperboloides anteriores dependiendo de su carácter causal. Así, escribiendo $T(s) = \gamma'(s) = (x'(s), y'(s), z'(s))$, se tiene que

$$a \cdot x'(s) + b \cdot y'(s) + c \cdot z'(s) = \text{constante} \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$

AF: Fíjate en que esta ecuación la puedes escribir, usando el producto escalar en $\mathbb{L}^3$, del siguiente modo

$$\langle \gamma'(s), \vec{v} \rangle = \text{constante} \qquad \vec{v} = (a, b, -c)$$

y si ahora derivas con respecto al parámetro de la curva, obtienes

$$\langle \gamma''(s), \vec{v} \rangle = 0$$

es decir, la existencia, sobre cualquier hélice general, de un vector distinto de cero $\vec{v} \in \mathbb{L}^3$, el cual es ortogonal a la aceleración de la curva. Además, es evidente que esta propiedad caracteriza a las hélices generales de $\mathbb{L}^3$. De manera que la recta L generada por este vector funciona como una especie de eje para la correspondiente hélice.

MB: Pero claro, en contraste a lo que ocurre en $\mathbb{E}^3$ donde la forma cuadrática asociada con la métrica es definida positiva, ahora, en $\mathbb{L}^3$ los vectores se comportan, esencialmente, de dos maneras cualitativamente muy distintas frente a la correspondiente forma cuadrática

- Vectores espaciales y temporales $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle > 0$ y $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle < 0$, respectivamente
- Vectores luminosos $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0$, con $\vec{x} \neq \vec{0}$,

lo que da lugar a, lo que a priori proporciona dos grandes familias o clases de hélices generales en $\mathbb{L}^3$. Las que tienen su eje espacial o temporal, que podríamos llamar **hélices no degeneradas**, y las que su eje es luminoso, que llamaremos **hélices degeneradas**.

AF: No obstante, a pesar de este significativo contraste entre las hélices de $\mathbb{E}^3$ y $\mathbb{L}^3$, cuando uno trata de resolver en $\mathbb{L}^3$ el resultado de Lancret, aquel que Florentino resolvió para hélices euclídeas en una clase de problemas allá por octubre de 1975, uno obtiene un resultado similar al euclídeo. Las hélices de $\mathbb{L}^3$ están caracterizadas por la proporcionalidad entre curvatura y torsión

$$\tau = r \cdot \kappa, \qquad r = \text{constante}.$$

Dentro de esta caracterización, de este resultado tipo Lancret, las hélices degeneradas vienen caracterizadas por la relación

$$\tau = \pm\kappa.$$

MB: Pienso que deberíamos profundizar más en la geometría de las hélices de $\mathbb{L}^3$, enfatizando, esencialmente, en las diferencias que presenta su estudio con respecto al caso de las hélices euclídeas.

AF: Sí, me parece bien, pero antes quiero proponerte tres cosas. La primera, que sólo depende de nosotros, es que empecemos hablando sobre la geometría de las hélices euclídeas. Las otras dos propuestas dependen del camarero, pidámosle que nos cambie el mantel para poder seguir haciendo garabatos y, aprovechando el estreno del nuevo papel, pidamos otra copa.

MB: ¿Qué tal unas cañas con unas tapas de jamón para amenizar la charla?

AF: ¡Fantástico!

3. Jamón para resolver las ecuaciones naturales de las hélices euclídeas

MB: En el curso 1978-79 Florentino ya llevaba un par de cursos en el Departamento. El primero de enero de 1979, hoy hace 32 años, yo me marchaba para Estados Unidos a realizar un estancia de larga duración y algunos compañeros del Departamento, entre ellos Florentino, se encargaron de sustituirme en las asignaturas que yo había iniciado en octubre. Como puedes imaginar, durante una buena temporada previa a mi partida, todas las reuniones del grupo de Geometría Diferencial, que no eran pocas, tanto en el Departamento como en los sitios habituales (el Modelo, el Patio Andaluz, la Cueva, el Da Vinci, el Barrón,...), eran monográficas. Recuerdo que en una de ellas estaba conversando con Florentino sobre el temario de la Geometría III, dedicada a la teoría de curvas y superficies. Seguramente, en el primer trimestre yo ya les habría explicado la teoría de curvas y, probablemente, hablaría con Florentino sobre los contenidos desarrollados incluyendo la notación usada. En ese sentido, es muy posible que platicáramos sobre el teorema fundamental de la teoría de curvas y también del problema relativo a la resolución de las ecuaciones naturales para curvas.

AF: Yo creo que los profesores universitarios de Matemáticas tenemos, entre otros, el reto de hacer ver a los estudiantes la existencia de estrechas relaciones entre las distintas materias que impartimos. No puede ser que se produzca la sensación, entre los estudiantes, de que el Álgebra, el Análisis, la Geometría parezcan parcelas cerradas y aisladas de la matemática. En esta dirección, los geómetras, sobre todo los que explicamos Geometría Diferencial, tenemos ventaja. Los dos problemas que acabas de citar son dos buenos ejemplos que lo ilustran.

- El teorema fundamental de la teoría de curvas en $\mathbb{E}^3$ proporciona una bella correspondencia uno a uno, una biyección, entre dos conjuntos. Uno de naturaleza geométrica, el de las clases de congruencias de curvas, en el espacio $\mathbb{E}^3$, recorridas a velocidad uno; el otro, de naturaleza analítica, el de parejas de funciones reales, una de ellas positiva, de una variable. Esta biyección se consigue a través del teorema de existencia y unicidad de sistemas de ecuaciones diferenciales traducido o aplicado a las ecuaciones naturales para curvas. Dadas dos funciones diferenciables, κ y τ, reales en una variable y siendo la primera positiva, entonces existe (suprayectividad) una curva, única salvo movimientos rígidos de $\mathbb{E}^3$ (inyectividad), con curvatura κ y torsión τ.
- Naturalmente, a pesar del resultado anterior, no tenemos garantizada la integración explícita de las ecuaciones naturales para curvas. Para decirlo de una manera directa, imagina que te dan dos funciones, κ y τ, reales de una variable, el problema de encontrar explícitamente la curva, única salvo congruencias, que las admita como curvatura y torsión, en general no está resuelto. No existe, al menos no se conoce, ningún procedimiento, ni argumento, ni algoritmo que permita resolver, en general, las ecuaciones naturales para curvas en $\mathbb{E}^3$.

MB: Es casi seguro que en aquella conversación, mantenida a finales de 1978, con Florentino, habláramos de estos problemas, así como de la posibilidad de obtener la resolución del segundo para algunas clases de curvas. Probablemente tratáramos sobre la resolución del problema en el caso de curvas planas. Éstas, recorridas a velocidad constante (uno), están completamente determinadas, salvo movimientos en el plano, por una única función, su curvatura. Integrándola, se obtiene el ángulo que forma la indicatriz tangente (tangente unitaria) con una dirección fija del plano y así sus coordenadas en una base ortonormal que incluya a dicha dirección. Se vuelve a integrar para obtener la curva, salvo movimientos. De modo que las ecuaciones naturales para curvas planas pueden ser resueltas por cuadraturas. También se conoce que, para casos muy particulares de funciones, las ecuaciones naturales se pueden reducir a ecuaciones diferenciales de Riccati. Estoy convencido de que en aquella ocasión tratamos sobre el problema de la resolución de las ecuaciones naturales para las hélices generales.

AF: Claro, estas curvas forman una familia típica para la que se pueden resolver las ecuaciones naturales, recuperar una hélice a partir de su curvatura y su torsión.

A gran escala, si para las hélices las dos funciones, curvatura y torsión, se reducen salvo una constante, la pendiente, a una, entonces ocurre algo parecido a lo de las curvas planas. La conclusión es que uno puede realizar una integración geométrica, incluyendo cuadraturas, de las ecuaciones naturales para las hélices. La esencia de este fenómeno es la siguiente: todo el mundo conoce que una hélice circular, esto es, una curva en $\mathbb{E}^3$ con torsión y curvatura constantes, tiene la suerte de vivir enrollada en un cilindro circular recto y, además, es una geodésica del mismo. De manera que las hélices circulares en $\mathbb{E}^3$ son la misma cosa que las geodésicas de los cilindros circulares rectos de $\mathbb{E}^3$.

MB: Por otro lado, todos hemos visto estructuras helicoidales, hélices en la naturaleza, que siguen teniendo la suerte de vivir enrolladas en ciertas superficies (plantas trepadoras, cuernos y colmillos de animales, bacterias, virus, estructuras de proteínas...) de manera que podría ser que la capacidad de enrollarse no fuese una cualidad exclusiva de las hélices circulares. Así, te propongo el siguiente experimento. Tomemos una curva parametrizada por su arco, o recorrida a velocidad uno, $\delta(s)$ con $s \in \mathbb{R}$, que esté contenida en un plano Π de $\mathbb{E}^3$ y sea $\vec{\xi}$ un vector unitario perpendicular a dicho plano. Trasladando la curva en la dirección del vector obtenemos el cilindro recto con directriz (o sección) la curva δ y generatrices rectas paralelas a $\vec{\xi}$, es decir

$$\mathbf{C}(\delta, \vec{\xi}) = \{\delta(s) + t\,\vec{\xi}\ :\ s, t \in \mathbb{R}\}.$$

Se trata de una superficie llana, ya que su curvatura de Gauss se anula idénticamente. Por lo que sus geodésicas se obtienen como imágenes de las rectas del plano por la siguiente aplicación (recubrimiento Riemanniano)

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbf{C}(\delta, \vec{\xi}) \qquad \Phi(s,t) = \delta(s) + t\,\vec{\xi}.$$

Tomando una de ellas, lo cual significa elegir una pendiente, θ, la que forma la recta con el plano,

$$\gamma_\theta(u) = \Phi(u.\sin\theta, u.\cos\theta),$$

ahora puedes calcular la curvatura y la torsión de esta curva en $\mathbb{E}^3$. Si representas por ρ a la curvatura de la directriz δ, en el plano Π obtienes

$$\kappa = (\sin^2\theta)\,\rho \qquad \tau = (\sin\theta\,\cos\theta)\,\rho.$$

Entonces

$$\frac{\tau}{\kappa} = \cot\theta \qquad \text{y.......} \quad \textbf{¡bingo!}$$

obtienes que las geodésicas de los cilindros rectos sobre curvas planas son hélices generales en $\mathbb{E}^3$

AF: Lo que redondea esta faena es que el recorrido que has hecho tiene retorno, aquí los pájaros no se comieron las migas de pan. Fíjate, si te dan una hélice general,

$\gamma(s)$, en $\mathbb{E}^3$, entonces su curvatura y su torsión satisfacen

$$\frac{\tau_\gamma}{\kappa_\gamma} = r,$$

y a partir de aquí puedes calcular θ mediante $\cot\theta = r$ y después la función $\rho = \frac{\kappa}{\sin^2\theta}$, así que tienes el siguiente algoritmo

- En un plano Π tomas una curva, parametrizada por su arco, cuya función curvatura sea ρ. Ésto, como sabes, lo puedes hacer mediante cuadraturas.
- A continuación consideras el cilindro recto cuya directriz es la curva $\delta(s)$ y con generatrices perpendiculares a Π
- En este cilindro tomas la geodésica, α, con pendiente θ, obtienes así una curva, hélice general, cuyas curvatura y torsión coinciden con las de la hélice general dada. La unicidad en el teorema fundamental de la teoría de curvas garantiza que las dos hélices se pueden superponer mediante movimientos rígidos de $\mathbb{E}^3$, son congruentes.

Tienes que convenir conmigo que este argumento proporciona un elegante procedimiento geométrico para resolver las ecuaciones naturales para hélices Euclideas.

MB: Sí, y al mismo tiempo un ejemplo más de la profunda conexión que existe entre la Geometría Diferencial y las Ecuaciones Diferenciales. A propósito de diferenciabilidad, si nos vamos a meter en el berenjenal de la hélices en $\mathbb{L}^3$, y teniendo en cuenta la dualidad hora-estómago, no estaría de más que pidiéramos una cenita **suave**.

AF: Otra vez estamos de acuerdo.

4. Una cena ligera para resolver las ecuaciones naturales de las hélices en $\mathbb{L}^3$

AF: Para comenzar el estudio de las hélices no degeneradas en $\mathbb{L}^3$, podríamos mimetizar el experimento realizado anteriormente en $\mathbb{E}^3$. Quiero decir, puedes considerar un plano, Π, no degenerado (euclídeo o lorentziano), entonces tomas una curva, $\delta(s)$, no nula, es decir, que su vector tangente no sea luminoso en todos sus puntos (que nunca sea tangente al cono de luz). En esas condiciones cabe la posibilidad de considerar el cilindro recto cuya directriz es la curva dada y generatrices ortogonales al plano Π. Obtienes así una superficie llana que es siempre de Lorentz cuando el plano Π sea euclídeo, mientras que es de Riemann o de Lorentz según que la curva $\delta(s)$ sea espacial o temporal en el plano lorentziano Π.

MB: Eso está bien y no es caro, formalmente tenemos un zoo de cilindros similar al de los cilindros euclídeos, aunque ahora aparecen de dos tipos: riemannianos y lorentzianos, según dicten los caracteres causales de la directriz y de la generatriz elegidas.

AF: Claro, ahora puedes diseñar un experimento paralelo al realizado en $\mathbb{E}^3$. Empiezas tomando una geodésica, no nula, de cualquiera de los cilindros construídos, no importa que sea riemanniano o lorentziano. Entonces calculas su curvatura y su torsión en $\mathbb{L}^3$ y vuelves a cantar bingo, quiero decir que ambas son proporcionales y por lo tanto se trata de una hélice no degenerada en $\mathbb{L}^3$. Ahora continúas sorprendiéndote, pues el camino inverso sigue siendo posible: toda hélice no degenerada en $\mathbb{L}^3$ la puedes ver como una geodésica no nula de un cilindro con directriz no nula. Acabas comprendiendo que hélices no degeneradas en $\mathbb{L}^3$ y geodésicas no nulas de cilindros rectos sobre curvas planas no nulas son la misma cosa.

MB: Excelente, aunque demasiado similar al caso euclídeo. Para concluir con resultados drásticamente diferentes, para obtener diferencias esenciales entre las teorías de las hélices en $\mathbb{E}^3$ y en $\mathbb{L}^3$, parece obvio que tenemos que considerar ideas naturales en $\mathbb{L}^3$ que simultáneamente sean imposibles en $\mathbb{E}^3$. En resumen, investigar las hélices degeneradas en $\mathbb{L}^3$. Es el momento de invitar a nuestra cena a los **B-scrolls**.

AF: Estas superficies, hasta donde yo sé, fueron introducidas por L.Graves, discípulo de K.Nomizu, en su tesis doctoral publicada en los Transactions de la AMS en el año 1979. Desde entonces han jugado un papel fundamental, como sabes, para entender la geometría de $\mathbb{L}^3$.

MB: Sí que lo sé, aunque tuviera que pasar algún tiempo, justo el que gasté en probar algún resultado, para convencerme. Hoy reconozco que proporcionan una estructura necesaria para entender $\mathbb{L}^3$. Estas superficies son lorentzianas y tienen la suerte de estar generadas por curvas luminosas.

AF: Empiezas con una curva luminosa, $\alpha(s)$, en el espacio $\mathbb{L}^3$, lo que implica que su tangente $A(s) = \alpha'(s)$ está en el cono de luz en cada instante y así $\langle A(s), A(s)\rangle = 0$. Recordarás que para este tipo de curvas se puede tomar una referencia que juegua un papel parecido al de la referencia de Frenet en las curvas clásicas. Ahora se llama referencia de Cartan a lo largo de α y es de la forma $\{A, B, C\}$, siendo A y B vectores nulos y C espacial, es decir, $\langle A, A\rangle = 0$, $\langle B, B\rangle = 0$ y $\langle C, C\rangle = 1$. Además, $\langle A, B\rangle = -1$, $\langle A, C\rangle = \langle B, C\rangle = 0$ y las ecuaciones que se corresponderían con las de Frenet se escriben ahora de la forma

$$\begin{array}{rcl} A' & = & f\,C, \\ B' & = & a\,C, \\ C' & = & a\,A + f\,B, \end{array}$$

donde f es una función a lo largo de α y a una constante no nula. En estas condiciones, puedes considerar, la superficie reglada $S_{\alpha,B}$ parametrizada por $X(s,t) = \alpha(s) + t\,B(s)$. Esto es lo que se llama B-scroll sobre la curva α. La curvatura de Gauss de esta superficie es constante y se anula si, y sólo si, $a = 0$. En este caso, de B-scroll llano, observa que nos hemos colocado en una situación análoga al caso Euclídeo, es decir, que hemos construído una especie de cilindro sobre α.

MB: Perfecto, mi "cilindro" se corresponde con el caso en que la dirección B es paralela a lo largo de la curva α, lo que es equivalente a que ésta sea una cúbica nula (o luminosa) generalizada. Si tomas una geodésica no nula (no luminosa) $\gamma(u) = \alpha(s(u)) + t(u)B(s(u))$ de $S_{\alpha,B}$, entonces puedes usar el campo traslacional $\hat{B}$ en $\mathbb{L}^3$, determinado por B, que induce un campo de Killing, que seguiremos denotando por B, a lo largo de γ, de longitud constante, tal que $\langle \gamma'(u), B\rangle = -s'(u)$ es constante, ya que la geodésica γ es la imagen por X de una línea recta. Si ahora recordamos el teorema de Lancret, deducimos que γ es una hélice degenerada en $\mathbb{L}^3$.

AF: Me toca convencerte de que el recíproco también es cierto. Para ello tomas una hélice degenerada β que puedes parametrizar con velocidad constante, es decir, $\langle \beta', \beta'\rangle = c$ constante. El socorrido teorema de Lancret te dice que las funciones curvatura κ y torsión τ de β coinciden (cambiando la orientación si fuera necesario) y el campo aceleración de β es espacial. Si $\{T, N, B\}$ es la referencia de Frenet a lo largo de β, defines los siguientes campos

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \tfrac{|\beta'|}{2}(T + B) \\ \hat{B} &= -\tfrac{\varepsilon_1}{|\beta'|}(T - B) \\ \hat{C} &= N, \end{aligned}$$

donde ε_1 es el caracter causal de β y $|\beta'| = \sqrt{\varepsilon_1 c}$.

¿Qué te parece el procedimiento?

MB: No está mal, pues observo que el campo $\hat{A}$ es luminoso, así que tomaré α como una curva integral de $\hat{A}$. Además, he comprobado que el conjunto $\{\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}\}$ es una referencia de Cartan a lo largo de α, de manera que calculando $\hat{C}'$, y comparándolo con la expresión que hemos visto antes, deducimos que $a = 0$ y que $f = \kappa|\beta'|$. Ello me invita a considerar el $\hat{B}$-scroll llano $S_{\alpha,\hat{B}}$ parametrizado por $X(s,t) = \alpha(s) + t\,\hat{B}(s)$. Finalmente, basta elegir la geodésica γ de $S_{\alpha,\hat{B}}$ definida por $\gamma(s) = \alpha(s) + m\,s\,\hat{B}(s)$, donde $m = -c/2$. Un cálculo directo nos lleva a que γ y β tienen idénticas funciones curvatura y torsión, y el mismo carácter causal, así que no les queda más remedio que ser congruentes en $\mathbb{L}^3$.

AF: Claro, donde has usado la versión lorentziana, quiero decir en $\mathbb{L}^3$, del teorema fundamental de curvas. Por cierto, hace veinte minutos que entramos en el día dos.

5. Acabando con un brindis

AF: Manolo, yo creo que ha quedado meridianamente claro que trabajar en el mundo de Lorentz merece la pena siempre que las cosas que te encuentres no tengan su contrapartida en la geometría de Riemann. Dicho de otra manera, buscar lo nuevo que geométricamente puede aportar $\mathbb{L}^3$, en comparación con $\mathbb{E}^3$, y calibrar su importancia. Precisamente es lo que hemos pretendido en nuestra conversación sobre las hélices. La presencia de esa especie de "cilindros especiales" propios de $\mathbb{L}^3$, los B-scrolls, nos aporta esa frescura. Recuerdo que fue Alfonso Romero, en 1990 y con relación a problemas que estábamos considerando en la tesis de Pascual Lucas, el que me habló por primera vez de unos ejemplos muy novedosos y me insistió en que había que explotarlos. No lo dudamos y en apenas dos años, pudimos dar las gracias a Alfonso en un artículo en el Pacific Journal of Mathematics.

MB: Pasan ya los veinte años de aquello. Entonces yo seguía cómodo en la geometría de Riemann y reconozco que me incomodaba aquello de introducir "los epsilons" en las ecuaciones de Frenet, es decir, los caracteres causales de los campos tangente, normal y binormal a lo largo de una curva. Me resistía como gato panza arriba, hasta que tuvimos que buscar soluciones de la ecuación de Betchov-Da Rios en el espacio anti de Sitter y las encontramos mediante los B-scrolls. Fue en un artículo de los Comptes Rendues de 1995. Desde entonces, eso de trabajar con métricas indefinidas ya no me resulta tan agobiante, tanto es así que me habrás oído decir en público que "estoy enamorado del espacio anti de Sitter".

AF: A propósito, ¿sabes que el artículo que acabas de mencionar fue nuestra primera colaboración?

MB: Pues no lo recordaba. En cualquier caso, y desde entonces, habremos colaborado en aproximadamente doce o catorce artículos en revistas del JCR. Incluyendo, claro está, la etapa correspondiente a tu paso por el vicerrectorado.

AF: Cuatro años, desde 1998 hasta 2002. ¿Sabes que coincidí con Florentino, él vicerrector en Granada y yo en Murcia?

MB: Claro, Florentino fue vicerrector durante ocho años y unos meses, desde abril 1992 hasta noviembre de 2000. En todo caso, una parte de toda una vida dedicada a la Universidad.

AF: Créeme si te digo, y lo hago por experiencia, que son bastantes los que creen que la gestión universitaria es una actividad menor. Probablemente sin pensar, o sin querer reconocer, que para seguir investigando, para seguir enseñando, debe haber alguien cuya ocupación gestora proporcione a otros las mejores condiciones posibles para materializar las actividades investigadora y docente.

MB: Claro, lo que ocurre es que, paralelamente, pero en el otro sentido, no todos los que se dedican a la gestión universitaria entienden lo que has dicho. Para entenderlo, yo creo que, en primer lugar, tienes que saber lo que significa investigar y enseñar. Además, debes comprender que investigación y docencia constituyen los dos pilares necesarios para que exista la Universidad.

AF: Yo creo que lo que acabas de decir se puede ver como un resumen del perfil universitario de Florentino. De manera que, siendo un gran investigador y un excelente profesor, entendió y, lo que es más difícil, materializó su idea de hacer gestión universitaria siempre al servicio de la investigación y la docencia, al servicio de la Universidad.

MB: Mira Angel, como bien sabes, salvo algunos pocos años fuera de la Universidad de Granada, llevo aquí, en su Departamento de Geometría y Topología, desde 1974. Durante tanto tiempo, he vivido casi de todo. En mis primeros tiempos nuestra única dedicación, quiero decir la de los profesores, era justo la de hacer de profesores, enseñar de la mejor manera que podíamos. Después, pudimos aprender lo que era investigar gracias a la ayuda de personas como Martínez Naveira o Bang Yen Chen, pero aún así la gestión que se hacía en la Universidad estaba muy alejada y, ni mucho menos, facilitaba nuestra entonces recién estrenada actividad investigadora. Justo en aquella etapa, Florentino realizó su tesis doctoral. Yo no podría decir que desde entonces, seguramente sería desde mucho antes, probablemente por ser como era, Florentino inició su actividad de gestión en la Universidad de Granada. Eligió, de todos, el camino menos sencillo, pero la labor que se hizo desde entonces en mi Departamento, creo que en todos los Departamentos de esta Universidad, empezó a ser la de una Universidad moderna.

AF: Sí, yo creo que su actividad de gestión en la Universidad de Granada ha coincidido con la etapa en la que ésta ha despegado para convertirse en una Universidad moderna y con un excelente prestigio internacional.

MB: Para finalizar esta intensa entrada de año, te propongo, en reconocimiento de todo lo que Florentino nos ha enseñado, y en recuerdo de su continuo ejemplo como excelente universitario, un brindis con este magnífico y recio vino de Toro, provincia de Zamora, donde nació Floro.

AF y MB: ¡En memoria y recuerdo de Floro, nuestro amigo que se fue!

Florentino García Santos: In Memoriam
Universidad de Granada, 2011, págs. 35–42

Resultados recientes sobre estabilidad de ecuaciones diferenciales lineales periódicas

Antonio Cañada • Salvador Villegas

Dedicado a la memoria de nuestro querido amigo, profesor y colega Florentino García Santos.

Resumen Las ecuaciones diferenciales lineales periódicas modelan numerosos fenómenos en Física e Ingeniería. El estudio de sus propiedades de estabilidad es de gran interés tanto teórico como práctico. En este artículo presentamos algunos resultados recientes obtenidos por los autores para el caso escalar y para sistemas de ecuaciones. Los resultados usan de manera fundamental otros previos sobre desigualdades tipo Lyapunov, los cuales tienen interés en sí mismos, independientemente de sus aplicaciones a teoría de estabilidad.

1. Ecuaciones lineales periódicas

La ecuación de Hill

$$u''(t) + a(t)u(t) = 0, \ t \in \mathbb{R} \tag{17}$$

donde la función a satisface $a \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, es decir

$$a : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ \text{ es } T-\text{periódica y } \ a \in L^1(0, T), \tag{18}$$

modela numerosos fenómenos en Física e Ingeniería ([9]). En particular, el estudio de las propiedades de estabilidad de (17) es de gran interés, tanto teórico como práctico; teórico por las cuestiones que surgen y que están relacionadas con diferentes ramas de la Matemática (topología, geometría, análisis, etc.) y práctico porque el hecho de que la ecuación (17) sea estable tiene implicaciones importantes en las aplicaciones de la Matemática. Recordemos que la estabilidad, en el sentido de Lyapunov de (17), es equivalente a la acotación de las soluciones: cualquier solución $u(t)$ de (17) verifica

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left(|u(t)| + |u'(t)|\right) \in \mathbb{R}.$$

Antonio Cañada, *acanada@ugr.es*
Salvador Villegas, *svillega@ugr.es*
Dep. Análisis Matemático, Facultad de Ciencias, Universidad de Granada, 18071-Granada

Es bien conocido que la estabilidad de (17) depende de los multiplicadores característicos, los cuales se definen a partir de cualquier matriz fundamental. Este camino exige el conocimiento del conjunto de soluciones de (17).

A principios del siglo XX, Lyapunov [8] probó que si la función a satisface las condiciones

$$0 \prec a(t), \ \int_0^T a(t)\ dt \leq \frac{4}{T}, \tag{19}$$

entonces (17) es estable. Aquí, $0 \prec a(t)$ significa que $0 \leq a(t)$ c.p.d. en $(0,T)$ y que la desigualdad estricta se da en algún subconjunto de $(0,T)$ de medida positiva. Este resultado fue significativo por dos motivos: en primer lugar, las condiciones de Lyapunov (19) pueden comprobarse directamente a partir de la función a que aparece en (17). En segundo lugar, es óptimo en el sentido siguiente: dada cualquier constante $C > \frac{4}{T}$, existe alguna función a satisfaciendo (18), $0 \prec a(t)$ y $\int_0^T a(t)\ dt \leq C$, tal que la ecuación (17) es inestable.

Posteriormente, Borg ([1]) mejoró las condiciones de Lyapunov, demostrando que si a satisface

$$a \in L^1(0,T) \setminus \{0\}, \ 0 \leq \int_0^T a(t)\ dt, \quad \int_0^T |a(t)|\ dt \leq \frac{4}{T}, \tag{20}$$

entonces (17) es estable. Por último, Krein [7] demostró que la ecuación (17) es estable si la función función $|a(t)|$ en la expresión anterior se reemplaza por $a^+(t)$, donde $a^+(t)$ representa la parte positiva de la función $a(t)$.

Un resultado clave es que la estabilidad de la ecuación (17) puede determinarse (al menos desde el punto de vista teórico), usando las condiciones de contorno periódicas y antiperiódicas. En efecto, si consideramos la ecuación de Hill (17) como un caso particular de la ecuación paramétrica

$$u''(t) + (\mu + a(t))u(t) = 0, \ t \in \mathbb{R} \tag{21}$$

donde a satisface (18), entonces los valores del parámetro μ para los cuales (21) es estable pueden determinarse a partir de los valores propios del problema periódico y antiperiódico. De manera más precisa, si denotamos por

$$\lambda_0(a) < \lambda_1(a) \leq \lambda_2(a) < \ldots < \lambda_{2n-1}(a) \leq \lambda_{2n}(a) < \ldots \tag{22}$$

los valores propios del problema

$$u''(t) + (\lambda + a(t))u(t) = 0, \ t \in (0,T), \ u(0) - u(T) = u'(0) - u'(T) = 0 \tag{23}$$

y por

$$\tilde{\lambda}_1(a) \leq \tilde{\lambda}_2(a) < \ldots < \tilde{\lambda}_{2n-1}(a) \leq \tilde{\lambda}_{2n}(a) < \ldots \tag{24}$$

los valores propios del problema

$$u''(t) + (\lambda + a(t))u(t) = 0,\ t \in (0,T),\ u(0) + u(T) = u'(0) + u'(T) = 0 \quad (25)$$

es conocido ([5], [6], [9]) que

$$\lambda_0(a) < \tilde{\lambda}_1(a) \leq \tilde{\lambda}_2(a) < \lambda_1(a) \leq \lambda_2(a) < \tilde{\lambda}_3(a) \leq \tilde{\lambda}_4(a) < \lambda_3(a) \leq \dots \quad (26)$$

y que la ecuación (21) es estable (zona de estabilidad de orden n) si

$$\mu \in (\lambda_{2n}(a), \tilde{\lambda}_{2n+1}(a)) \ \cup \ (\tilde{\lambda}_{2n+2}(a), \lambda_{2n+1}(a)) \quad (27)$$

para algún $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, y que (21) es inestable si

$$\mu \in (-\infty, \lambda_0(a)] \ \cup \ (\lambda_{2n+1}(a), \lambda_{2n+2}(a)) \ \cup \ (\tilde{\lambda}_{2n+1}(a), \tilde{\lambda}_{2n+2}(a)) \quad (28)$$

para algún $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Observemos que en las condiciones (19) y (20) desempeña un papel fundamental el primer valor propio del problema periódico $\lambda_0(0) = 0$. Por otra parte, es claro que, en general, no es posible determinar explícitamente ni los valores propios del problema periódico (23) ni los del antiperiódico (25). Lo interesante es encontrar condiciones suficientes, comprobables de manera directa a partir de la función a dada en (17), que nos permitan afirmar que (17) es estable. En este sentido, a continuación presentamos algunos resultados novedosos sobre la zona de estabilidad de orden $n,\ n \geq 1$, de la ecuación de Hill (21). Están inspirados en aquellos obtenidos en [2]) para el caso de condiciones de contorno tipo Neumann. Trivialmente, pueden obtenerse resultados similares para el caso $n = 0$, que extienden el resultado citado con anterioridad de Lyapunov (sobre la zona de estabilidad de orden 0). Las demostraciones detalladas se pueden ver en [4].

Teorema 1.1. *Sea $a \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ satisfaciendo*

$$\begin{gathered} \exists\ p \in \mathbb{N},\ \exists\ k\ \in [\tfrac{p^2\pi^2}{T^2}, \tfrac{(p+1)^2\pi^2}{T^2}] : \\ k \leq a,\quad \|a\|_{L^1(0,T)} \leq kT + k^{1/2}2(p+1)\cot \tfrac{k^{1/2}T}{2(p+1)} \end{gathered} \quad (29)$$

Entonces $\mu = 0$ está en la zona de estabilidad de orden n de la ecuación de Hill (21).

Para la demostración, tengamos en cuenta que si $\frac{p^2\pi^2}{T^2} \equiv a$ ó $\frac{(p+1)^2\pi^2}{T^2} \equiv a$ ó $k \equiv a$, entonces (17) es trivialmente estable. Por tanto, podemos suponer

$$\begin{gathered} \exists\ p \in \mathbb{N},\ \exists\ k\ \in (\tfrac{p^2\pi^2}{T^2}, \tfrac{(p+1)^2\pi^2}{T^2}) : \\ k \prec a,\quad \|a\|_{L^1(0,T)} \leq kT + k^{1/2}2(p+1)\cot \tfrac{k^{1/2}T}{2(p+1)} \end{gathered} \quad (30)$$

Supongamos, por ejemplo, que $p = 2n,\ n \in \mathbb{N}$. Entonces $\lambda_{2n}(a) < \lambda_{2n}(\lambda_{2n-1}) = 0$. Por otra parte, usando algunos resultados previos sobre desigualdades tipo Lyapunov (véase [2], [4]), puede probarse que $\tilde{\lambda}_{2n+1}(a) > 0$. Como consecuencia, $\mu = 0 \in (\lambda_{2n}(a), \tilde{\lambda}_{2n+1}(a))$ y el teorema está probado. La demostración es similar si p es un número impar.

Nota 1.1. *El caso en el que $a(t) = \alpha + \beta\psi(t)$, con $\psi \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\int_0^T \psi(t)\ dt = 0$, $\int_0^T |\psi(t)|\ dt = 1/T$, fue estudiado por Borg ([1]). Borg usó los multiplicadores característicos determinados por la teoría de Floquet y dedujo criterios de estabilidad para (21) usando los parámetros α y β. Para una función concreta a, esto implica el uso de las cantidades*

$$\int_0^T a(t)\ dt, \quad \left\| a(\cdot) - \frac{1}{T}\int_0^T a(t)\ dt \right\|_{L^1(0,T)}$$

Es claro que los resultados del Teorema 1.1 son de una naturaleza diferente. De hecho, nuestro resultado es similar a aquellos obtenidos por Krein [7]. Krein supuso $k = \frac{p^2\pi^2}{T^2}$ y una desigualdad estricta para $\|a\|_{L^1(0,T)}$ en (29). Finalmente, si para una función dada $a \in L_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, sabemos que a satisface (30), entonces, el resultado dado en el Teorema 1.1 es más preciso que el de Krein, puesto que la función

$$kT + k^{1/2}2(p+1)\cot\frac{k^{1/2}T}{2(p+1)}, \ k \in \ [\frac{p^2\pi^2}{T^2}, \frac{(p+1)^2\pi^2}{T^2}]$$

es estrictamente creciente en la variable k.

2. Sistemas lineales periódicos

A pesar de su indudable interés, no hay muchos resultados sobre propiedades de estabilidad de sistemas lineales periódicos. En esta sección presentamos algunos novedosos sobre la propiedad de "establemente acotado" para sistemas lineales periódicos conservativos, los cuales extienden el resultado clásico de Lyapunov, mencionado en la primera sección de este artículo. De manera más precisa, consideramos sistemas del tipo

$$u''(t) + P(t)u(t) = 0,\ t \in \mathbb{R}, \tag{31}$$

donde desde ahora suponemos que la función matricial $P(\cdot) \in \Lambda$, y Λ se define como

[Λ] El conjunto de funciones reales matriciales $n \times n$, simétricas, $T-$periódicas y continuas $P(\cdot)$, tales que (31) no tiene soluciones constantes no triviales y

$$\int_0^T \langle P(t)k, k\rangle \; dt \geq 0, \; \forall \; k \in \mathbb{R}^n.$$

El sistema (31) se dice establemente acotado ([7]) si existe $\varepsilon(P) \in \mathbb{R}^+$, tal que todas las soluciones del sistema

$$u''(t) + Q(t)u(t) = 0, \; t \in \mathbb{R}, \tag{32}$$

están acotadas para cualquier función matricial $Q(\cdot) \in \Lambda$, que satisfaga

$$\max_{1\leq i,j\leq n} \int_0^T |p_{ij}(t) - q_{ij}(t)| \; dt < \varepsilon.$$

En [7], Krein probó que (31) es establemente acotadas si $\lambda_1 > 1$, donde λ_1 es el valor propio positivo más pequeño del problema de valores propios

$$u''(t) + \mu P(t)u(t) = 0, \; t \in \mathbb{R}, \; u(0) + u(T) = u'(0) + u'(T) = 0. \tag{33}$$

Además, λ_1 tiene una caracterización variacional dada por

$$\frac{1}{\lambda_1} = \max_{y\in G_T} \int_0^T \langle P(t)y(t), y(t)\rangle \; dt, \tag{34}$$

donde

$$G_T = \{y \in H^1(0,T) : y(0) + y(T) = 0, \; \sum_{i=1}^n \int_0^T (y_i'(t))^2 \; dt = 1\}. \tag{35}$$

Aquí $H^1(0,T)$ es el espacio de Sobolev usual.

Basándonos en estos resultados previos, podemos probar el Teorema siguiente (véase [3]).

Teorema 2.1. *Sea $P(\cdot) \in \Lambda$ tal que existe alguna matriz diagonal $B(t)$, continua y $T-$periódica, con entradas $b_{ii}(t)$, y $p_i \in [1,\infty], \; 1 \leq i \leq n$, satisfaciendo*

$$\begin{gathered} P(t) \leq B(t), \; \forall \; t \in \mathbb{R}, \\ \|b_{ii}^+\|_{p_i} < \beta_{p_i}^{ant}, \text{ si } p_i \in (1,\infty], \quad \|b_{ii}^+\|_{p_i} \leq \beta_{p_i}^{ant}, \text{ si } p_i = 1. \end{gathered} \tag{36}$$

Entonces el sistema (31) es establemente acotado. Aquí, $\|\cdot\|_{p_i}$ es la correspondiente norma en el espacio $L_{p_i}(0,T)$.

En el Teorema previo, la relación $C \leq D$ entre matrices $n \times n$ simétricas significa que la matriz $D - C$ es semidefinida positiva. Por otra parte, la constante $\beta_{p_i}^{ant}$ es la correspondiente constante de Lyapunov para el problema de contorno antiperiódico, definida en la sección segunda, fórmula (2.7), de [3].

Nota 2.1. *El Teorema previo es óptimo en el sentido siguiente: para cualesquiera números reales positivos dados $\gamma_i,\ 1 \leq i \leq n$, tales que al menos uno de ellos, digamos γ_j, satisface*

$$\gamma_j > \beta_{p_j}^{ant},\ \textit{para algún}\ p_j \in [1, \infty], \tag{37}$$

existe alguna matriz diagonal $P(\cdot) \in \Lambda$ con entradas $p_{ii}(t),\ 1 \leq i \leq n$, satisfaciendo $\|p_{ii}^+\|_{p_i} < \gamma_i,\ 1 \leq i \leq n$ y tal que el sistema (31) no es estable.

A continuación mostramos un ejemplo de aplicación del Teorema previo, donde las condiciones pueden comprobarse directamente usando los elementos p_{ij} de la matriz $P(t)$ (véase [3] para los detalles).

Ejemplo 2.1. *Sea $P(t)$ dada por*

$$P(t) = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{12}(t) & p_{22}(t) \end{pmatrix} \tag{38}$$

donde

$$p_{ij} \in C_T(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ 1 \leq i, j \leq 2,$$

[H1] $$p_{11}(t) \geq 0,\ p_{22}(t) \geq 0,\ \det\ P(t) \geq 0,\ \forall\ t \in \mathbb{R},$$

$$\det\ P(t) \neq 0,\ \text{para algún}\ t \in \mathbb{R}.$$

Aquí $C_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ denota el conjunto de funciones reales, continuas y $T-$periódicas definidas en $\mathbb{R}$. Además suponemos que existen $p_1, p_2 \in (1, \infty]$ tales que

$$\|p_{11}\|_{p_1} < \beta_{p_1}^{ant},\quad \|p_{22} + \frac{p_{12}^2}{\beta_{p_1}^{ant} - \|p_{11}\|_{p_1}}\|_{p_2} < \beta_{p_2}^{ant}. \tag{39}$$

Entonces (31) es establemente acotado.

Nota 2.2. *Observemos que de (39) podemos deducir*

$$\|p_{11}\|_{p_1} < \beta_{p_1}^{ant},\quad \|p_{22}\|_{p_2} < \beta_{p_2}^{ant}. \tag{40}$$

Como consecuencia, el sistema desacoplado

$$v''(t) + R(t)v(t) = 0, \ t \in \mathbb{R}, \tag{41}$$

donde

$$R(t) = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & 0 \\ 0 & p_{22}(t) \end{pmatrix} \tag{42}$$

es establemente acotado. Por tanto, usando la definición de sistema establemente acotado, podemos deducir trivialmente que (31) lo es, para cualquier función continua y $T-$*periódica* p_{12} *con norma* L_1 *suficientemente pequeña. Sin embargo, (39) no implica, necesariamente, que la norma* L_1 *de la función* p_{12} *sea necesariamente pequeña.*

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado en el marco del proyecto de investigación MTM2008.-00988, del Ministerio de Educación y Ciencia y del grupo de investigación FQM116, de la Junta de Andalucía.

Referencias

[1] G. Borg, On a Liapounoff criterion of stability, Amer. J. Math., **71** (1949), 67-70.

[2] A. Cañada, S. Villegas, Lyapunov inequalities for Neumann boundary conditions at higher eigenvalues, JEMS, J. European Mathematical Society, **12**, (2010), 163-178.

[3] A. Cañada, S. Villegas, Stability, resonance and Lyapunov inequalities for periodic conservative systems, Nonl. Anal., **74**, (2011), 1913-1925.

[4] A. Cañada, S. Villegas, Lyapunov inequalities for the periodic boundary value problem at higher eigenvalues, J. Math. Anal. Appl. **376**, (2011), 429-442.

[5] E.A. Coddington, N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations,* McGraw-Hill, 1955.

[6] J.K. Hale *Ordinary Differential Equations,* John Wiley and Sons Inc., 1969.

[7] M. G. Krein, On certain problems on the maximum and minimum of characteristic values and on the Lyapunov zones of stability, Prikl. Math. Mekh. **15, (1951)**, 323-348; Amer. Math. Soc. Transl., Ser 2, **1**, (1955), 163-187.

[8] M. A. Lyapunov, Problème général de la stabilité du mouvement,Ann. Fac. Sci. Univ. Tolouse Sci. Math. Sci. Phys. **(2) 9**, (1907), 203-474.

[9] W. Magnus y S. Winkler, *Hill's equation,* Dover, 1979.

Florentino García Santos: In Memoriam
Universidad de Granada, 2011, págs. 43–50

Equivalencia de sistemas de Pfaff en bandera y en dimensión cinco

María A. Cañadas-Pinedo • Ceferino Ruiz

1. Introducción

Uno de los temas que mayor interés despierta dentro de la investigación en sistemas de Pfaff es la búsqueda de modelos locales para dichos sistemas en dimensión 5. Este problema tiene su origen en una celebrada memoria de Élie Cartan: *Les systèmes de Pfaff à cinq variables et les équations aux dérivées partielles du seconde ordre* ([6]). Aunque este objetivo pueda parecer poco general por las restricciones impuestas por las dimensiones, lleva abierto desde 1910 y sólo se han conseguido soluciones parciales a pesar de que han sido numerosos los autores que han trabajado en el mismo, como por ejemplo Guillemin, Libermann, Sternberg, Gardner, Bryant, etc... Los trabajos de los autores de este artículo referenciados en la bibliografía constituyen la contribución de nuestra investigación sobre sistemas de Pfaff tanto en dimensión arbitraria como, en particular, en dimensión 5. Corresponden a los resultados obtenidos en la tesis del primer firmante bajo la dirección del segundo, y han dado lugar a varias publicaciones. En este pequeño homenaje a nuestro querido amigo y compañero Floro presentamos un breve resumen de algunas de las aportaciones más interesantes que hemos obtenido. Cabe destacar, como la más relevante, la introducción de una técnica de demostración que permite probar los resultados de forma intrínseca, y no utilizando coordenadas como es habitual en los trabajos relativos a sistemas de Pfaff.

2. Sistemas en bandera

Los resultados que presentamos en esta sección han sido demostrados mediante una técnica que permite obtener resultados de clasificación sin emplear coordenadas. Esta técnica se basa en el análisis de las relaciones de incidencia de un sistema de Pfaff y el sistema característico del primer sistema derivado y utiliza, como herramienta fundamental, un tensor que presentamos a continuación. Las demostraciones pueden

María A. Cañadas-Pinedo, *pinedo@uma.es*
Dep. Álgebra, Geometría y Topología, Universidad de Málaga, Apdo. 59, 29080-Málaga
Ceferino Ruiz, *ruiz@ugr.es*
Dep. Geometría y Topología, Facultad de Ciencias, Universidad de Granada, 18071-Granada

encontrarse en [3] y [4]. Otros trabajos en los que se estudian los sistemas en bandera y cuyos resultados hemos podido mejorar en varios casos son [7],[8] y [10].

Sea M una variedad diferenciable de clase C^∞ y dimensión finita n, que supondremos conexa, Haussdorf y segundo axioma de numerabilidad. Denotaremos por T y T^* los fibrados tangente y cotangente respectivamente. Para cualquier otro fibrado vectorial (E, π, M), $\Gamma(E)$ representará el módulo de las secciones globales y $\Gamma_\ell(E)$ el pre-haz de las secciones locales.

Un *sistema de Pfaff*, S, sobre M es un subfibrado vectorial localmente trivial de T^*. Así, si S tiene rango r, S está generado localmente por r formas de Pfaff linealmente independientes $\omega^1, ..., \omega^{\mathrm{r}} \in \Gamma_\ell(S)$. Para indicar que S está generado localmente por $\omega^1, ..., \omega^{\mathrm{r}}$ utilizaremos la notación $S = span\,\{\,\omega^1, ..., \omega^{\mathrm{r}}\,\}$, omitiendo, si no da lugar a confusión, el punto y el entorno del mismo considerados.

Dado un sistema de Pfaff S podemos asociar una distribución diferenciable: su anulador, $\Sigma = S^\perp$, es un subfibrado de T y se pueden identificar canónicamente $(T/\Sigma)^* \equiv S, (T^*/S) \equiv \Sigma^*$. $C(S)$ y Δ denotarán, respectivamente, el sistema característico y la distribución característica de S y supondremos todos los sistemas de clase constante.

Se define el *tensor de estructura* de un sistema de Pfaff S (ver [10])

$$\mathbf{k} : \Sigma \otimes S \longrightarrow \Sigma^* \equiv T^*/S$$

sobre secciones globales, $\xi \in \Gamma(\Sigma)$ y $\omega \in \Gamma(S)$ por $\mathbf{k}\,(\xi \otimes \omega) = (\mathbf{q} \circ \mathcal{L}_\xi)(\omega)$, donde $\mathbf{q} : T^* \longrightarrow T^*/S$ es el morfismo cociente, que, vía la identificación $\Sigma^* \equiv T^*/S$ no es más que la restricción de los elementos de T^* a Σ. Además, de la fórmula de Cartan, se tiene $\mathbf{k}\,(\xi \otimes \omega) = \mathbf{q}\,(i_\xi(d\omega))$ cualesquiera que sean $\xi \in \Gamma(\Sigma)\,, \omega \in \Gamma(S)$.

$\mathbf{k}$ es un morfismo de fibrados vectoriales. Este tensor es un invariante del sistema S que encierra toda la información relativa a la clase de S y permite determinar tanto el sistema característico de S como el primer sistema derivado.

En concreto, si en cada punto p de M consideramos el *subespacio característico* de S en p, $\Delta_p = \{\, v \in \Sigma_p \,/\, i_v d\omega \in S_p, \forall \omega \in \Gamma_\ell(S)\,\}$, se tiene

$$\Delta_p = \{\, v \in \Sigma_p \,/\, \mathbf{k}\,(v \otimes S_p) \;=\; \{0\}\}$$

esto es, Δ es el núcleo por la izquierda de $\mathbf{k}$ y, puesto que la integrabilidad de S es equivalente a $\Delta = \Sigma$, se pueden caracterizar los sistemas completamente integrables por medio de $\mathbf{k}$. El siguiente teorema resume algunas de las propiedades esenciales de $\mathbf{k}$:

Teorema 2.1. *Sea S un sistema de Pfaff y sea $\mathbf{k}$ el tensor de estructura.*

1. *El rango de $\mathbf{k}$ es constante si y sólo si la dimensión de Δ_p es constante. En este caso $C(S) \;=\; \mathbf{q}^{-1}(\,\mathbf{k}\,(\Sigma \otimes S))$ y $clase\,(S) = rang\,(\mathbf{k}) + rang\,(S)$.*

2. *S es completamente integrable si y sólo si $\mathbf{k} \equiv 0$.*

3. *El rango de* $\mathbf{k}$ *es siempre distinto de 1.*

Para cada $p \in M$ definimos $(S_1)_p = \{\omega \in S_p \,/\, \mathbf{k}(\xi \otimes \omega) = 0, \forall \xi \in \Sigma_p\}$. Cuando la dimensión de estos espacios es constante, el sistema de Pfaff S_1 así obtenido se llama, siguiendo a Élie Cartan, *el primer sistema derivado de* S. Notaremos $\Delta(S_1) = \Delta_1$ y $C(S_1) = C_1$ y $\mathbf{k}_1$ el tensor de estructura de S_1.

Por recurrencia se define $S_{\mathrm{i}+1} = (S_{\mathrm{i}})_1$ cuando S_{i} es de rango constante. En caso de que existan todos los sistemas derivados de un sistema de Pfaff S, esto es, cuando todos los S_{i} son de rango constante, se dice que S es un *sistema totalmente regular*. Así, para un sistema de Pfaff totalmente regular se obtiene una sucesión finita estrictamente decreciente, $S = S_0 \supset S_1 \supset \ldots \supset S_{\mathrm{i}} \supset S_{\mathrm{i}+1} \supset \ldots \supset S_{\mathrm{N}}$, cuyo último término es un sistema completamente integrable que puede ser trivial. El entero N, i.e., el menor entero tal que $S_{\mathrm{N}} = S_{\mathrm{N}+1}$ se llama la *longitud de derivados de S* o, simplemente, la *longitud de S*.

Cuando para cada $\mathrm{i} < \mathrm{N}$, $dim\,(S_{\mathrm{i}}/S_{\mathrm{i}+1}) = 1$, se dice S es un *sistema de Pfaff en bandera*. Si, además, $S_{\mathrm{N}} = \{0\}$ la *bandera* se dice *completa*. Hacemos notar que algunos autores (por ejemplo Bryant o Gardner [1]) utilizan el término bandera para referirse a la cadena de sistemas derivados. La terminología que se sigue en este trabajo es debida a P.Libermann (ver [11]).

Para cada sistema derivado, S_{i}, notaremos $\mathbf{k}_{\mathrm{i}}$ el correspondiente tensor de estructura.

Teorema 2.2. *Sea* S *un sistema de Pfaff con primer sistema derivado* S_1. *Entonces*

$$\mathbf{k}_1\,(\Sigma \otimes S_1) \subseteq S/S_1$$

El teorema 2.2 y el estudio de las relaciones de incidencia entre un sistema de Pfaff S y el sistema característico del primer sistema derivado S_1 permiten caracterizar los sistemas de Pfaff totalmente regulares con longitud de derivados uno, esto es, con primer sistema derivado integrable:

Teorema 2.3. *Sea* S *un sistema de Pfaff totalmente regular con longitud de derivados* N. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) $\mathrm{N} = 1$, *esto es,* S_1 *es completamente integrable.*

ii) $C_1 \cap S = S_1$

iii) $\mathbf{k}_1(\Sigma \otimes S_1) = \{0\}$

iv) $C_1 \cap S = C_1$

v) $\mathbf{k}_1(\Sigma \otimes S_1) = C_1/S_1$

vi) Para cada suplementario, $\widehat{\Sigma}$, *de* Σ *en* Σ_1, $\mathbf{k}_1(\widehat{\Sigma} \otimes S_1) = \{0\}$

vii) Existe un suplementario, $\widehat{\Sigma}$*, de* Σ *en* Σ_1*, tal que* $\mathbf{k}_1(\widehat{\Sigma} \otimes S_1) = \{0\}$

Obtenemos también una caracterización de los sistemas en bandera:

Teorema 2.4.

$$dim\,(S/S_1) = dim\,(S_1/S_2) = 1 \ si \ y \ solamente \ si \ rang\,(\mathbf{k}) = rang\,(\mathbf{k}_1) = 2$$

Por lo tanto, en este caso, S *y* S_1 *tienen clase constante igual a* $rang\,(S) + 2$ *y* $rang\,(S_1) + 2$ *respectivamente.*

Teorema 2.5. *Sea S un sistema de Pfaff totalmente regular, con longitud de derivados* $\mathrm{N} \geq 2$*.*

$$dim\,(S/S_2) = 2 \ si \ y \ solamente \ si \ dim\,(C/S) = dim\,(C_1/S_1) = 2$$

Corolario 2.1. *Si* S *es un sistema en bandera, con longitud de derivados* $\mathrm{N} \geq 2$*, entonces todos los sistemas derivados* S_{r}*,* $0 \leq \mathrm{r} \leq \mathrm{N}$*, tienen clase constante. La clase de* S_{N} *es igual a su rango y la de* S_{r}*,* $\mathrm{r} < \mathrm{N}$*, es igual a* $rang\,(S_{\mathrm{r}}) + 2$*.*

Recíprocamente, si S *es un sistema de Pfaff totalmente regular con longitud de derivados* $\mathrm{N} \geq 2$*, tal que* $rang\,(\mathbf{k}_{\mathrm{r}}) = 2$*, para todo* $\mathrm{r} < \mathrm{N}$*, entonces* S *es un sistema en bandera.*

3. Clasificación de sistemas de Pfaff en dimensión menor o igual a cinco.

Utilizando los resultados de la sección anterior es posible obtener, de una forma intrínseca, la clasificación completa de los sistemas de Pfaff en dimensión menor o igual que cuatro y la primera clasificación en dimensión cinco. Las demostraciones se pueden ver en [5] y [3].

El primer caso que no se obtiene directamente de los teoremas de Frobenius y Darboux corresponde a los sistemas de Pfaff de rango 2 en dimensión 4 y el invariante diferencial que proporciona la clasificación en este caso es la longitud de derivados.

Teorema 3.1. *Sea S un sistema de Pfaff de rango 2 en una variedad diferenciable de dimensión 4. Entonces, o S es completamente integrable o S tiene clase 4 y es un sistema en bandera, eventualmente no completa. Dos sistemas de Pfaff de rango 2 en dimensión 4 son localmente equivalentes si y sólo si tienen la misma longitud de derivados.*

El estudio más interesante corresponde a dimensión 5.

Teorema 3.2. *Sea S un sistema de Pfaff con* $rang\,(S) = 3$ *definido sobre una variedad diferenciable M con* $dim\,(M) = 5$*. Entonces o S es completamente integrable o el primer sistema derivado* S_1 *de S tiene codimensión uno en S.*

Teorema 3.3. *Sea S un sistema de Pfaff de rango* 2 *y sea* $\mathbf{k} : \Sigma \otimes S \longrightarrow T^*/S$ *el tensor de estructura de S. Si* $rang\,(\mathbf{k}) = 3$ (*i.e.,* $clase\,(S) = 5$), *entonces* $S_1 = \{0\}$.

El recíproco no es cierto en general. Sin embargo, cuando $dim\, M = 5$, como si, para un sistema de Pfaff S de rango dos, $rang\,(\mathbf{k}) \leq 2$, S es completamente integrable o S es un sistema en bandera, se deduce que si $S_1 = \{0\}$ entonces $rang\,(\mathbf{k}) = 3$. En consecuencia:

Teorema 3.4. *Sea S un sistema de Pfaff de rango* 2 *definido sobre una variedad diferenciable de dimensión* 5. *Entonces* $S_1 = \{0\}$ *si y sólo si* $rang\,(\mathbf{k}) = 3$ *, i.e., si y sólo si* $clase\,(S) = 5$.

La condición $rang\,(\mathbf{k}) = 3$ nos va a permitir asociar a un sistema de Pfaff S de rango dos en dimensión cinco un sistema de Pfaff $\widetilde{S}$ de rango tres, con $S \subset \widetilde{S}$. Si $\widetilde{S}$ tiene clase constante, entonces o $\widetilde{S}$ es completamente integrable o $\widetilde{S}_1 = S$. En el segundo caso $\widetilde{S}$ corresponde al caso general y es el sistema que Élie Cartan llama el *sistema covariante* del sistema S. La demostración se basa en los siguientes lemas:

Lema 3.1. *Sea S un sistema de Pfaff de rango* r *definido sobre una variedad diferenciable de dimensión finita* n, *con* $1 \leq \mathrm{r} \leq \mathrm{n} - 2$. *Si* $S_1 = \{0\}$ *entonces, dada* $\omega \in \Gamma_\ell(S)$, $\omega \neq 0$, *existen* ξ_1, $\xi_2 \in \Gamma_\ell(\Sigma)$ *tales que* $\mathbf{q}(i_{\xi_1} d\omega)$, $\mathbf{q}(i_{\xi_2} d\omega)$ *son linealmente independientes en C/S. En consecuencia,* $dim\,(\,\mathbf{k}\ (\Sigma \otimes S(\omega))) \geq 2$ *donde* $S(\omega) = span\,\{\omega\}$.

Lema 3.2. *Sea S un sistema de Pfaff de rango* 2 *sobre una variedad diferenciable de dimensión* 5 *y sea* $\omega \in \Gamma_\ell(S)$, $\omega \neq 0$. *Si* $rang\,(\mathbf{k}) = 3$ *entonces* $dim\,(\mathbf{k}\ (\Sigma \otimes S(\omega))) = 2$ *donde* $S(\omega) = span\,\{\omega\}$.

Lema 3.3. *Sea S un sistema de Pfaff de rango* 2 *definido sobre una variedad diferenciable de dimensión* 5. *Sean* ω^1 *y* ω^2 *generadores locales de S y* $S(\omega^{\mathrm{i}}) = span\,\{\omega^{\mathrm{i}}\}$, $\mathrm{i} = 1, 2$. *Si* $rang\,(\mathbf{k}) = 3$ *entonces* $dim\,\big(\mathbf{k}\,\big(\Sigma \otimes S(\omega^1)\big) \cap \mathbf{k}\,\big(\Sigma \otimes S(\omega^2)\big)\big) = 1$. *Además* $\alpha \in \mathbf{q}^{-1}\,\big(\mathbf{k}\,\big(\Sigma \otimes S(\omega^1)\big) \cap \mathbf{k}\,\big(\Sigma \otimes S(\omega^2)\big)\big)$ *si y sólo si cualquiera que sea* $\omega \in \Gamma_\ell(S)$,$\alpha \wedge d\omega \equiv 0 \quad mod\, S$.

Teorema 3.5. *Sobre una variedad diferenciable de dimensión* 5 *a todo sistema de Pfaff S de rango* 2 *con* $rang\,(\mathbf{k}) = 3$ *se puede asociar un único sistema de Pfaff* $\widetilde{S}$ *de rango* 3 *con la condición* $S \subseteq \widetilde{S}_1$. *Además, si* $\widetilde{S}$ *tiene clase constante, o* $\widetilde{S}$ *es completamente integrable o* $\widetilde{S}_1 = S$

Siguiendo a Élie Cartan ([6]) llamaremos a $\widetilde{S}$ el *sistema covariante* del sistema S.

Cuando el sistema covariante $\widetilde{S}$ no es completamente integrable, su primer sistema derivado es el sistema S. Puesto que $\widetilde{S}_2 = \{0\}$, $\widetilde{S}$ es un sistema de Pfaff de rango tres en dimensión cinco correspondiente al *caso general*. Por tanto

Teorema 3.6. *Sobre una variedad de dimensión* 5 *existe una correspondencia biunívoca entre sistemas de Pfaff,* $\widetilde{S}$*, de rango tres cuyo segundo sistema derivado es trivial, y sistemas de Pfaff* S *de rango dos y clase* 5 *cuyo sistema covariante no es completamente integrable. Esto es:*

1. *Si* $\widetilde{S}$ *es un sistema de rango* 3 *con* $\widetilde{S}_2 = \{0\}$*, entonces* $\widetilde{S}_1$ *es un sistema de rango* 2 *y clase* 5 *cuyo sistema covariante es* $\widetilde{S}$*.*

2. *Si* S *es un sistema de rango* 2 *y clase* 5 *cuyo sistema covariante* $\widetilde{S}$ *no es completamente integrable, entonces* $\widetilde{S}_1 = S$ *y* $\widetilde{S}_2 = \{0\}$*.*

En consecuencia, y supuestos todos los sistemas de clase constante, en dimensión cinco, la clasificación, en el *caso general*, esto es, en el caso al que se refiere el teorema 3.6, de los sistemas de rango dos es equivalente a la de los sistemas de rango tres. En palabras de Élie Cartan:

Dans ce cas général, il y a correspondance univoque entre les deux systèmes covariants

$$\begin{matrix} \omega_1 = 0, \\ \omega_2 = 0 \end{matrix} \quad et \quad \begin{matrix} \omega_1 = 0, \\ \omega_2 = 0, \\ \omega_3 = 0. \end{matrix}$$

Nos ocuparemos en la siguiente sección del *caso general*.

Para ver en detalle los modelos locales consúltese [6], [3], [5], [9], [10].

4. Reducción del grupo estructural

S.Sternberg, en su libro *Lectures on Differential Geometry* ([12]), desarrolla una técnica de reducción para G-estructuras que aplica, en particular, a las distribuciones diferenciables en variedades de dimensión cinco.

En efecto, los sistemas de Pfaff son un caso particular de G-estructuras. Consideremos V_1 un subespacio de dimensión k de V, donde V es un espacio vectorial de dimensión finita n, y sea G el subgrupo de $GL(V)$ formado por todas las transformaciones lineales de V que dejan invariante el subespacio V_1. Consideremos la G-estructura, B_G, con grupo de estructura G. Sea $\boldsymbol{p} \in B_G$ y $p = \pi(\boldsymbol{p})$. Consideremos el subespacio Σ_p de T_pM definido por $\Sigma_p = \boldsymbol{p}(V_1)$. Como, cualquiera que sea $a \in G$, $\boldsymbol{p}a(V_1) = \boldsymbol{p}(aV_1) = \boldsymbol{p}(V_1)$, Σ_p no depende de la elección de $\boldsymbol{p} \in \pi^{-1}(p)$ en B_G. Puesto que $\boldsymbol{p}$ es un isomorfismo, Σ es un subfibrado de T, esto es, una distribución diferenciable de dimensión k. Así, la G-estructura B_G determina una distribución diferenciable sobre M.

Recíprocamente, dada una distribución diferenciable Σ, de dimensión k, sobre M, sea B_G la subvariedad de $\mathfrak{F}(M)$ formada por aquellas bases $\boldsymbol{p}$ tales que

$\boldsymbol{p}^{-1}(\Sigma_p) = V_1$, donde $p = \pi(\boldsymbol{p})$ y V_1 es un subespacio vectorial de V de dimensión k. Si consideramos el subgrupo G de $GL(V)$ de las transformaciones lineales de V que dejan invariante el subespacio V_1, se deduce que, dados $\boldsymbol{p} \in B_G$ y $a \in GL(V)$, $\boldsymbol{p}a \in B_G$ si y sólo si $a \in G$, esto es, B_G es una G-estructura.

Se tiene así que existe una correspondencia biunívoca entre sistemas de Pfaff de rango r y G-estructuras cuyo grupo estructural es el subgrupo de todas las transformaciones lineales de V que dejan invariante un subespacio prefijado V_1 de V de dimensión $n - r$.

En el caso particular de los sistemas de Pfaff de rango dos o tres, el grupo G de la G-estructura inicial es 19-dimensional. Sternberg asegura que, aplicando por primera vez dicha técnica, el grupo estructural debe reducirse a un grupo de dimensión 16 y que, reiterando el procedimiento, éste debe reducirse a uno 12-dimensional, y, por último, a un grupo 7-dimensional. En [2] (para más detalles ver [3]) probamos, por medio de la aplicación efectiva de la técnica diseñada por Sternberg el siguiente resultado:

Teorema 4.1. *Sea $B_{G_{19}}$ la G_{19}-estructura asociada a un sistema de Pfaff S de rango* 3 *sobre una variedad de dimensión* 5*. Si S no es completamente integrable ni un sistema en bandera, entonces:*

i) *$B_{G_{19}}$ se reduce a una G-estructura $B_{G_{16}}$, cuyo grupo estructural es de dimensión* 16.

ii) *$B_{G_{16}}$ se reduce a una G-estructura $B_{G_{12}}$, cuyo grupo estructural es de dimensión* 12.

iii) *Reiterando el procedimiento de Sternberg no se obtiene reducción sobre $B_{G_{12}}$.*

Nota 4.1. Los cálculos que llevan a la reducción en *ii)* no coinciden con los indicados por Sternberg ([12]).

Agradecimientos

El primer autor ha sido sido parcialmente subvencionado por el Proyecto MEC-FEDERER, MTM2010-18089.

Referencias

[1] R. Bryant, S. S. Chern, R. B. Gardner, H. Goldschmidt, P. A. Griffiths, *Exterior Differential Systems*, MSRI Pub., 18, Springer-Verlag, N.Y. (1991).

[2] M. A. Cañadas-Pinedo, C. Ruiz, Sternberg's structure function of differential systems in dimension five, *Czechoslovak Math. J.*, **43** (1993) 429-438.

[3] M. A. Cañadas-Pinedo, *Classificación de ciertos sistemas de Pfaff*, Tesis doctoral, Universidad de Granada, 1997.

[4] M. A. Cañadas-Pinedo, C. Ruiz, Pfaffian systems with derived length one. The class of flag systems, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **353(5)** (2001) 1755-1766.

[5] M. A. Cañadas-Pinedo, C. Ruiz, First classification of Pfaffian systems in dimension five, *International Journal of Mathematics* **18 (10))** (2007) 1151-1168.

[6] E. Cartan, Les systèmes de Pfaff à cinq variables et les équations aux dérivées partielles du seconde ordre, *Ann. Sci. Ec. Normale Sup.*, **27** (1910) 109-192.

[7] R. B. Gardner, Invariants of Pfaffian systems, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **126** (1967), 514-533.

[8] M. Gaspar, A. Kumpera, C. Ruiz, Sur les systèmes de Pfaff en drapeau, *An. Acad. brasil. Ciênc.*, **55** (1983), 225-230.

[9] A. Giaro, A. Kumpera, C. Ruiz, Sur la lecture correcte d'un résultat d'Élie Cartan, *C. R. Acad. Sci. Paris*, Série A **287** (1978) 241-244.

[10] A. Kumpera, C. Ruiz, *Sur l'équivalence locale des systèmes de Pfaff en drapeau*, IHES/M/81/22, I.H.E.S., Bures-sur-Yvette (1981).

[11] P. Libermann, *Sur le problème d'équivalence des systèmes de Pfaff non complètement intégrables*, Publ. Univ. Paris VII (1978).

[12] S. Sternberg, *Lectures on Differential Geometry*, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J. (1983).

Florentino García Santos: In Memoriam
Universidad de Granada, 2011, págs. 51–58

Sobre el espacio clasificador de una categoría monoidal trenzada

Pilar Carrasco • Antonio M. Cegarra • Antonio R. Garzón

Resumen Esta nota ha sido redactada como homenaje y en memoria de nuestro amigo y compañero Floro. Tras recordar algunos resultados recientes sobre espacios clasificadores de estructuras categóricas de orden superior, prestamos atención al caso de las categorías monoidales trenzadas. Para éstas, esbozamos la demostración de cómo el espacio clasificador de su categoría subyacente es (salvo completación grupo) homotópicamente equivalente al doble espacio de lazos de un espacio que puede ser realizado por medio de un genuino conjunto simplicial, llamado el "nervio geométrico" de la categoría monoidal trenzada.

1. Introducción y Preliminares

Técnicas y resultados de teoría de categorías de dimensión superior son de utilidad para resolver cuestiones propias de la teoría de homotopía de espacios. El objetivo general de algunos de nuestros trabajos recientes (véase [3], [4],[5]) ha sido clarificar las relaciones existentes entre construcciones asociadas a estructuras categóricas de orden superior (bicategorías, diagramas laxos de bicategorías, tricategorías) y el tipo de homotopía de sus espacios clasificadores. Los precedentes hay que buscarlos en trabajos sobre espacios clasificadores de categorías, 2-categorías (bicategorías estrictas) y categorías monoidales (véase [1], [2], [3], [4], [5], [6], [8], [10], [12], [13]). Nuestro deseo en estas notas es hacer un breve recorrido sobre estos resultados para terminar prestando una mayor atención al caso de considerar categorías monoidales trenzadas.

Como punto de partida tomamos el trabajo [4], donde se explora la relación entre distintos objetos simpliciales y pseudo-simpliciales, genéricamente llamados nervios, que, de forma característica y natural, se le pueden asociar a cualquier bicategoría. Se prueba que las realizaciones geométricas, en los oportunos sentidos, de todos estos (hasta diez) "nervios de la bicategoría $\mathcal{C}$" son homotópicamente equivalentes, mostrándose así la coherencia de todas las extensiones para bicategorías, que a priori eran

Pilar Carrasco, *mcarrasc@ugr.es*
Antonio M. Cegarra, *acegarra@ugr.es*

Antonio R. Garzón, *agarzon@ugr.es*
Dep. Álgebra, Facultad de Ciencias, Universidad de Granada, 18071-Granada

razonables, de la noción de Quillen de espacio clasificador de una categoría, concebido éste como la realización geométrica (de Milnor) de su nervio de Grothendieck.

La construcción "deslazamiento"(debida a J. Benabou) permite ver cada categoría monoidal $\mathcal{M} = (\mathcal{M}, \otimes)$ como una bicategoría $\Omega^{-1}\mathcal{M}$ con un solo objeto, cuyas 1-celdas son los objetos de $\mathcal{M}$ y cuyas 2-celdas o deformaciones son los morfismos de $\mathcal{M}$, estando dada la composición horizontal por el funtor $\otimes$ en $\mathcal{M}$. Los resultados arriba comentados son entonces de aplicación al caso de considerar categorías monoidales, que encuentran así, en la teoría de bicategorías, el contexto oportuno donde ser ubicadas.

Nuestro segundo referente es [5], donde nos ocupamos del estudio de los tipos de homotopía representados por diagramas laxos de bicategorías, es decir, de funtores laxos a la tricategoría de bicategorías, homomorfismos, pseudo-transformaciones naturales y modificaciones. Probamos entonces que existe, en el contexto de bicategorías, una "construcción de Grothendieck" que, cuando se lleva a cabo sobre un diagrama laxo de bicategorías, produce una bicategoría cuyo espacio clasificador puede ser pensado como el colímite homotópico de los espacios clasificadores de las bicategorías que forman parte de los datos del diagrama laxo dado.

Estos resultados, junto a otros acerca de un proceso de rectificación que es crucial para objetivos posteriores, sientan las bases para realizar un estudio sobre nervios y espacios clasificadores de tricategorías y, en particular, de bicategorías monoidales (tricategorías con un solo objeto).

Aquí nos detendremos un poco mas en el interesante caso particular de las categorías monoidales trenzadas. Desde la perspectiva que concierne al estudio de su espacio clasificador, éste encuentra su punto de partida en el resultado, entre otros de Stasheff [11], Fiedorowicz [6] y Berger [1] : *The group completion of the classifying space of a braided monoidal category is a double loop space.*

Dada una categoría monoidal trenzada $\mathcal{M} = (\mathcal{M}, \otimes, c)$ (no necesariamente estricta), se puede construir una tricategoría $\Omega^{-2}\mathcal{M}$, el "doble deslazamiento de $\mathcal{M}$", que tiene un solo objeto y un solo morfismo, cuyas 2-celdas son los objetos de $\mathcal{M}$ y las 3-celdas los morfismos de $\mathcal{M}$. Concluiremos entonces dando un esbozo de la nueva demostración ([5, Theorem 6.10]) del hecho antes citado, a saber, que el espacio clasificador $\mathrm{B}(\mathcal{M}, \otimes, c)$ de la tricategoría $\Omega^{-2}\mathcal{M}$ tiene un espacio doble de lazos con el mismo tipo de homotopía, salvo completación grupo, que la categoría subyacente de la categoría monoidal trenzada. Mas aún, el hecho a destacar es que éstos espacios asociados a categorías monoidales trenzadas, que son doble deslazamientos, se muestran realizados explícitamente por medio de genuinos conjuntos simpliciales (sus nervios geométricos), $\mathrm{Ner}(\mathcal{M}, \otimes, c)$, que de forma natural y característica se le pueden asociar a cualquier categoría monoidal trenzada. Los p-símplices de $\mathrm{Ner}(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{c})$, que encuentran una interpretación sugerente, son justo los funtores laxos de $[p] = \{0 < 1 < \cdots < p\}$ en $\Omega^{-2}\mathcal{M}$. En el caso muy particular de que $(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{c}) = (A, +, 0)$, la categoría monoidal estricta trenzada con un solo objeto que define un grupo abeliano A, donde tanto la composición como el producto tensor están dados por la suma $+$ de A, se tiene que $\mathrm{Ner}(A,+,0)=K(A,3)$, esto es, que dicho nervio es el complejo minimal de Eilenberg-Mac Lane con un único grupo de homotopía no nulo, A, en dimensión 3.

2. Categorías monoidales trenzadas y su espacio clasificador

En orden a ser concisos, en lo que sigue remitimos al lector a [5] para las siguientes nociones y construcciones:

- $\mathbf{Bicat}$, la tricategoría de bicategorías, homomorfismos entre ellas, transformaciones pseudo-naturales y modificaciones.

- $\mathbf{Bicat}^{I^{\mathrm{op}}}$, la tricategoría cuyos objetos son diagramas laxos de bicategorías, esto es, funtores laxos de tricategorías en el sentido de Gordon-Power-Street [7], $\mathcal{F}: I^{\mathrm{op}} \rightsquigarrow \mathbf{Bicat}$, donde I es cualquier categoría pequeña, para los que todas las 3-celdas de coherencia son invertibles.

- La construcción bicategórica de Grothendieck $\int_I \mathcal{F}$ realizada sobre diagramas laxos de bicategorías $\mathcal{F}: I^{\mathrm{op}} \rightsquigarrow \mathbf{Bicat}$. Dicha construcción extiende la correspondiente para diagramas laxos de categorías y puede ser mirada como un colímite homotópico de las bicategorías $\mathcal{F}_i$, $i \in \mathrm{Ob}I$.

- El espacio clasificador $\mathrm{B}\mathcal{F}$ del diagrama laxo de bicategorías $\mathcal{F}: I^{\mathrm{op}} \rightsquigarrow \mathbf{Bicat}$, definido como el espacio clasificador de la bicategoría obtenida por la construcción de Grothendieck sobre $\mathcal{F}$:

$$\mathrm{B}\mathcal{F} = \mathrm{B}{\textstyle\int_I}\mathcal{F}.$$

El teorema de Stasheff-Fiedorowicz-Berger [11, 6, 1] implica la existencia, para cada categoría monoidal trenzada $(\mathcal{M},\otimes,\mathbf{c})$, de un espacio simplemente conexo y conexo por arcos $\mathrm{B}(\mathcal{M},\otimes,\mathbf{c})$, definido de forma única salvo equivalencia homotópica, y de una aplicación natural, salvo homotopía, $\mathrm{B}\mathcal{M} \to \Omega^2\mathrm{B}(\mathcal{M},\otimes,\mathbf{c})$, que es, salvo completación grupo, una equivalencia homotópica.

El espacio $\mathrm{B}(\mathcal{M},\otimes,\mathbf{c})$ es llamado el *espacio clasificador de la categoría monoidal trenzada* o el *doble deslazamiento* of $\mathrm{B}\mathcal{M}$, inducido por la estructura monoidal trenzada dada sobre $\mathcal{M}$.

La existencia de $\mathrm{B}(\mathcal{M},\otimes,\mathbf{c})$ fue probada por medio de la teoría de May de E_2-operas y, por tanto, usando construcciones basadas en complejos procesos de rectificar diagramas coherentes salvo homotopía. El CW-complejo así obtenido tiene muchas celdas con, además, aparente poca conexión intuitiva con los datos de la categoría monoidal original. Esta es la razón que nos condujo a la búsqueda de un adecuado conjunto simplicial a partir del cual realizar el espacio $\mathrm{B}(\mathcal{M},\otimes,\mathbf{c})$ y cuyas celdas den un lógico sentido geométrico a los datos de la categoría monoidal trenzada.

En una primera instancia, demostramos que el espacio $\mathrm{B}(\mathcal{M},\otimes,\mathbf{c})$ puede realizarse por medio de una construcción bicategórica que responde a la siguiente situación general. Para cualquier tricategoría $\mathcal{T}$ se puede considerar la construcción

$$\underline{\mathrm{N}}\mathcal{T} : \Delta^{\mathrm{op}} \rightsquigarrow \mathbf{Bicat}\,,$$

con $\bigsqcup \mathcal{T}(x_1,x_0)\times\mathcal{T}(x_2,x_1)\times\cdots\times\mathcal{T}(x_p,x_{p-1})$ como su bicategoría de p-símplices y cuyos morfismos cara y degeneración están dados siguiendo las fórmulas usuales para tales operadores en el nervio de Grothendieck de una categoría. Probar que de esta forma lo que se tiene es, ciertamente, un diagrama pseudo-simplicial de bicategorías es todavía objeto de estudio.

Prestamos atención sin embargo a la tricategoría con un solo objeto y un solo morfismo $\Omega^{-2}\mathcal{M}$ definida por la categoría monoidal trenzada $(\mathcal{M},\otimes,\mathbf{c})$ ([9, 1]). En esta tricategoría, las 2-celdas $u : * \to *$ son los objetos u de $\mathcal{M}$ y los morfismos de $\mathcal{M}$ son las 3-celdas. Por tanto, $\Omega^{-2}\mathcal{M}(*,*) = \Omega^{-1}\mathcal{M}$, la "bicategoría deslazante" asociada a la categoría monoidal subyacente. La composición horizontal está dada (como la vertical) por el funtor tensor $\otimes : \mathcal{M}\times\mathcal{M}\to\mathcal{M}$ y la 3-celda de intercambio entre las dos diferentes composiciones de 2-celdas está dada por el trenzamiento $\mathbf{c} : \mathbf{u}\otimes\mathbf{v}\to\mathbf{v}\otimes\mathbf{u}$. $\Omega^{-2}\mathcal{M}$ es llamada el *doble deslazamiento* de la categoría subyacente $\mathcal{M}$ asociada a la estructura monoidal trenzada dada sobre ella. En este caso particular, la construcción anterior sí produce una bicategoría pseudo-simplicial que conocemos como *nervio bicategórico pseudo-simplicial* $\mathrm{N}(\mathcal{M},\otimes,\mathbf{c})$ de la categoría monoidal trenzada $(\mathcal{M},\otimes,\mathbf{c})$. Por tanto,

$$\mathrm{N}(\mathcal{M},\otimes,\mathbf{c}) := \underline{\mathrm{N}}\Omega^{-2}\mathcal{M} : \Delta^{\mathrm{op}} \rightsquigarrow \mathbf{Bicat}, \quad [p]\mapsto (\Omega^{-1}\mathcal{M})^p\,.$$

Notemos que, como consecuencia del trenzamiento, $\mathrm{N}(\mathcal{M},\otimes,\mathbf{c})$ se obtiene también como la composición

$$\begin{array}{ccccc} \Delta^{\mathrm{op}} & \overset{\mathrm{N}(\mathcal{M},\otimes)}{\rightsquigarrow} & \mathbf{MonCat} & \xrightarrow{\Omega^{-1}} & \mathbf{Bicat}, \\ [p] & \longmapsto & (\mathcal{M}^p,\otimes) & \longmapsto & \Omega^{-1}\mathcal{M}^p \end{array}$$

lo que permite asegurar que, ciertamente, $\mathrm{N}(\mathcal{M},\otimes,\mathbf{c})$ es un diagrama pseudo-simplicial de bicategorías con un solo objeto.

La realización de la bicategoría pseudo-simplicial $\mathrm{N}(\mathcal{M},\otimes,\mathbf{c})$ se describe como caso particular de un proceso general concerniente a la teoría de homotopía de diagramas laxos de bicategorías. Destaquemos que esta teoría corre paralela a la desarrollada (siguiendo métodos de A. Grothendieck) por G. Segal [10] y R. W. Thomason [13] para diagramas laxos de categorías y que la teoría así resultante tiene su propio interés y sienta las bases para desarrollos futuros por ejemplo en la teoría de homotopía de las bicategorías monoidales o de las tricategorías arbitrarias.

Siguiendo entonces la definición general, podemos considerar el espacio clasificador del diagram laxo $\mathrm{N}(\mathcal{M},\otimes,\mathbf{c})$, esto es,

$$\mathrm{B}(\mathcal{M},\otimes,\mathbf{c}) := \mathrm{BN}(\mathcal{M},\otimes,\mathbf{c}) = \mathrm{B}\underline{\mathrm{N}}\Omega^{-2}\mathcal{M} = \mathrm{B}\Omega^{-1}\mathrm{N}(\mathcal{M},\otimes).$$

y como comentamos a continuación, $\mathrm{B}(\mathcal{M},\otimes,\mathbf{c})$ es ciertamente el *espacio clasificador de la categoría monoidal trenzada*, esto es, $\Omega^2\mathrm{B}(\mathcal{M},\otimes,\mathbf{c})$ es la completación grupo, via una aplicación natural $\mathrm{B}\mathcal{M} \to \Omega^2\mathrm{B}(\mathcal{M},\otimes,\mathbf{c})$, de $\mathrm{B}\mathcal{M}$.

Para ello, se utiliza el *nervio geométrico* de la categoría monoidal trenzada $(\mathcal{M},\otimes,\mathbf{c})$ que es el conjunto simplicial

$$\mathrm{Ner}(\mathcal{M},\otimes,\mathbf{c}) : \Delta^{\mathrm{op}} \;\to\; \mathbf{Set}, \quad [p] \mapsto \mathrm{NorLaxFunc}([p],\Omega^{-2}\mathcal{M}).$$

cuyos p-símplices son todos los funtores laxos estrictamente unitarios (o normalizados) de $[p]$ en $\Omega^{-2}\mathcal{M}$ (llamados también 3-cociclos con coeficientes en la categoría monoidal trenzada). Dicho conjunto simplicial es un 4-coesqueleto y fue ya considerado entre otros por Dolan y Street. Los símplices constituyen de hecho, en cada dimensión, el conjunto de objetos de una cierta bicategoría, de tal suerte que $\mathrm{Ner}(\mathcal{M},\otimes,\mathbf{c})$ es el conjunto simplicial de objetos de una bicategoría simplicial $\mathbb{N}\mathrm{er}(\mathcal{M},\otimes,\mathbf{c})$ llamada el *nervio geométrico bicategórico* de la categoría monoidal trenzada.

El hecho es que existen homomorfismos pseudo-simpliciales

$$\mathrm{N}(\mathcal{M},\otimes,\mathbf{c}) \rightsquigarrow \Omega^{-1}\mathbb{N}\mathrm{er}(\mathcal{M},\otimes) \rightsquigarrow \mathbb{N}\mathrm{er}(\mathcal{M},\otimes,\mathbf{c}),$$

y se tiene [5, Teorema 6.9] que su composición induce una equivalencia homotópica entre los correspondientes espacios clasificadores

$$\mathrm{B}(\mathcal{M},\otimes,\mathbf{c}) \simeq \mathrm{B}\mathbb{N}\mathrm{er}(\mathcal{M},\otimes,\mathbf{c}). \tag{43}$$

Consecuentemente, la bicategoría simplicial $\mathbb{N}\mathrm{er}(\mathcal{M},\otimes,\mathbf{c})$, que hemos llamado el nervio geométrico bicategórico, modela el tipo de homotopía de la categoría monoidal trenzada y puede pensarse como una rectificación del nervio pseudo-simplicial $\mathrm{N}(\mathcal{M},\otimes,\mathbf{c})$.

Este resultado (43) junto con el hecho de que, para cualquier categoría monoidal $(\mathcal{M},\otimes)$, existe una aplicación natural salvo homotopía $\mathrm{B}\mathcal{M} \to \Omega\mathrm{B}(\mathcal{M},\otimes)$, que es, salvo completación grupo, una equivalencia homotópica, conduce en el siguiente teorema, a una nueva demostración del resultado ya comentado de Stasheff, Fiedorowicz y Berger.

Teorema 2.1. *Para cada categoría monoidal trenzada* $(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{c})$ *existe una equivalencia homotópica natural*

$$\mathrm{B}(\mathcal{M}, \otimes) \simeq \Omega \mathrm{B}(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{c}).$$

Consecuentemente, el doble espacio de lazos $\Omega^2\mathrm{B}(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{c})$ *es homotópicamente equivalente a la completación grupo de* $\mathrm{B}\mathcal{M}$.

Demostración (esquema):
Considerando el espacio simplicial $X : [n] \mapsto \mathrm{B}\mathbb{N}\mathrm{er}(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{c})_n$ se tienen equivalencias homotópicas

$$\mathrm{B}(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{c}) \simeq \mathrm{B}\mathbb{N}\mathrm{er}(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{c}) \simeq |X|.$$

El espacio simplicial X satisface las hipótesis de Segal en [10, Proposition 1.5], a saber: 1) X_0 es un conjunto unitario; 2) las proyecciones de Segal $p_n : X_n \to (X_1)^n$ son equivalencias homotópicas; 3) $X_1 \simeq \mathrm{B}(\mathcal{M}, \otimes)$, y 4) $\pi_0(X_1) = 0$. Consecuentemente, la aplicación canónica $X_1 \to \Omega \mid X \mid$ es una equivalencia homotópica y, por tanto, se tiene la equivalencia homotópica anunciada $\mathrm{B}(\mathcal{M}, \otimes) \simeq \Omega\mathrm{B}(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{c})$.

Finalmente, considerando el homomorfismo simplicial de inclusión

$$\mathrm{Ner}(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{c}) \hookrightarrow \mathbb{N}\mathrm{er}(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{c})\,,$$

podemos demostrar que $\mathrm{Ner}(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{c})$, el nervio geométrico, da la respuesta al objetivo de buscar un adecuado conjunto simplicial para realizar el espacio clasificador de una categoría monoidal trenzada. Probamos entonces:

Teorema 2.2. *Para cada categoría monoidal trenzada* $(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{c})$*, existe una equivalencia homotópica*

$$\mathrm{B}(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{c}) \simeq |\mathrm{Ner}(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{c})|.$$

Demostración (esquema):
Teniendo en cuenta la equivalencia homotópica (43), es suficiente probar que el homomorfismo simplicial de inclusión $\mathrm{Ner}(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{c}) \hookrightarrow \mathbb{N}\mathrm{er}(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{c})$, induce una equivalencia homotópica al tomar espacios clasificadores, esto es, que

$$\mid \mathrm{Ner}(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{c}) \mid \hookrightarrow \mathrm{B}\mathbb{N}\mathrm{er}(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{c}) \tag{44}$$

es una equivalencia homotópica. Para ello, sea $\Delta\mathbb{N}\mathrm{er}(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{c})$ el conjunto bisimplicial obtenido a partir de la bicategoría simplicial $\mathbb{N}\mathrm{er}(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{c})$ componiendo con el funtor nervio geométrico unitario de bicategorías (véase [4]). El mismo proceso podemos aplicarlo a la bicategoría simplicial discreta $\mathrm{Ner}(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{c})$ y considerar entonces la inclusión bisimplicial

$$\Delta\mathrm{Ner}(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{c}) \hookrightarrow \Delta\mathbb{N}\mathrm{er}(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{c})\,, \tag{45}$$

donde $\Delta\mathrm{Ner}(\mathcal{M}, \otimes, \mathbf{c})$ es un conjunto bisimplicial que es constante en la dirección horizontal. Entonces, teniendo en cuenta que para cualquier bicategoría $\mathcal{C}$ se tiene una equivalencia homotópica $\mathrm{B}\mathcal{C} \simeq |\Delta\mathcal{C}|$ y que, para cualquier diagrama de bicategorías $\mathcal{F}$, se tiene una equivalencia homotópica $\mathrm{B}\mathcal{F} \simeq |\mathrm{hocolim}_I \Delta\mathcal{F}|$, para probar (44) es suficiente ver que la aplicación inducida en las diagonales por (45) es una equivalencia homotópica. Ahora, para probar esto último, es suficiente ver que la aplicación bisimplicial (45) es una equivalencia homotópica punto a punto y para esto, analizando como está definida la aplicación bisimplicial (45) en cada nivel horizontal, lo que demostramos es que cada una de las aplicaciones simpliciales que la componen es un retrato de deformación exhibiendo, de forma explícita, la homotopía necesaria para ello (véase [5, Theorem 6.11]).

Agradecimientos

Con la financiación del Proyecto MTM2007-65431.

Referencias

[1] C. Berger, Double loop spaces, braided monoidal categories and algebraic 3-type of space, *Contemp. Math.* **227** (1999), 49–66.

[2] M. Bullejos, A.M. Cegarra, On the geometry of 2-categories and their classifying spaces, *K-theory* **(3)29** (2003), 211–229.

[3] M. Bullejos, A.M. Cegarra, Classifying spaces for monoidal categories through geometric nerves, *Canad. Math. Bull.* **47(3)** (2004), 321–331.

[4] P. Carrasco, A.M. Cegarra, A.R. Garzón, Nerves and classifying spaces for bicategories, *Alg. Geom. Topology* **10** (2010), 219–274.

[5] P. Carrasco, A.M. Cegarra, A.R. Garzón, Classifying spaces for braided monoidal categories and lax diagrams of bicategories, *Advances in Math.* **226** (2011), 419–483.

[6] Z. Fiedorowicz, The symmetric bar construction, preprint, available at: http://www.math.ohio-state.edu/ fiedorow/.

[7] R. Gordon, A.J. Power, R. Street, Coherence for tricategories, *Mem. Amer. Math. Soc* **117(558)** (1995).

[8] N. Gurski, Nerves of bicategories as estratified simplicial sets, *J. Pure Appl. Algebra* **213** (2009), 927–946.

[9] M. Kapranov, V. Voevodsky, 2-categories and Zamolodchikov tetrahedra equations, *Proc. Sympos. Pure Math. Amer. Math. Soc., Providence* **56** (1994), 177–260.

[10] G.B. Segal, Categories and cohomology theories, *Topology* **13** (1974), 293–312.

[11] J.D. Stasheff, Homotopy associativity of H-spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* **108** (1963), 257–312.

[12] R. Street, The algebra of oriented simplexes, *J. Pure Appl. Algebra* **(3)49** (1987), 283–335.

[13] R.W. Thomason, Homotopy colimits in the category of small categories, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **85(1)** (1979), 91-109.

Florentino García Santos: In Memoriam
Universidad de Granada, 2011, págs. 59–67

Existencia de regiones isoperimétricas en variedades sub-riemannianas de contacto

Matteo Galli • Manuel Ritoré

A Florentino, cuya dedicación y cercanía siempre recordaremos.

Resumen En este trabajo describimos cómo probar existencia de regiones isoperimétricas, para cualquier valor del volumen, en variedades sub-riemannianas de contacto cuyo cociente por el grupo de isometrías de contacto es compacto.

1. Introducción

Las *desigualdades isoperimétricas* son valiosas herramientas tanto en Análisis como en Geometría. En un espacio dado M, una desigualdad isoperimétrica *óptima* está determinada por el *perfil isoperimétrico* I_M: la función que asigna, a cada volumen $v > 0$, el ínfimo de los perímetros de las regiones en M de dicho volumen. Las *regiones isoperimétricas* son aquellas para las que se alcanza dicho ínfimo. Un problema relevante en este campo consiste en analizar la existencia de dichas regiones en un espacio dado para cualquier valor del volumen. La existencia de regiones isoperimétricas proporciona numerosas propiedades del perfil isoperimétrico, [14].

Estos problemas isoperimétricos se pueden plantear en cualquier espacio donde existan nociones de perímetro y volumen. Una clase muy general donde esto puede hacerse es la de los espacios de medida métricos, donde el volumen es la medida y el perímetro es el clásico contenido de Minkowski, que se obtiene a partir de la medida y de la distancia. Una clase particular de dichos espacios que ha sido estudiada recientemente es la de los espacios de medida métricos Ahlfors-regulares que admiten una desigualdad de Poincaré [9], [1], en los que se pueden definir funciones de variación acotada y conjuntos de perímetro finito. Las variedades Riemannianas y sub-riemannianas están incluidas en esta clase de espacios.

Ciertas desigualdades isoperimétricas han sido intensamente estudiadas en variedades sub-Riemanianas de contacto. Pansu [12] fue el primero en obtener una desigualdad isoperimétrica del tipo $|\partial\Omega| \geqslant C\,|\Omega|^{4/3}$, para una cierta constante $C > 0$, en el primer grupo de Heisenberg $\mathbb{H}^1$. Aunque el exponente $4/3$ es óptimo, la cons-

Matteo Galli, *galli@ugr.es*
Manuel Ritoré, *ritore@ugr.es*
Dep. Geometría y Topología, Facultad de Ciencias, Universidad de Granada, 18071-Granada

tante C no lo es. Chanillo y Yang [3] extendieron recientemente la desigualdad isoperimétrica de Pansu a variedades pseudo-hermíticas 3-dimensionales sin torsión. En el capítulo 8 de la monografía [2] puede encontrarse un resumen de trabajos recientes sobre la desigualdad isoperimétrica óptima en $\mathbb{H}^1$.

El problema de existencia de regiones isoperimétricas ha sido estudiado con cierta intensidad en variedades Riemannianas. Resultados clásicos de compacidad de teoría geométrica de la medida garantizan la existencia en variedades compactas [6], [11]. Sin embargo, es conocido que existen variedades Riemannianas completas no compactas para las que las regiones isoperimétricas no existen para ningún valor del volumen, como los planos de revolución con curvatura de Gauss creciente [13]. Un resultado muy general de existencia fue enunciado por Morgan [11], para variedades Riemannianas que tienen cociente compacto bajo la acción de su grupo de isometrías. Su demostración se basa en una anterior de existencia de "clusters" que minimizan perímetro encerrando y separando volúmenes fijos en el espacio Euclídeo [10].

En geometría sub-Riemanniana, además del caso compacto, el único resultado conocido de existencia ha sido demostrado por Leonardi y Rigot [8] para grupos de Carnot. Como las regiones isoperimétricas en un grupo de Carnot $\mathbb{G}$ son invariantes por dilataciones intrínsecas, el perfil isoperimétrico $I_{\mathbb{G}}$ de $\mathbb{G}$ viene dado por $I_{\mathbb{G}}(v) = Cv^q$, donde $C > 0$ es una constante positiva y $q \in (0, 1)$. En particular, la función $I_{\mathbb{G}}$ es estrictamente cóncava, una propiedad que desempeña un papel fundamental en su demostración. Los resultados de Leonardi y Rigot no pueden aplicarse a algunos grupos sub-Riemannianos interesantes, como el roto-traslacional [2], que no son grupos de Carnot.

En este trabajo describiremos los resultados de [4], en los que se demuestra (Teorema 2.1) la existencia de regiones isoperimétricas en variedades sub-riemannianas de contacto cuyo cociente por el grupo de isometrías de contacto es compacto. Este resultado es el análogo del Riemanniano de Morgan.

La estrategia de la demostración es similar a la de Morgan: elegimos una sucesión minimizante de conjuntos de volumen v cuyos perímetros convergen a $I_M(v)$. Si la sucesión subconverge sin perder una cantidad positiva de volumen, entonces el límite es una región isoperimétrica de volumen v. Si alguna fracción del volumen se pierde entonces la sucesión minimizante puede romperse en dos partes, una de las cuales converge y la otra diverge. La parte convergente tiene límite, que es una región isoperimétrica *acotada* para el volumen que encierra. La parte divergente puede trasladarse para recuperar una fracción fija del volumen perdido. Repitiendo este proceso una cantidad numerable de veces podemos capturar todo el volumen v de la sucesión minimizante.

Las principales complicaciones técnicas son la demostración de la acotación de las regiones isoperimétricas, y la demostración de un resultado de estructura para las sucesiones minimizantes. La clave para probar la acotación de las regiones isoperimétricas es un lema de deformación, debido originalmente a Almgren, por medio del cual un conjunto de perímetro finito puede agrandarse ligeramente de modo que el incremento de perímetro puede estimarse por una constante fija que multiplica al incremento de volumen. Nuestra demostración de existencia es bastante general, aunque la demostración del lema de deformación no parece generalizarse fácilmente a variedades sub-riemannianas que no son de contacto.

Una variedad sub-Riemanniana de contacto $(M, g_{\mathcal{H}}, \omega)$ está formada por una variedad de contacto (M, ω), donde ω es una forma de contacto en M, y una métrica definida positiva $g_{\mathcal{H}}$ en la distribución horizontal $\mathcal{H} := \ker(\omega)$. La métrica $g_{\mathcal{H}}$ se extiende a una métrica Riemanniana g en M tal que el campo de Reeb T es unitario y ortogonal a la distribución horizontal. Una isometría de contacto es una transformación de contacto estricta (que preserva ω), y que respeta la métrica $g_{\mathcal{H}}$. Esta definición es equivalente a que preserve la métrica Riemanniana g y el vector de Reeb T. Al grupo de isometrías de contacto lo denotaremos por $\operatorname{Isom}_\omega(M, g)$. Si la dimensión de M es $2n + 1$, la dimensión homogénea de M es $Q := 2n + 2$. Denotaremos por $B(x_0, r)$ a la bola abierta de centro $x_0 \in M$ y radio $r > 0$ para la distancia de Carnot-Carathéodory, por $|E|$ el volumen de un conjunto $E \subset M$, por $P(E, \Omega)$ el perímetro sub-Riemanniano de E en un conjunto abierto $\Omega \subset M$, y por $P(E) := P(E, M)$ el perímetro de E en M.

2. Descripción de los resultados

El punto de partida es la desigualdad de Poincaré [7, Thm. 2.1], [5] en espacios de Carnot-Carathéodory, que implica la siguiente desigualdad isoperimétrica relativa en nuestra variedad sub-Riemanniana de contacto:

Lema 2.1 ([4, Lemma 3.7]). *Sea $(M, g_{\mathcal{H}}, \omega)$ una variedad sub-Riemanniana de contacto, y $K \subset M$ un subconjunto compacto. Existen constantes $C_I > 0$, $r_0 > 0$, que sólo dependen de K, tales que, para todo conjunto $E \subset M$ de perímetro localmente finito, tenemos:*

$$C_I \operatorname{mín}\left\{ |\, E \cap B(x,r) \,|, |\, E^c \cap B(x,r) \,| \right\}^{(Q-1)/Q} \leqslant P(E, B(x,r)), \tag{46}$$

para todo $x \in K$.

Cuando el cociente $M/\operatorname{Isom}_\omega(M, g)$ es compacto, la desigualdad isoperimétrica relativa anterior extiende a toda la variedad M. A partir de ella se puede obtener una desigualdad isoperimétrica para volúmenes pequeños:

Lema 2.2 ([4, Lemma 3.10]). *Sea $(M, g_{\mathcal{H}}, \omega)$ una variedad sub-Riemanniana de contacto tal que el cociente $M/\operatorname{Isom}_\omega(M)$ es compacto. Entonces existen $v_0 > 0$ y $C_I > 0$ tales que:*

$$P(E) \geqslant C_I |E|^{(Q-1)/Q}, \tag{47}$$

para todo conjunto de perímetro finito $E \subset M$ con $|E| < v_0$.

Uno de los resultados esenciales que debemos probar es la acotación de regiones isoperimétricas [4, Lemma 4.6]. La demostración de Morgan [11] para el caso Riemanniano requiere dos elementos fundamentales: la desigualdad isoperimétrica para conjuntos de volumen pequeño del lema 2.2, y el siguiente resultado de deformación:

Lema 2.3 ([4, Lemma 4.5])**.** *Sea $(M, g_{\mathcal{H}}, \omega)$ una variedad sub-Riemanniana de contacto, y $\Omega \subset M$ un conjunto de perímetro finito. Entonces existe una deformación $\widetilde{\Omega}_r \supset \Omega$, $0 < r \leqslant r_0$, tal que:*

$$P(\partial(\widetilde{\Omega}_r - \Omega)) \leqslant C\,|\widetilde{\Omega}_r - \Omega|,$$

donde C es una constante positiva.

Para probar el lema de deformación es esencial construir, en un entorno $U \subset M$ de un punto $p \in M$, una foliación de $U \setminus \{p\}$ por esferas con curvatura media acotada fuera de un entorno de p. Para probar este resultado utilizamos coordenadas de Darboux y las hiperesferas de Pansu, hipersuperficies de revolución con curvatura media constante en el grupo de Heisenberg $\mathbb{H}^n$. Es esencial en este proceso controlar

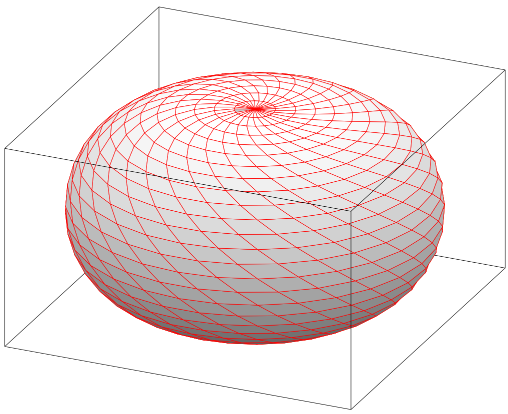

Figura 3: Una esfera de Pansu en $\mathbb{H}^1$

la curvatura media de las hiperesferas de Pansu cuando se toman coordenadas de Darboux. Sea $G_u \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ el grafo de la función $u : \Omega \subset \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ de clase C^2. La curvatura media de G_u en la variedad sub-Riemanniana de contacto $(\mathbb{R}^{2n+1}, g_{\mathcal{H}_0}, \omega_0)$ está dada por:

$$-\operatorname{div}\left(\frac{b(\nabla u + F)}{\big\langle \nabla u + F, b(\nabla u + F)\big\rangle^{1/2}}\right) + \mu, \tag{48}$$

donde μ es una función acotada en $\Omega \setminus \Omega_0$, b es una matriz simétrica diferenciable en Ω, y ∇, div son el gradiente y la divergencia Euclídea usuales en Ω. En el caso particular de las esferas de Pansu, esta curvatura media está acotada lejos del origen.

El segundo ingrediente que utilizaremos en la demostración de existencia de regiones isoperimétricas es un resultado de estructura para sucesiones minimizantes en una variedad sub-Riemanniana de contacto:

Proposición 2.1 ([4, Prop. 5.1]). *Sea $(M, g_{\mathcal{H}}, \omega)$ una variedad sub-Riemanniana de contacto no compacta. Consideramos una sucesión minimizante $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de conjuntos de volumen v que convergen en $L^1_{loc}(M)$ a un conjunto de perímetro finito $E \subset M$, eventualmente vacío. Existen entonces sucesiones de conjuntos de perímetro finito $\{E_k^c\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{E_k^d\}_{k\in\mathbb{N}}$ tales que:*

1. *$\{E_k^c\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a E en $L^1(M)$, $\{E_k^d\}_{k\in\mathbb{N}}$ diverge, y $|E_k^c| + |E_k^d| = v$.*
2. *$\lim_{k\to\infty} P(E_k^c) + P(E_k^d) = I_M(v)$.*
3. *$\lim_{k\to\infty} P(E_k^c) = P(E)$.*
4. *Si $|E| \neq 0$, entonces E es una región isoperimétrica de volumen $|E|$.*
5. *Más aún, si $M/\operatorname{Isom}_\omega(M, g)$ es compacto, entonces se tiene $\lim_{k\to\infty} P(E_k^d) = I_M(v - |E|)$. En particular, $I_M(v) = I_M(|E|) + I_M(v - |E|)$.*

En la demostración de nuestro resultado de existencia, un papel importante lo desempeña el siguiente resultado de concentración, bastante conocido, que implica que el perímetro es grande si si el volumen está muy disperso.

Lema 2.4 ([8, Lemma 4.1], [4, Lemma 6.2]). *Sea $E \subset M$ de volumen y perímetro positivo y finito. Supongamos que $m \in (0, \inf_{x\in M} |B(x, r_0)|/2)$, donde $r_0 > 0$ es un radio para el que la desigualdad isoperimétrica relativa se satisface, es tal que $|E \cap B(x, r_0)| < m$ para todo $x \in M$. Entonces tenemos:*

$$C\,|E|^Q \leqslant m\,P(E)^Q, \tag{49}$$

para alguna constante $C > 0$ que solo depende de Q.

Con todos estos ingrediente podemos demostrar nuestro resultado principal.

Teorema 2.1 ([4, Thm. 6.1]). *Sea $(M, g_{\mathcal{H}}, \omega)$ una variedad sub-Riemanniana de contacto tal que el cociente $M/\operatorname{Isom}_\omega(M, g)$ es compacto. Entonces, para cualquier $0 < v < |M|$, existe en M una región isoperimétrica de volumen v.*

Demostración. [Demostración del Teorema 2.1] Fijamos un volumen $0 < v < |M|$, y tomamos una sucesión minimizante $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de conjuntos de volumen v cuyos perímetros aproximan $I_M(v)$. En el caso de que M sea compacto, podemos extraer una subsucesión convergente a un conjunto de perímetro finito E con $|E| = v$ y $P(E) = I_M(v)$.

Suponemos a partir de ahora que M es no compacto. Por el lema 2.4, para todo $m > 0$ tal que $mv < \text{ínf}_{x \in M} |B(x, r_0)|/2$, existe una constante $C > 0$, que solo depende de Q tal que, para todo conjunto de perímetro finito $E \subset M$ que satisface $|E \cap B(x, r_0)| < m\,|E|$ para todo $x \in M$, tenemos:

$$C|E|^Q \leqslant (m|E|)\,P(E)^Q,$$

y, por tanto:

$$P(E) \geqslant \left(\frac{C}{m}\right)^{1/Q} |E|^{(Q-1)/Q}. \tag{50}$$

De la proposición 6.4 en [4] deducimos que, dado $v > 0$, existe una constante $C(v) > 0$ tal que $I_M(w) \leqslant C(v)\,w^{(Q-1)/Q}$ para todo $w \in (0, v]$. Tomando $m_0 > 0$ suficientemente pequeño tal que:

$$\left(\frac{C}{m_0}\right)^{1/Q} |E|^{(Q-1)/Q} > 2C(v)\,|E|^{(Q-1)/Q} \tag{51}$$

concluimos, usando (50), (51):

$$P(E) \geqslant 2I_M(|E|). \tag{52}$$

De (52) obtenemos que, para k suficientemente grande, los conjuntos de la sucesión minimizante $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ no pueden satisfacer la propiedad $|E \cap B(x, r_0)| < m|E|$ para todo $x \in M$. Por tanto podemos tomar puntos $x_k \in M$ tales que:

$$|E_k \cap B(x_k, r_0)| \geqslant m_0|E_k| = m_0 v,$$

para k suficientemente grande. Puesto que $M/\text{Isom}_\omega(M, g)$ es compacto, trasladamos la sucesión minimizante (que seguimos denotando igual), de tal modo que $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sea acotada. Pasando a una subsucesión, que denotamos igual, suponemos que $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge a un punto $x_0 \in M$. Existe entonces una subsucesión convergente, denotada también por $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, que converge a un conjunto de perímetro finito E, y:

$$m_0 v \leqslant \liminf_{k \to \infty} |E_k \cap B(x_0, r_0)| = |E \cap B(x_0, r_0)|,$$

y:

$$|E| \leqslant \liminf_{k \to \infty} |E_k| = v.$$

Por tanto hemos probado lo siguiente: de toda sucesión minimizante de conjuntos de volumen $v > 0$ podemos obtener, aplicando isometrías de M a cada miembro de la sucesión, una nueva sucesión minimizante $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ que converge a un conjunto de perímetro finito E con $m_0 v \leqslant |E| \leqslant v$, donde $m_0 > 0$ es una constante universal que solo depende de v. Por tanto una fracción del volumen total es atrapado por la sucesión minimizante.

Tomamos ahora una sucesión minimizante $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ que converge a un conjunto de perímetro finito E de volumen $m_0 v \leqslant |E| < v$. El conjunto E es un conjunto isoperimétrico de volumen $|E|$ y, por tanto, acotado por el lema 4.6 de [4]. Por la proposición 2.1, la sucesión $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ se puede reemplazar por otra sucesión minimizante $\{E_k^c \cup E_k^d\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $E_k^c \to E$ y E_k^d diverge. Más aún, $\{E_k^d\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión minimizante de volumen $v - |E|$. Por tanto se obtiene:

$$I_M(|E|) + I_M(v - |E|) = I_M(v).$$

Si $|E| = v$, hemos terminado puesto que $P(E) \leqslant \liminf_{k\to\infty} P(E_k) = I_M(|E|)$ y, por tanto, E es una región isoperimétrica. Supongamos entonces que $|E| < v$ y observamos que $|E| \geqslant m_0 v$, y que E es una región isoperimétrica de volumen $|E|$. La sucesión minimizante puede romperse en dos trozos: uno de ellos converge a E y el otro diverge. La parte divergente es una sucesión minimizante de volumen $v - |E|$. Tomamos $F_0 := E$.

Aplicamos de nuevo los argumentos previos a la parte divergente de la sucesión, que es minimizante para volumen $v - |E|$. Trasladamos los conjuntos para capturar parte del volumen y obtenemos una nueva región isoperimétrica F_1 de volumen:

$$v - |F_0| \geqslant |F_1| \geqslant m_0(v - |F_0|),$$

y una nueva sucesión divergente minimizante de volumen $v - |F_0| - |F_1|$. Por inducción obtenemos una sucesión de regiones isoperimétricas $\{F_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de modo que el volumen de F_k satisface:

$$|F_k| \geqslant m_0\left(v - \sum_{i=0}^{k-1} |F_i|\right).$$

Por tanto obtenemos:

$$\sum_{i=0}^{k} |F_i| \geqslant (k+1)m_0 v - k m_0 \sum_{i=0}^{k-1} |F_i| \geqslant (k+1)m_0 v - k m_0 \sum_{i=0}^{k} |F_i|.$$

En consecuencia:

$$\sum_{i=0}^{k} |F_i| \geqslant \frac{(k+1)m_0 v}{1 + k m_0}.$$

Tomando límites cuando $k \to \infty$ obtenemos:

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=0}^{k} |F_i| = v.$$

Más aún:

$$\sum_{i=0}^{\infty} P(F_i) = I_M(v).$$

Cada región F_i es acotada, de modo que podemos situarlas en M, utilizando el grupo de isometrías, de modo que están a distancia positiva unas de otras (por ejemplo, cada una contenida en anillos disjuntos centrados en un punto dado). Por tanto $F := \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i$ es una región isoperimétrica de volumen v. De hecho, F debe ser acotada por el lema 6.4 de [4], de modo que sólo necesitamos un número finito de pasos para recuperar todo el volumen. $\square$

Agradecimientos

Ambos autores han sido financiados por el proyecto “Desigualdades isoperimétricas en espacios de medida métricos”, MTM2010-21206-C02-01.

Referencias

[1] Luigi Ambrosio. Some fine properties of sets of finite perimeter in Ahlfors regular metric measure spaces. *Adv. Math.*, 159(1):51–67, 2001.

[2] Luca Capogna, Donatella Danielli, Scott D. Pauls, and Jeremy T. Tyson. *An introduction to the Heisenberg group and the sub-Riemannian isoperimetric problem*, volume 259 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2007.

[3] Sagun Chanillo and Paul C. Yang. Isoperimetric inequalities & volume comparison theorems on CR manifolds. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, 8(2):279–307, 2009.

[4] Matteo Galli and Manuel Ritoré. Existence of isoperimetric regions in contact sub-Riemannian manifolds. arXiv:1011.0633v1, 2010.

[5] Nicola Garofalo and Duy-Minh Nhieu. Isoperimetric and Sobolev inequalities for Carnot-Carathéodory spaces and the existence of minimal surfaces. *Comm. Pure Appl. Math.*, 49(10):1081–1144, 1996.

[6] Enrico Giusti. *Minimal surfaces and functions of bounded variation*, volume 80 of *Monographs in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1984.

[7] David Jerison. The Poincaré inequality for vector fields satisfying Hörmander’s condition. *Duke Math. J.*, 53(2):503–523, 1986.

[8] G. P. Leonardi and S. Rigot. Isoperimetric sets on Carnot groups. *Houston J. Math.*, 29(3):609–637 (electronic), 2003.

[9] Michele Miranda, Jr. Functions of bounded variation on "good" metric spaces. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 82(8):975–1004, 2003.

[10] Frank Morgan. Clusters minimizing area plus length of singular curves. *Math. Ann.*, 299(4):697–714, 1994.

[11] Frank Morgan. *Geometric measure theory*. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, fourth edition, 2009. A beginner's guide.

[12] Pierre Pansu. Une inégalité isopérimétrique sur le groupe de Heisenberg. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 295(2):127–130, 1982.

[13] Manuel Ritoré. Constant geodesic curvature curves and isoperimetric domains in rotationally symmetric surfaces. *Comm. Anal. Geom.*, 9(5):1093–1138, 2001.

[14] Manuel Ritoré. The isoperimetric problem in complete surfaces of nonnegative curvature. *J. Geom. Anal.*, 11(3):509–517, 2001.

Florentino García Santos: In Memoriam
Universidad de Granada, 2011, págs. 69–75

La ecuación de Codazzi para superficies

José A. Gálvez

Resumen En estas notas hacemos un uso abstracto de la ecuación de Codazzi de una superficie de $\mathbb{R}^3$. Exponemos algunos usos no estándar de la ecuación tanto en teoría de superficies (teorema de Cohn-Vossen y unicidad al problema de Minkowski) como en EDPs de segundo orden.

1. Introducción

La *ecuación de Codazzi* para una superficie inmersa Σ en $\mathbb{R}^3$ viene dada por

$$\nabla_X SY - \nabla_Y SX - S[X,Y] = 0, \qquad X,Y \in \mathfrak{X}(\Sigma), \tag{53}$$

donde ∇ denota la conexión de Levi-Civita de la métrica inducida (o primera forma fundamental) I sobre Σ y S es el endomorfismo de Weingarten, definido por $II(X,Y) = I(S(X),Y)$, siendo II la segunda forma fundamental de la superficie. Esta ecuación de Codazzi es, junto con la ecuación de Gauss, una de las dos condiciones de integrabilidad clásicas para superficies en $\mathbb{R}^3$.

Es importante observar que la ecuación de Codazzi (53) permanece invariable en los espacios modelo $\mathbb{S}^3$ y $\mathbb{H}^3$, e incluso también para las superficies espaciales en los espacios modelos lorentzianos tridimensionales. Esto, junto con el hecho de que algunos resultados cruciales de la teoría de superficies en $\mathbb{R}^3$ sólo dependan en esencia de la ecuación de Codazzi, hace que dichos resultados se extiendan de forma directa al resto de espacios modelos (semi-)riemannianos.

Algunos teoremas que ilustran este hecho son, por ejemplo, el teorema de Hopf que prueba que las esferas totalmente umbilicales son las únicas esferas topológicas inmersas con curvatura media constante, o el teorema de Liebmann que caracteriza a las esferas totalmente umbilicales como las únicas superficies completas con curvatura positiva constante.

La ecuación de Codazzi (53) aparece también de manera natural en otros contextos. Así, una formulación abstracta para la ecuación anterior sería idónea para que un resultado pueda ser usado en diferentes contextos a la vez. En este sentido, veremos que algunos resultados aparentemente no relacionados y probados históricamente de manera independiente son desde este punto de vista abstracto el mismo.

José A. Gálvez, *jagalvez@ugr.es*
Dep. Geometría y Topología, Facultad de Ciencias, Universidad de Granada, 18071-Granada

El artículo comienza con una introducción a los conceptos de par de Codazzi y elementos relacionados y en las dos secciones siguientes se exponen algunos usos no estándar tanto en teoría de superficies (teorema de Cohn-Vossen y unicidad al problema de Minkowski) como en EDPs de segundo orden.

2. Pares de Codazzi

Comenzaremos describiendo el marco de trabajo en el que vamos a establecer nuestros resultados.

Definición 2.1. *Un par fundamental sobre una superficie* Σ *es un par de formas cuadráticas reales* (I, II) *sobre* Σ*, donde* I *es una métrica riemanniana.*

Asociado a un par fundamental (I, II) se define el endomorfismo de Weingarten S del par como

$$II(X, Y) = I(S(X), Y).$$

De esta manera, se definen la curvatura media, la curvatura extrínseca y las curvaturas principales del par, respectivamente, como la mitad de la traza, el determinante y los autovalores del endomorfismo S. Finalmente, se define la diferencial de Hopf del par como la parte (2,0) de II respecto de la métrica riemanniana I.

Es claro que los conceptos anteriores, aunque más generales, coinciden con los clásicos para una superficie riemanniana inmersa en una variedad tridimensional cuando I es su métrica inducida y II es su segunda forma fundamental.

Definición 2.2. *Se dice que un par fundamental* (I, II) *sobre una superficie* Σ*, con endomorfismo de Weingarten* S*, es un par de Codazzi si se satisface la ecuación*

$$\nabla_X SY - \nabla_Y SX - S[X, Y] = 0, \qquad X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma), \tag{54}$$

donde ∇ *es la conexión de Levi-Civita asociada a la métrica* I*.*

Gran cantidad de pares de Codazzi aparecen de manera natural en el estudio de superficies. Por ejemplo, la primera y segunda formas fundamentales de una superficie isométricamente inmersa en un espacio modelo riemanniano tridimensional forman un par de Codazzi. Lo mismo ocurre para superficies espaciales en un espacio modelo tridimensional lorentziano. En general, si una superficie inmersa en un espacio modelo (semirriemaniano) n-dimensional posee un normal paralelo N, entonces su métrica inducida y la segunda forma fundamental asociada a N forman un par de Codazzi.

Pares de Codazzi también surgen clásicamente en el estudio de aplicaciones armónicas. Además, otros muchos ejemplos de pares de Codazzi aparecen en [1, 3, 9, 10]. De esta manera entenderemos que los resultados que ahora presentamos pueden ser usados en contextos muy diferentes.

3. El teorema de Cohn-Vossen

En esta sección expondremos un ejemplo en el que el uso abstracto de la ecuación de Codazzi da lugar a dos resultados aparentemente no relacionados. Para ello comenzaremos con un lema técnico.

Lema 3.1. *Sea (I, II) un par de Codazzi sobre una esfera topológica Σ. Si A es una métrica riemanniana sobre Σ tal que la curvatura media del par (A, II) es cero, entonces $II \equiv 0$.*

Demostración. Sea z un parámetro conforme local para la métrica A. Ya que la curvatura media del par (A, II) es cero se tiene que

$$II = Q\,dz^2 + \overline{Q}\,d\overline{z}^2,$$

es decir, la parte $(1,1)$ de II respecto a A es nula.

De esta manera, usando la expresión de II y la ecuación de Codazzi, se tiene que

$$\begin{aligned} Q_{\overline{z}} &= \frac{\partial}{\partial \overline{z}} II\left(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial \overline{z}} I\left(S\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \\ &= I\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial \overline{z}}} S\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\right) + I\left(S\frac{\partial}{\partial z}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial \overline{z}}}\frac{\partial}{\partial z}\right) \\ &= I\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial z}} S\frac{\partial}{\partial \overline{z}}, \frac{\partial}{\partial z}\right) + II\left(\frac{\partial}{\partial z}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial \overline{z}}}\frac{\partial}{\partial z}\right) \\ &= -II\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial z}}\frac{\partial}{\partial z}\right) + II\left(\frac{\partial}{\partial z}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial \overline{z}}}\frac{\partial}{\partial z}\right) \\ &= -\Gamma_{11}^2\overline{Q} + \Gamma_{12}^1 Q. \end{aligned}$$

Por tanto, $|Q_{\overline{z}}| \leq f|Q|$ para cierta función continua f. Esto indica que Qdz^2 es una diferencial cuadrática con ceros aislados y de índice negativo, o bien Q se anula idénticamente (ver, por ejemplo, [2] o [8]). Pero como nuestra superficie Σ es una esfera topológica el teorema del índice de Poincaré nos dice que $Q \equiv 0$ y, por tanto, $II \equiv 0$ como queríamos probar. □

Como consecuencia de este resultado obtenemos una versión abstracta del teorema de Cohn-Vossen que, como veremos, tiene diferentes consecuencias no elementales.

Teorema 3.1 (Cohn–Vossen - versión abstracta))**.** *Sean I una métrica riemanniana sobre una esfera topológica Σ y (I, II_1), (I, II_2) dos pares de Codazzi. Si las curvaturas extrínsecas de ambos pares coinciden y son positivas, esto es,*

$$K(I, II_1) = K(I, II_2) > 0,$$

entonces $II_1 \equiv \pm II_2$.

Demostración. Como $K(I, II_j) > 0$ se obtiene que II_j es globalmente definida positiva o definida negativa, $j = 1, 2$. Así, salvo cambio de signo, podemos suponer que II_1 y II_2 son definidas positivas.

Consideremos $A = II_1 + II_2$ que es una métrica riemanniana. Como $K(I, II_1) = K(I, II_2)$ se obtiene de forma sencilla que la curvatura media del par $(A, II_1 - II_2)$ es cero.

Pero es claro que $(I, II_1 - II_2)$ es un par de Codazzi ya que (I, II_1) y (I, II_2) lo son, por lo que usando el lema anterior sobre el par $(I, II_1 - II_2)$ y la métrica A obtenemos que $II_1 - II_2 \equiv 0$ como queríamos demostrar. □

El teorema clásico de Cohn-Vossen afirma:

Todo ovaloide en $\mathbb{R}^3$ es rígido.

Esto es una consecuencia directa de la versión abstracta del teorema. Para ello basta tener en cuenta que un ovaloide Σ en $\mathbb{R}^3$ ha de ser una esfera topológica y además dos inmersones isométricas de Σ en $\mathbb{R}^3$ han de tener igual curvatura extrínseca por el teorema de Gauss y, así, igual segunda forma fundamental por la versión abstracta del teorema de Cohn-Vossen. De esta forma, ambas inmersiones serían la misma salvo movimientos rígidos.

Observemos que la versión abstracta puede ser también usada para obtener la rigidez de ovaloides en $\mathbb{S}^3, \mathbb{H}^3, \mathbb{S}^3_1$ o $\mathbb{H}^3_1$. Pero además puede ser usado para demostrar resultados aparentemente no relacionados.

El problema de Minkowski puede ser enunciado como sigue:

> Sea $\rho : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable positiva. ¿Existe un ovaloide Σ en $\mathbb{R}^3$ con aplicación de Gauss $N : \Sigma \longrightarrow \mathbb{S}^2$ tal que su curvatura de Gauss cumpla $K_\Sigma(N^{-1}(p)) = \rho(p)$ para todo $p \in \mathbb{S}^2$?

La unicidad de solución a este problema también es consecuencia directa de la versión abstracta del teorema de Cohn-Vossen.

Corolario 3.1. *Sea $\rho : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable positiva. Si Σ_1 y Σ_2 son dos soluciones al problema de Minkowski asociado, entonces coinciden salvo traslación.*

Demostración. Sean $\psi_1, \psi_2 : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dos inmersiones con igual aplicación de Gauss N e igual curvatura de Gauss $\rho > 0$.

Ya que la tercera forma fundamental de una inmersión viene dada por

$$III := \langle dN, dN \rangle \equiv -K\, I + 2H\, II,$$

entonces las terceras formas fundamentales de ambas inmersiones coinciden.

Un hecho importante es que (I, II) es un par de Codazzi si y sólo si (III, II) es un par de Codazzi [9].

Como la curvatura extrínseca de los pares de Codazzi (III_1, II_1) y (III_2, II_2) asociados a las inmersiones ψ_1 y ψ_2, respectivamente, cumplen que sus curvaturas extrínsecas

$$K(III_1, II_1) = \frac{1}{K(I_1, II_1)} = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{K(I_2, II_2)} = K(III_2, II_2),$$

la versión abstracta del teorema de Cohn-Vossen afirma que $II_1 = II_2$. Y como

$$I_j = -K(III_j, II_j)III_j + 2H(III_j, II_j)II_j, \qquad j \in \{1, 2\},$$

obtenemos que $I_1 = I_2$.

Es decir, la métrica inducida y la segunda forma fundamental de ambas inmersiones coinciden. Por tanto, las dos inmersiones coinciden salvo movimientos rígidos, pero como tienen igual normal unitario, el movimiento rígido ha de ser una traslación. $\square$

4. Ecuaciones en derivadas parciales

Otro uso de los pares de Codazzi aparece en el estudio de ciertas EDPs de segundo orden. Para ello, sea (I, II) un par de Codazzi sobre una superficie Σ con curvatura media H y curvatura extrínseca K que satisface una relación no trivial del tipo

$$W(H, K) = 0.$$

Aquí, W es una función diferenciable definida sobre un abierto de $\mathbb{R}^2$ que contiene al conjunto de puntos $\{(H(p), K(p)) : \ p \in \Sigma\}$.

Si

$$\frac{d}{dt} W(t, t^2) \neq 0 \qquad \text{para todo } t, \text{ con } t^2 = H^2 = K, \tag{55}$$

entonces los puntos umbilicales de (I, II) son aislados y de índice negativo, o bien el par es totalmente umbilical.

Diversas demostraciones de este hecho en $\mathbb{R}^3$ o $\mathbb{H}^3$ han sido dadas por Hopf [7], Chern [5], Hartman y Winter [6], Bryant [4] o Alencar, do Carmo y Tribuzy [2], y su extensión abstracta es sencilla.

Proposición 4.1. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un disco topológico cerrado y $f(x, y)$ una función diferenciable definida sobre Ω que satisface una relación no trivial del tipo*

$$W(f_{xx} + f_{yy}, f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2) = 0. \tag{56}$$

Si W cumple (55) y para una parametrización $\alpha(t)$ del borde de Ω se tiene que

$$\frac{d}{dt}(f_x(\alpha(t)), f_y(\alpha(t))) \text{ es proporcional a } \alpha'(t), \tag{57}$$

entonces existe una constante c_0 tal que $f(x, y) = c_0(x^2 + y^2)$.

Demostración. Observemos que podemos obtener un par de Codazzi en términos de la función diferenciable $f(x,y)$ definiendo

$$I = dx^2 + dy^2, \qquad II = f_{xx}\,dx^2 + 2f_{xy}\,dx\,dy + f_{yy}\,dy^2.$$

Este par tiene curvatura media y extrínseca dadas por

$$H = f_{xx} + f_{yy}, \qquad K = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2,$$

por lo que (56) puede escribirse como $W(H,K) = 0$.

Por tanto, los puntos umbilicales del par son aislados y de índice negativo y, además, de (57) se tiene que el borde del dominio Ω es línea de curvatura del par. Así, el teorema del índice de Poincaré nos dice que el par ha de ser totalmente umbilical.

De esta manera obtenemos que $f_{xx} = f_{yy}$ y $f_{xy} = 0$, y si derivamos

$$(f_{xx})_y = (f_{xy})_x = 0, \qquad (f_{xx})_x = (f_{yy})_x = (f_{xy})_y = 0,$$

de donde existe una constante c_0 tal que $f_{xx} = f_{yy} = 2c_0$, por lo que

$$f(x,y) = c_0(x^2 + y^2)$$

como queríamos probar □

Este resultado puede ser usado para EDPs muy generales como $f_{xx} + f_{yy} = cte$ o $f_{xx}fyy - fxy^2 = cte \neq 0$.

Referencias

[1] J. A. Aledo, J. M. Espinar, J. A. Gálvez, Complete surfaces of constant curvature in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, *Calc. Variations & PDE's*, **29** (2007), 347–363.

[2] H. Alencar, M. do Carmo, R. Tribuzy, A theorem of H. Hopf and the Cauchy-Riemann inequality, *Comm. Anal. Geom.*, **15** (2007), 283–298.

[3] I. Bivens, J. P. Bourguignon, A. Derdzinski, D. Ferus, O. Kowalski, T. Klotz-Milnor, V. Oliker, U. Simon, W Strübing, K. Voss, *Discussion on Codazzi-tensors.* 243–299, Lecture Notes in Math., 838, Springer, Berlin-New York, 1981.

[4] R. L. Bryant, Complex Analysis and Weingarten Surfaces, (1984), *Non submitted*.

[5] S. S. Chern, On special $W-$surfaces, *Proc. Am. Math. Soc.*, **6** (1955), 783–786.

[6] P. Hartman, W. Winter, Umbilical points and $W-$surfaces, *Amer. J. Math.*, **76** (1954), 502–508.

[7] H. Hopf, Differential Geometry in the large, *Springer Verlag*, Berlín, 1983.

[8] J. Jost, *Two-dimensional geometric variational problems*, John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 1991.

[9] T. K. Milnor, Abstract Weingarten Surfaces, *J. Diff. Geom.*, **15** (1980), 365–380.

[10] V. Oliker, U. Simon, Codazzi tensors and equations of Monge-Ampère type on compact manifolds of constant sectional curvature, *J. Reine Angew. Math.*, **342** (1983), 35–65.

Florentino García Santos: In Memoriam
Universidad de Granada, 2011, págs. 77–86

Un problema variacional geométrico: Las curvas elásticas de J. Bernoulli

Óscar J. Garay

Resumen La exposición a las enseñanzas de Floro durante mis años de Licenciatura, tuvo para mí una secuela muy importante: el contagio de su pasión por la Geometría, en especial, cuando estaba relacionada con problemas clásicos. No se me ocurre nada mejor para honrar su memoria, que esta pequeña contribución sobre el maravilloso desarrollo de las curvas elásticas y su conexión con la Geometría. Estoy seguro de que él lo disfrutará con agrado, allá donde esté ahora.

1. Introducción

El estudio de las curvas elásticas tiene su origen en un problema de la teoría de elasticidad que se comenzó a analizar en los albores del siglo XVIII: *El problema de la barra flexible*. En este problema se trata de determinar la forma final que adoptará una barra (o lámina) flexible en equilibrio, cuando está sometida a la acción de fuerzas externas en sus extremos.

En una carta abierta datada en 1691, Jakob Bernoulli propuso el análisis del problema de la barra flexible desde una perspectiva científica. En una serie de artículos aparecidos tres años más tarde en *Acta eruditorum*, él mismo publicó su propia solución al problema (para más detalles véase [6]). Entre las principales contribuciones aportadas por J. Bernoulli en dicho trabajo, podemos mencionar, primero, el establecimiento de una relación entre el momento de flexión de la lámina con su radio de curvatura, y, segundo, la derivación de una fórmula para la determinación de éste usando el recientemente introducido Cálculo Diferencial de Leibniz. De esta forma fue J. Bernoulli quien primero estableció la ecuación diferencial de las elásticas, al menos para algunos casos concretos, pues, en efecto, su trabajo se centró en el estudio de la llamada *elástica rectangular*, en el que las fuerzas externas actúan sólo sobre uno de los extremos de la lámina, haciendo ángulo recto con la dirección de la misma en dicho punto. La restricción al caso rectangular fue la base de la crítica de Huygens al método de trabajo de J. Bernoulli, ya que, en una nota aparecida en la misma revista en septiembre de 1694, Huygens destaca la existencia de otras posibles

Óscar J. Garay, *oscarj.garay@ehu.es*
Dep de Matemáticas, Facultad de Ciencia y Tecnología, Universidad del País Vasco, Apdo 644, 48080-Bilbao

configuraciones para la elástica que habrían sido pasadas por alto en el trabajo de J. Bernoulli.

El trabajo pionero e incompleto de J. Bernoulli fue, probablemente, una de las principales motivaciones que despertaron el interés de L. Euler en la materia. En 1744, L. Euler publicó su tratado sobre el cálculo de variaciones *Methodus inveniendi lineas curvas...*, [5], en cuyo apéndice, *De curvis elasticis*, resume sus logros sobre las elásticas culminando una investigación que había comenzado en 1732. Euler comienza su estudio usando el cálculo variacional que, previamente, había introducido en su tratado, para obtener una forma más general de la ecuación diferencial de las elásticas de J. Bernoulli válida, también, los casos no tratados por éste. De este modo, Euler demostraba una conjetura de David Bernoulli, sobrino de J. Bernoulli, quien, en una carta de 1742, le había sugerido que la ecuación de la curva elástica se debería poder obtener como consecuencia de la minimización de la energía $\int_\gamma \frac{ds}{R^2}$ (aquí la barra elástica se idealiza como una curva γ, s es el parámetro arco de dicha curva, R representa su radio de curvatura, y la integración se realiza a lo largo de toda la longitud de la curva). Evidentemente, D. Bernoulli estaba apelando al *principio de mínima acción* que algunos autores de aquella época, como P. Laplace, G.W. Leibniz, J.L. Moreau de Mapertuis, L. Euler y el propio D. Bernoulli, estaban empezando a formular como una ley esencial de la mecánica. Está claro que Euler aprovechó esta circunstancia para usar las elásticas como una bonita aplicación de su recién introducido cálculo de variaciones, sin embargo, su trabajo sobre las curvas elásticas se centró en la determinación de las diferentes formas que una lámina en equilibrio puede adoptar cuando distintas fuerzas actúan sobre sus extremos. En definitiva, Euler obtuvo soluciones gráficas para ciertas integrales elípticas (véase la Figura 1), aunque actualmente se pueden obtener parametrizaciones explícitas para las curvas elásticas planas en términos de las funciones elípticas de Jacobi.

En un lenguaje moderno, para derteminar la forma en equilibrio de una barra elástica sometida a fuerzas externas en ambos extremos, el modelo de D. Bernoulli propone minimizar la *energía de flexión* de la barra. Dicha energía está dada por

$$\mathcal{F}_\lambda^2(\gamma) = \int_\gamma (\kappa^2 + \lambda) \cdot ds \,, \tag{58}$$

donde κ denota la curvatura de la curva γ (que representa idealmente a la barra), y λ es un multliplicador de Lagrange asociado a una (eventual) ligadura sobre la longitud de la curva.


METHODUS
INVENIENDI
LINEAS CURVAS
Maximi Minimive proprietate gaudentes,
SIVE
SOLUTIO
PROBLEMATIS ISOPERIMETRICI
LATISSIMO SENSU ACCEPTI.
AUCTORE
LEONHARDO EULERO,
Professore Regio, & Academiæ Imperialis Scientiarum PETROPOLITANÆ Socio.
SUPRA INVIDIAM
LAUSANNÆ & GENEVÆ,
Apud MARCUM-MICHAELEM BOUSQUET & Socios.
MDCCXLIV.

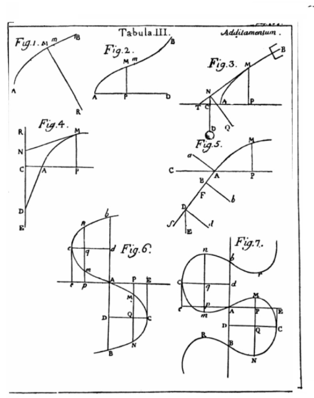

Figure 1: Construcción de las elásticas planas de Euler.

Por otra parte, el estudio de las curvas elásticas cerradas tiene un significado geométrico especial. J. Langer and D. Singer en 1987 and N. Koiso en 1993 [7], demostraron, usando métodos diferentes, la existencia de curvas elásticas cerradas en variedades riemannianas compactas (siempre que no existan geodésicas cerradas de la misma longitud). Desde entonces, se han dedicado muchos esfuerzos a la clasificación de las elásticas cerradas en los espacio modelo reales, donde el problema está prácticamente resuelto (véanse, por ejemplo, los trabajos [7], [13], [19].

A comienzos del siglo XX G.A. Bliss (1907), J. Radon (1910) [15] y W. Blaschke (1930) [2] genenalizaron el estudio de las elásticas, no sólo a curvas de $\mathbb{R}^3$, sino que, también, a funcionales energéticos del tipo

$$\mathcal{F}(\gamma) = \int_\gamma f(\kappa) \cdot ds \,, \tag{59}$$

donde $f(t)$ es una función C^∞ y la energía actúa sobre ciertos espacios de curvas. Poco más tarde, R. Irrgang (1933) [9] y L.A. Santaló [17] consideraron energías que, además de la curvatura, tenían en cuenta otro invariante geométrico esencial como la *torsión* de la curva τ

$$\mathcal{F}(\gamma) = \int_\gamma f(\kappa, \tau) \cdot ds \,. \tag{60}$$

Más generalmente, uno se puede plantear el estudio de Lagrangianos dependientes de todas las curvaturas de Frenet de una curva regular. Así, si γ es una curva regular inmersa en una variedad pseudoriemanniana n-dimensional, $\mathbb{M}^n$, y representamos por $\kappa_1, \kappa_2, \cdots, \kappa_{n-1}$, sus $n-1$ curvaturas Frenet, es interesante estudiar curvas que minimizan la energía

$$\mathcal{F}(\alpha) = \int_\alpha f\left(\kappa_1, \kappa_2, \cdots, \kappa_{n-1}\right)(s) \cdot ds\,, \qquad (61)$$

en espacios de curvas sujetas a ciertas condiciones de frontera. En este sentido, podemos afirmar que el problema de las elásticas y sus generalizaciones se ha convertido en un *problema variacional de tipo geométrico*.

Para elecciones adecuadas de la densidad Lagrangiana, los puntos críticos de este tipo de energías incluyen: geodésicas; elásticas clásicas; elásticas circulares en reposo; curvas hiperelásticas; elásticas cerradas con condiciones isoperimétricas; etc... Como veremos después, esta familia de funcionales no sólo tiene interés intrínseco, sino que, además, tienen aplicaciones importantes a otras áreas de conocimiento.

Siendo su origen un problema variacional clásico, en general, para el análisis de este tipo de problemas se han usado métodos directos del cálculo de variaciones desde un punto de vista Lagrangiano. No obstante, recientemente se han introducido otro tipo de técnicas de carácter marcadamente geométrico. Así, Langer y Singer hicieron uso de campos de Killing, expresados en términos de los invariantes de la curva, para integrar las ecuaciones de Eluler-Lagrange del problema. Otras aportaciones de técnicas geométricas se han conseguido desde la perspectiva de los sistemas diferenciales exteriores, [3], o desde un enfoque hamiltoniano del problema, [19].

Como es natural, existe una vasta literatura sobre el tema, pero un análisis exahustivo sobrepasaría los límites del presente trabajo. El lector interesado puede consultar, por ejemplo, los trabajos recopilatorios [6], [7] y [19].

2. Algunas aplicaciones en Física, Biofísica y Geometría

Mostraremos en esta sección que el problema variacional de las elásticas (y sus sucesivas generalizaciones), no sólo tiene interés en sí mismo como problema variacional clásico, sino que, también, tiene importantes e interesantes aplicaciones en Física, Biofísica y, por supuesto, en otras áreas de las Matemáticas. En general, podemos decir que mientras que en Física y Biofísica se pueden utilizar para construir modelos de interés en el mundo real, en Matemáticas se usan para construir algoritmos aplicables en el contexto de subvariedades que son minimizadoras de energías de orden superior.

2.1. Modelos de partículas relativistas

La familia de funcionales descritos en §1 se puede utilizar para ofrecer distintos modelos de partículas relativistas en ambientes pseudoriemannianos n-dimesionales, $\mathbb{M}^n$. Las densidades Lagrangianas que describen la evolución de dichas partículas tienen una larga historia en Física, sin embargo, los modelos geométricos más recientes sirven para describir su comportamiento de una manera intrínseca. Así, si γ es una curva regular que describe la trayectoria de una partícula en un espacio-tiempo $\mathbb{M}^n$ (generalmente, $\mathbb{M}^n$ se toma como una variedad Riemanniana o Lorentziana), nos encontramos con que el movimiento de dicha partícula está determinado por una densidad Lagranagiana del tipo (61). Además, resulta que para este tipo de funcionales las ecuaciones de Euler-Lagrange se pueden describir en términos de las curvaturas de Frenet, lo que es paticularmente útil en el caso de que el espacio ambiente sea un espacio-tiempo de curvatura constante, en cuyo caso las curvaturas de Frenet proporcionan una descripción cinemática completa del movimiento de la partícula.

Como casos particulares de esta situación podemos considerar $P(\kappa_1, \cdots, \kappa_{n-1}) = m$, con m constante, que se corresponde con el modelo de las geodésicas y describe el movimiento de partículas en caida libre de $\mathbb{M}^n$. Por otra parte, las trayectorias de bosones sin masa se pueden describir usando la energía curvatura total $P(\kappa_1, \cdots, \kappa_{n-1}) = m\,\kappa_1$, mientras que una ligadura sobre la longitud añadida a este funcional serviría como modelo para bosones con masa. Otros modelos interesantes de partículas relativistas están definidos por $\mathcal{F}_{mnp}(\alpha) = \int_\alpha (m + n\,\kappa_1 + p\,\kappa_2)\, ds$ donde $m, n, p \in \mathbb{R}$ (véase [1]).

En ambientes Riemannianos y Lorentzianos los modelos anteriores están bien estudiados en la esfera y en el espacio anti de Sitter 3-dimensionales $\mathbb{A}\mathrm{d}\mathbb{S}_3$. En particular, las líneas de universo de partículas relativistas con masa y spin no nulos son hélices en $\mathbb{A}\mathrm{d}\mathbb{S}_3$ y el conjunto de soluciones posibles está formado por una familia uniparamétrica de hélices no congruentes. Cuando las densidades Lagrangianas dependen tanto de la curvatura como de la torsión en espacios Loretzianos 3-dimensionales de curvatura constante, el espacio de posibles trayectorias son familias de curvas de Lancret (para mayor detalle de estos aspectos, véanse [1] y las referencias allí citadas).

2.2. De las membranas en Biofísica a la teoría de cuerdas

La investigación de superficies que son minimizadoras de energías libres cuadráticas en las curvaturas principales es muy relevante en el estudio de muchos sistemas físicos. Son útiles, por ejemplo, en la descripción teórica de sistemas anfifílicos. Anfífilos bien conocidos son los surfactantes (útiles en la industria petrolera o en la fabricación de jabones y limpiadores), o los lípidos, que son el componente básico de las biomembranas.

La Física de estos sistemas está determinada por sus interfases. En los sistemas binarios, los anfífilos se autoensamblan formando bicapas conocidas como membranas fluidas. De esta manera las superficies de $\mathbb{R}^3$ se pueden considerar como un modelo idealizado de las interfases que aparecen en procesos materiales concretos: biomembranas; películas y pompas de jabón; láminas elásticas; etc... La energía libre que controla estos procesos depende de la geometría de la interfase y de sus propiedades elásticas, de manera que la forma de la membrana se corresponde con el estado de equilibrio o de energía mínima del sistema. De esta manera, bajo condiciones ideales se puede suponer que la densidad Lagrangiana dependerá, no sólo de constantes físicas asociadas a las condiciones concretas del sistema (tensión superficial, módulo de elasticidad, etc...), sino también de la geometría de la interfase: su curvatura. Así, en estos modelos, la energía que controla la forma de la interfase S viene dada por

$$\mathcal{E}(S) = \int_S (a + b(H - c_o)^2 + c\,K) \cdot dA\,, \tag{62}$$

donde $a, b, c, c_o \in \mathbb{R}$ son constantes físicas (c_o es la llamada curvatura espontánea, encargada de medir una posible asimetría inicial de la bicapa), K y H son las curvaturas de Gauss y Media de la interfase S, y dA es el elemento de area de la superficie.

Este tipo de modelos han sido consderados por diversos autores como S.D. Poisson (1812), G.R. Kirchhoff (1850), A.E.H. Love (1906) y más recientemente, por P.B. Canhman y W. Helfrich en un contexto biofísico. T. Thomsem, H. Hopf and T.J. Willmore los han estudiado desde un punto de vista puramente matemático. En particular, el caso más sencillo de energía elástica para superficies se corresponde con la *energía de flexión* on *energía de Willmore*

$$\mathcal{W}(S) = \int_S H^2 \cdot dA \tag{63}$$

cuyos mínimos (o, más generalmente, puntos críticos), que ya fueron estudiados por S. Germain, se conocen con el nombre de superficies de Willmore. Este funcional tiene un papel fundamental en el estudio teórico de las posibles formas que pueden adoptar las membranas biológicas elásticas en equilibrio, y en el análisis de otras objetos físicos importantes como los cristales líquidos, polímeros, filamentos, ADN, etc..., [11], [14].

Desde un punto de vista matemático el problema de la determinación de las posibles formas de la membranas es un problema variacional con condiciones de frontera de muy difícil solución. Los resultados más interesantes que se han obtenido en esta dirección tienen que ver con la existencia de minimizadores de una clase topológica determinada. Sin embargo, para los físicos y biofísicos un problema más importante es la determinación de soluciones explícitas que puedan servir para derivar propiedades físicas del sistema. Un inconveniente grave en este sentido es que se conocen muy pocas soluciones explícitas no triviales y, la mayoría de las que se conocen se han obtenido mediante procedimientos numéricos bajo la hipótesis adicional de que las membranas sean geométricamente simples (tienen diversos tipos de simetrías, [18]. Vesículas con topología más compleja has sido también estudiadas numéricamente y su existencia ha sido testada en el laboratorio, [10].

Afortunadamente, las curvas elásticas se pueden usar para construir soluciones explícitas de la ecuación de forma para las membranas. J.C.C. Nitsche demostró que las membranas cilíndricas tienen que estar construidas sobre elásticas planas. J. Langer y D. Singer demostraron que las membranas con simetría rotacional son, precisamente, las que están modeladas sobre curvas elásticas del plano hiperbólico. Además, Hertrich-Jeromin ha probado que las superficies elásticas (de Willmore) foliadas por círculos tienen que ser conformemente equivalentes o bien a algunas de las superficies que se acaban de describir anteriormente, o bien a conos construidos sobre elásticas de la esfera. Mediante un procedimiento distinto, U. Pinkall ha obtenido membranas de Willmore a partir también de elásticas cerradas de la esfera (si bien, éstas son físicamente inestables).

Como vemos, las curvas elásticas tienen un papel destacado en la construcción de membranas elásticas, especialmente, superficies de Willmore. Pero, a su vez, las superficies de Willmore (y sus extensiones, las subvariedades de Chen-Willmore) tienen importantes aplicaciones a la teoría de Cuerdas, con lo que las elásicas y sus genalizaciones se pueden usar para obtener ejemplos concretos de cuerdas y, más generalmente, p-branas, según el modelo de Kleinert-Polyakov.

Los detalles correspondientes a esta sección se pueden consultar en [1], [7], [11], [14], [18].

2.3. Subvariedades Chen-Willmore

Las elásticas generalizadas tienen también aplicaciones al estudio de otros problemas variacionales en la teoría de subvariedades, como, por ejemplo, a las subvariedades de Chen-Willmore. En la década de 1960, B-Y Chen extendió de manera conforme el funcional energético de Thomsem-Willmore a subvariedades de cualquier variedad de Riemann. Los puntos críticos de la nueva energía se llaman subvariedades de *Chen-Willmore* e incluyen a las superficies de Willmore (membranas elásticas) como caso particular. Un aspecto importante dentro de esta nueva teoría es la búsqueda de ejemplos de subvariedades de Chen-Willmore de dimensión superior, siendo este un asunto considerablemente más complicado que el correspondiente de las membranas elásticas. Pues bien, haciendo uso de la invarianza conforme de la energía y del *principio de criticidad simétrica* de Palais, hemos descubierto un procedimiento bastante general para construir subvariedades de Chen-Willmore a partir de elásticas generalizadas, en los espacios conocidos como "productos retorcidos". Este procedimiento explicaría también algunas de las superficies elásticas mencionadas con anterioridad:

las membranas cilíndricas construidas sobre curvas elásticas planas; los toros elásticos modelados sobre curvas elásticas esféricas; y los toros de revolución modelados sobre elásticas del plano hiperbólico.

Más información sobre los resultados de esta sección, se puede encontrar en [1], [7], [19] .

2.4. Elásticas desde una perspectiva dinámica

El estudio de las elásticas como un problema de equilibrio geométrico está relacionado con un importante problema dinámico: El *problema del flujo del filamento*. El problema consiste en el estudio de la evolución de un *filamento de vórtices* aislado en un fluido incompresible e ideal (no viscoso). El modelo, originalmente formulado por L. Da Rios en 1906, viene determinado por la evolución de una curva $\gamma(s,t)$ (s es el parámetro arco de la cura y t es el tiempo) de acuerdo con el flujo *conocido como ecuación de inducción localizada* (LIE), $\gamma_t = \kappa B$, donde κ es la curvatura de la curva y B es su campo binormal. En la década de 1970, Hasimoto descubrió que las curvas elásticas evolucionan mediante movimientos rígidos. De hecho, los ejes centrales de los cables elásticos en $\mathbb{R}^3$, que son puntos críticos para un funcional del tipo (60), se mueven bajo el flujo LIE siguiendo una combinación de movimientos rígidos y un deslizamiento sobre el filamento, [19]. Hasimoto descubrió también, que este bonito problema geométrico es, esencialmente, equivalente a un superconocida ecuación diferencial en derivadas parciales: la ecuación de Schrödinger cúbica no lineal. Para más detalles, veánse [8] y [16].

2.5. Elásticas en el diseño gráfico por computador

Como una última prueba de la versatilidad de las elásticas en sus aplicaciones, mencionaremos una conexión establecida recientemente entre las curvas elásticas y el diseño gráfico computarizado. La relación clave entre las elásticas y la vision computarizada es su especial adaptabilidad al problema de interpolación. Por ello, las elásticas, consideradas como una especie de "splines"no lineales, se convierten en herramientas útiles para, por ejemplo, la reconstrucción de las líneas rotas o parcialmente ocultas que se producen al proyectar objetos 2 ó 3 dimensionales. Esta característica también las hace apropiadas, en el campo del diseño por ordenador, para la restauración de imágines incompletas de superficies 3-dimensionales. Para mayor detalle véase [4].

Agradecimientos

Trabajo financiado por los proyectos GIU10/23 de la UPV/EHU y MTM2010-20567 del MICINN, España.

Referencias

[1] M. Barros, Simple geometric models with applications to Physics, en *: Curvature and variational modeling in Physics and Biophysics*, AIP Conference Proceedings, 1002, Melville-New York, 2008, pp 71-113.

[2] W. Blaschke, *Vorlesungen über Differential Geometrie I*, Verlag from Julius Springer, Berlin, 1930.

[3] R. Bryant and P. Griffiths, Reduction of order for constrained variational problems and $\int_\gamma \frac{\kappa^2}{2} ds$, *Amer. J. Math.* **108** (1986), 525-570.

[4] T.F. Chan, S-H Kang y J-H Shen, Euler's elastica and curvature based impaintings, Prepublicación.

[5] L. Euler, *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici lattisimo sensu accepti*, Bousquet, Lausannae et Genevae E 65A., O.O. Ser. I, vol 24, 1744.

[6] C.G. Fraser, Mathematical tehcniques and physical conception in Euler's investigation of the elastica, *Centaurus* **34** (1991), 211-246.

[7] O.J. Garay, Extremals of the Generalized Euler-Bernoulli Energy and Applications, *J. Geom. Symmetry Phys.* **12** (2008), 27-61.

[8] H. Hasimoto, Motion of a vortex filament and its relation to elastica, *J. Phys. Soc. Japan* **31** (1971), 293.

[9] R. Irrgang, Ein singüres bewegungsinvariantes Varitationproblem, *Math. Z.* **37** (1933), 381-401.

[10] F. Jülicher, The morphology of vesicles of higher topological genus: conformal degeneracy and conformal modes, *J. Phys. II France* **6** (1996), 1797-1824.

[11] R. Kamien, The geometry of soft materials: a primer, *Rev. Mod. Phy.* **74** (2002), 953-971.

[12] N. Koiso, Elasticae in a Riemannian manifold, *Osaka J. Math.* **29** (1992), 539-543.

[13] J. Langer y D. Singer, The total squared curvature of closed curves, *J. Diff. Geom.* **20** (1984), 1-22.

[14] R. Lipowsky, The conformation of membranes, *Nature* **349** (1991), 475-481.

[15] J. Radon, Zum problem Lagrange, *Hamburg. Math. Einzel-schriften* Teubner, Leipzig, 1928.

[16] R. Ricca, The contributions of Da Rios and Levi-Civita to asymptotic potential theory and vortex filament dynamics, *Fluid Dynam. Res.* **18** (1996), 245-268.

[17] L.A. Santalo, Curvas sobre una superficie extremales de una función de la curvatura y torsión, *Abhndlungen der Hambrugische Universiteit* **20** (1956), 216-222.

[18] U. Seifert, Configurations of fluid membranes and vesicles, *Advances Phy.* **46** (1997), 13-137.

[19] D. Singer, Lectures on elastic curves and rods, en *: Curvature and variational modeling in Physics and Biophysics*, AIP Conference Proceedings, 1002, Melville-New York, 2008, pp 3-33.

Florentino García Santos: In Memoriam
Universidad de Granada, 2011, págs. 87–94

Estabilidad de superficies en la 3-esfera sub-riemanniana

Ana Hurtado • César Rosales

Resumen En estas notas estudiamos la estabilidad de superficies compactas en la 3-esfera sub-riemanniana, es decir, la propiedad de ser un mínimo de segundo orden del área bajo una restricción de volumen. En concreto, ofrecemos una demostración muy sencilla de un resultado probado en [6], en el que se establece que una superficie compacta y estacionaria de clase C^2 sin puntos singulares es inestable.

1. Geometría sub-riemanniana en $\mathbb{S}^3$

En este trabajo denotaremos por $p \cdot q$ y por $\langle p, q \rangle$ al producto cuaterniónico y escalar, respectivamente, de dos elementos $p, q \in \mathbb{R}^4$. La esfera unidad $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ con el producto de cuaternios es un grupo de Lie tridimensional, compacto y no conmutativo. Dado $p \in \mathbb{S}^3$, la traslación derecha asociada a p es el difeomorfismo definido por $q \mapsto q \cdot p$. El álgebra de Lie de los campos invariantes a la derecha en $(\mathbb{S}^3, \cdot)$ está generada por:

$$V(p) := i \cdot p, \qquad E_1(p) := j \cdot p, \qquad E_2(p) := k \cdot p,$$

donde i, j y k son las unidades cuaterniónicas complejas. El campo V es un *campo de Hopf* sobre $\mathbb{S}^3$, ya que es tangente a las fibras de la fibración de Hopf $\pi : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$ definida por $\pi(p) = \overline{p} \cdot i \cdot p$, donde $\overline{p}$ es el conjugado de p.

La *distribución horizontal* $\mathcal{H}$ en $\mathbb{S}^3$ es la distribución plana generada por los campos E_1 y E_2. Es claro que $\mathcal{H} = \text{Ker}(\omega)$, donde ω es la 1-forma de contacto sobre $\mathbb{S}^3$ dada por $\omega = x_1\, dy_1 - y_1\, dx_1 + x_2\, dy_2 - y_2\, dx_2$, donde (x_1, y_1, x_2, y_2) son las coordenadas euclídeas en $\mathbb{R}^4$. En particular, $\mathcal{H}$ es una distribución completamente no integrable. Denotaremos por X_h a la proyección horizontal de un campo tangente X sobre $\mathbb{S}^3$. Diremos que X es *horizontal* si $X = X_h$.

A continuación, introducimos una *métrica sub-riemanniana* sobre $\mathbb{S}^3$. Para ello, basta considerar la métrica riemanniana g_h sobre $\mathcal{H}$ para la que $\{E_1, E_2\}$ es una base ortonormal en cada punto. De este modo, el par $(\mathbb{S}^3, g_h)$ es una *variedad sub-riemanniana de contacto*. Es obvio que la restricción g del producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $\mathbb{S}^3$

Ana Hurtado, *ahurtado@ugr.es*
César Rosales, *crosales@ugr.es*
Dep. Geometría y Topología, Facultad de Ciencias, Universidad de Granada, 18071-Granada

proporciona una extensión de g_h tal que la paralelización $\{E_1, E_2, V\}$ es ortonormal. Por una *congruencia* de $(\mathbb{S}^3, g_h)$ entenderemos una isometría de $(\mathbb{S}^3, g)$ que conserva la distribución horizontal. Como la métrica g es invariante a la derecha, se sigue que cada traslación derecha es una de tales congruencias.

Sea J el giro de 90 grados en $\mathcal{H}$ en el sentido determinado por la base $\{E_1, E_2\}$. Se tiene entonces que $(\mathbb{S}^3, \mathcal{H}, J)$ es una variedad de tipo pseudohermítico. Extendemos J a todo el espacio tangente de $\mathbb{S}^3$ mediante $J(V) := 0$. Si D representa la conexión de Levi-Civitá sobre $(\mathbb{S}^3, g)$, entonces se comprueba fácilmente que $J(X) = D_X V$ para cada campo X de vectores tangente sobre $\mathbb{S}^3$.

Dada una superficie $\Sigma \subset \mathbb{S}^3$ de clase C^1, se llama *conjunto singular* de Σ a $\Sigma_0 = \{p \in \Sigma \, : \, T_p\Sigma = \mathcal{H}_p\}$. Por el teorema de Frobenius se sigue que Σ_0 es cerrado y tiene interior vacío en Σ. Como consecuencia, el *conjunto regular* $\Sigma - \Sigma_0$ es abierto y denso en Σ. Si N es un campo normal unitario sobre Σ en $(\mathbb{S}^3, g)$, entonces podemos describir el conjunto singular de Σ mediante la igualdad $\Sigma_0 = \{p \in \Sigma : N_h(p) = 0\}$. En el conjunto regular $\Sigma - \Sigma_0$ podemos definir la *aplicación de Gauss horizontal* ν_h y el *campo característico* Z como:

$$\nu_h := \frac{N_h}{|N_h|}, \qquad Z := J(\nu_h). \tag{1}$$

Como Z es horizontal y ortogonal a ν_h deducimos que Z es tangente a Σ. Por tanto, Z_p genera $T_p\Sigma \cap \mathcal{H}_p$. Llamaremos *curvas características* (orientadas) de Σ a las curvas integrales de Z en $\Sigma - \Sigma_0$. Si definimos el campo

$$S := \big\langle N, V \big\rangle \, \nu_h - |N_h| \, V, \tag{2}$$

entonces $\{Z_p, S_p\}$ es una base ortonormal de $T_p\Sigma$ en cada punto $p \in \Sigma - \Sigma_0$.

Terminamos esta sección recordando algunos hechos sobre geodésicas en $(\mathbb{S}^3, g_h)$. Diremos que una curva C^1 es horizontal si su vector tangente en cada instante pertenece a la distribución horizontal. Siguiendo el enfoque dado en [5] y [4], definimos las *geodésicas* en $(\mathbb{S}^3, g_h)$ como las curvas horizontales de clase C^2 que son puntos críticos de la longitud para cada variación por curvas horizontales con los mismos extremos. A partir de la primera derivada de la longitud no es difícil probar que una curva horizontal γ de clase C^2 y parametrizada por el arco es una geodésica si y sólo si existe un número real λ de forma que se cumple la ecuación diferencial de segundo orden dada por:

$$D_{\dot\gamma}\dot\gamma + 2\lambda \, J(\dot\gamma) = 0.$$

En tal caso, diremos que γ es una *geodésica de curvatura* λ. El comportamiento de las geodésicas en $(\mathbb{S}^3, g_h)$ en función de su curvatura fue establecido en [4].

Proposición 1.1. *Sea $\gamma : \mathbb{R} \to (\mathbb{S}^3, g_h)$ una geodésica completa de curvatura λ.*

i) Si $\lambda/\sqrt{1+\lambda^2} \in \mathbb{Q}$ entonces γ parametriza una circunferencia embebida cuya longitud depende solamente de λ.

ii) Si $\lambda/\sqrt{1+\lambda^2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ *entonces, salvo una traslación derecha,* γ *parametriza un subconjunto denso de un toro de Clifford vertical* $\mathbb{S}^1(a) \times \mathbb{S}^1(b)$.

2. Superficies estacionarias y estables

Recordaremos en primer lugar las nociones de volumen y de área en $(\mathbb{S}^3, g_h)$. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{S}^3$ un conjunto de Borel. El *volumen* $V(\Omega)$ es la medida de Haar en el grupo $(\mathbb{S}^3, \cdot)$, que resulta coincidir con el volumen riemanniano en $(\mathbb{S}^3, g)$. Dada una superficie orientable Σ de clase C^1, el *área* de Σ viene dada por la expresión integral

$$A(\Sigma) := \int_\Sigma |N_h| \, d\Sigma,$$

donde N es un campo normal unitario sobre Σ en $(\mathbb{S}^3, g)$ y $d\Sigma$ es el elemento de área riemanniano sobre Σ. Gracias al teorema de la divergencia se prueba que si $\Sigma = \partial\Omega$ entonces $A(\Sigma)$ coincide con el *perímetro sub-riemanniano* de Ω definido como:

$$\mathcal{P}(\Omega) = \sup \left\{ \int_\Omega \operatorname{div} X \, dv; \; |X| \leqslant 1 \right\}, \tag{3}$$

donde el supremo se toma sobre todos los campos horizontales de clase C^1 sobre $\mathbb{S}^3$. En (3), denotamos por dv y div al elemento de volumen y la divergencia en $(\mathbb{S}^3, g)$.

Ahora podemos definir el concepto de superficie estacionaria. Sea Σ una superficie compacta de clase C^2 en $\mathbb{S}^3$. Cada campo tangente X sobre $\mathbb{S}^3$ permite construir, mediante su grupo uniparamétrico de difeomorfismos, una *variación* Σ_s de Σ. Dicha variación produce también una familia diferenciable de abiertos Ω_s en $\mathbb{S}^3$ de forma que $\partial\Omega_s = \Sigma_s$ para cada $s \in \mathbb{R}$. Denotaremos por N al normal interior sobre Σ, es decir el que apunta hacia Ω_0. Los funcionales de volumen y de área asociados a la variación están dados por $V(s) := V(\Omega_s)$ y $A(s) := A(\Sigma_s)$, respectivamente. Diremos que la variación preserva el volumen si $V(s) = V(\Omega)$ para cada s en un intervalo alrededor de 0. Diremos que Σ es *estacionaria* si $A'(0) = 0$ para cada variación que preserva el volumen.

Las superficies estacionarias en $(\mathbb{S}^3, g_h)$ presentan propiedades interesantes que reunimos en el siguiente resultado. Los detalles se pueden consultar en [5], [6] y [3].

Proposición 2.1. *Sea* Σ *una superficie compacta y estacionaria. Se verifica que:*

i) La curvatura media de Σ*, definida por* $-2H = \operatorname{div}_\Sigma \nu_h$*, es constante en* $\Sigma - \Sigma_0$.

ii) Cada curva característica de Σ *es una geodésica de curvatura* H *en* $(\mathbb{S}^3, g_h)$.

iii) Cada componente conexa de Σ *es homeomorfa a una esfera o a un toro.*

Gracias a los resultados de [3] y [5] en los que se describe el conjunto singular Σ_0 de una superficie estacionaria y el comportamiento local de Σ alrededor del mismo, es posible caracterizar todas las superficies compactas y estacionarias con $\Sigma_0 \neq \emptyset$. Se tiene el siguiente resultado, que fue probado en [4].

Proposición 2.2. *Sea Σ una superficie compacta, conexa y estacionaria con conjunto singular no vacío. Entonces Σ es congruente con una esfera de revolución $\mathcal{S}_\lambda$ o con un toro estacionario de una famila biparamétrica $\mathcal{T}_{\mu,\lambda}$.*

Las superficies esféricas $\mathcal{S}_\lambda$ y los toros $\mathcal{T}_{\mu,\lambda}$ fueron descritos en [4]. Cada esfera $\mathcal{S}_\lambda$ es la unión de todas las geodésicas de curvatura λ que unen dos puntos situados sobre la fibra de la fibración de Hopf que pasa por el elemento neutro en $(\mathbb{S}^3, \cdot)$.

El siguiente paso natural consiste en estudiar las superficies compactas y estacionarias con conjunto singular vacío. A diferencia del caso en que $\Sigma_0 \neq \emptyset$, estas superficies no están completamente clasificadas, aunque en [4] se establecieron algunos resultados parciales interesantes que enunciamos a continuación.

Proposición 2.3. *Sea Σ una superficie compacta, conexa y estacionaria con conjunto singular vacío. Supongamos que Σ satisface alguna de las siguientes hipótesis:*

i) La curvatura media H de Σ cumple $H/\sqrt{1+H^2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

ii) Σ es vertical, es decir, el campo de Hopf V es siempre tangente sobre Σ.

Entonces, Σ es congruente con un toro de Clifford vertical $\mathbb{S}^1(a) \times \mathbb{S}^1(b)$.

Nota 2.1. *La condición sobre H que aparece en la proposición previa no se puede eliminar. De hecho, en [4] encontramos toros estacionarios de tipo onduloide, sin puntos singulares, y con curvatura media H tal que $H/\sqrt{1+H^2} \in \mathbb{Q}$.*

Los resultados anteriores reflejan que, en general, no podemos aspirar a clasificar todas las superficies compactas y estacionarias en $(\mathbb{S}^3, g_h)$. El problema radica en la ausencia de un resultado de caracterización para aquellas con conjunto singular vacío y tales que $H/\sqrt{1+H^2} \in \mathbb{Q}$.

Llevados por las consideraciones previas, pasamos a abordar el estudio de la estabilidad de superficies estacionarias.

Sea Σ una superficie compacta de clase C^2 en $\mathbb{S}^3$. Diremos que Σ es *estable* si es estacionaria y $A''(0) \geqslant 0$ para cada variación que preserva el volumen.

Para caracterizar de forma analítica la condición de estabilidad es necesario calcular la derivada segunda de los funcionales de área y de volumen asociados a una variación. Este cálculo se ha desarrollado en [6] para ciertas variaciones que dejan fijo el conjunto singular de la superficie. A partir de dicho cálculo y de la definición de estabilidad se obtiene en [6] una desigualdad integral para superficies estables que enunciamos a continuación.

Proposición 2.4. *Si Σ es una superficie compacta y estable, entonces se cumple que:*

$$\mathcal{Q}(u) \geqslant 0,$$

para cada función $u \in C_0(\Sigma - \Sigma_0)$, con media nula, y de clase C^1 a lo largo de las curvas características. En la desigualdad anterior $\mathcal{Q}$ representa la forma cuadrática

$$\mathcal{Q}(u) := \int_\Sigma |N_h|^{-1} \, (Z(u)^2 - |B(Z) + S|^2 \, u^2) \, d\Sigma, \tag{4}$$

donde $\{Z, S\}$ es la base definida en (1) *y* (2)*, y B es el endomorfismo de Weingarten riemanniano de Σ.*

La forma cuadrática $\mathcal{Q}$ se llama *forma índice* de Σ por analogía con la situación riemanniana estudiada en [1]. La proposición anterior proporciona un método para probar que una superficie es inestable: basta con encontrar una función test con media nula y soporte compacto sobre $\Sigma - \Sigma_0$ tal que $\mathcal{Q}(u) < 0$. Esta será justamente la idea que perseguiremos para demostrar nuestro resultado principal.

3. Resultado principal

En esta sección probaremos que si Σ es una superficie compacta y estacionaria en $(\mathbb{S}^3, g_h)$ y tiene conjunto singular vacío entonces Σ es inestable. Este resultado se obtuvo previamente en [6] mediante argumentos que también se usan para probar resultados de clasificación de superficies completas y estables en todas las variedades modelo sub-riemannianas tridimensionales. Aquí proporcionaremos una prueba más sencilla en la que se aprovechan las propiedades específicas de $(\mathbb{S}^3, g_h)$ como variedad sub-riemanniana. Necesitaremos un lema previo.

Lema 3.1. *Sea Σ una superficie compacta. Consideremos la base ortonormal $\{Z, S\}$ definida en* (1) *y* (2)*. Si $\Sigma_0 = \emptyset$ entonces existe $p \in \Sigma$ tal que $B(Z) + S \neq 0$ en p.*

Demostración. Supongamos, razonando por reducción al absurdo, que $B(Z) = -S$ sobre Σ. Sea γ una curva característica de Σ. Como Σ es compacta y $\Sigma_0 = \emptyset$ entonces γ está definida en toda la recta real. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(s) := \big\langle N, V \big\rangle(\gamma(s))$. Representamos por $'$ las derivadas de f con respecto a s. Usando las igualdades $D_Z V = J(Z)$, $J(Z) = -\nu_h$ y $V^\top = -|N_h| \, S$, se tiene que:

$$f' = \big\langle D_Z N, V \big\rangle + \big\langle N, J(Z) \big\rangle = |N_h| \, \big\langle B(Z), S \big\rangle - |N_h| = -2|N_h|. \tag{5}$$

Se sigue que f es de clase C^2 en $\mathbb{R}$. Además, obtenemos que:

$$f'' = -2 \, Z(|N_h|) = -4 \, \big\langle N, V \big\rangle = -4f, \tag{6}$$

donde se ha usado $|N_h|^2+\langle N,V\rangle^2=1$ para calcular $Z(|N_h|)$ a partir de $Z(\langle N,V\rangle)$. Gracias a (6) se deduce que $f(s)=a\,\cos(2s)+b\,\sin(2s)$ para cada $s\in\mathbb{R}$. Esto es una contradicción, ya que la ecuación (5) implica que $f'(s)<0$ para cada $s\in\mathbb{R}$. $\square$

Ya podemos demostrar nuestro resultado principal.

Teorema 3.1. *Sea Σ una superficie de clase C^2 compacta y estacionaria en $(\mathbb{S}^3,g_h)$. Si $\Sigma_0=\emptyset$ entonces Σ es inestable.*

Demostración. Sea N el normal interior sobre Σ y $\{Z,S\}$ la base ortonormal definida en (1) y (2). Veamos primero que si Σ no es conexa entonces Σ es inestable. Por el lema 3.1 existe un punto $p\in\Sigma$ en el que $B(Z)+S\neq 0$. Sea Σ_1 la componente conexa de Σ que contiene a p. Sea Σ_2 una componente de Σ con $\Sigma_1\neq\Sigma_2$. Definimos una función de media nula sobre Σ que toma valores constantes $c_k\neq 0$ sobre Σ_k, y que se anula en $\Sigma-(\Sigma_1\cup\Sigma_2)$. Por la definición de la forma índice en (4), tendríamos:

$$\mathcal{Q}(u)=-\sum_{k=1}^{2}c_k^2\int_{\Sigma_k}|N_h|^{-1}\,|B(Z)+S|^2\,d\Sigma<0,$$

con lo que Σ sería inestable en virtud de la proposición 2.4.

Podemos suponer entonces que Σ es conexa. Sea H la curvatura media de Σ. Distinguiremos dos casos:

Caso 1. $H/\sqrt{1+H^2}\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$.

En este caso, sabemos por la proposición 2.3 que Σ es congruente con un toro de Clifford vertical. Como la estabilidad se conserva por congruencias de $(\mathbb{S}^3,g_h)$, basta con demostrar que $\Sigma=\mathbb{S}^1(a)\times\mathbb{S}^1(b)$ es inestable. Como estos toros son verticales, se verifican las igualdades $\langle N,V\rangle=0$, $|N_h|=1$ y $S=-V$ sobre Σ. En particular, se cumple que $\langle B(S),S\rangle=0$ sobre Σ ya que $D_VV=J(V)=0$. Teniendo en cuenta (5) y [4, Equation 4.4], se sigue que $\langle B(Z),S\rangle=1$ y $\langle B(Z),Z\rangle=2H$. Como consecuencia de estas igualdades, Σ tiene curvatura media H en $(\mathbb{S}^3,g)$ y $|B(Z)+S|^2=4H^2+4=\text{Ric}(N,N)+|B|^2$, donde Ric es la curvatura de Ricci en $(\mathbb{S}^3,g)$ y $|B|^2$ es el cuadrado de la norma del endomorfismo de Weingarten. Además, si $\nabla_\Sigma u$ es el gradiente riemanniano relativo a Σ de una función $u\in C^1(\Sigma)$, entonces es obvio que $Z(u)^2\leqslant|\nabla_\Sigma u|^2$. Todo esto nos indica que:

$$\mathcal{Q}(u)\leqslant\int_\Sigma\left\{|\nabla_\Sigma u|^2-(\text{Ric}(N,N)+|B|^2)\,u^2\right\}\,d\Sigma=\mathcal{Q}_R(u),\tag{7}$$

donde $\mathcal{Q}_R$ representa la forma índice riemanniana de Σ en $(\mathbb{S}^3,g)$. Ahora, el resultado principal en [1] establece que toda superficie compacta Σ de curvatura media constante en $(\mathbb{S}^3,g)$ y diferente de una 2-esfera geodésica es inestable en $(\mathbb{S}^3,g)$. Por tanto, es posible encontrar una función $u\in C^1(\Sigma)$, de media nula, y tal que

$\mathcal{Q}_R(u) < 0$. Gracias a la desigualdad (7) y a la proposición 2.4 concluimos que Σ es inestable en $(\mathbb{S}^3, g_h)$.

Caso 2. $H/\sqrt{1+H^2} \in \mathbb{Q}$.

En este caso, las proposiciones 2.1 y 1.1 nos indican que Σ es homeomorfa a un toro y que las curvas características de Σ proporcionan una foliación de Σ por círculos de la misma longitud L. Probaremos que Σ es inestable construyendo una función de media nula asociada a dicha foliación. De hecho, la expresión de la forma índice (4) nos motiva a utilizar una función u que sea constante a lo largo de cada círculo característico. Formalicemos la construcción de u.

Por el lema 3.1 existe un punto $p \in \Sigma$ en el que $B(Z) + S \neq 0$. Sea $\alpha : \mathbb{R} \to \Sigma$ la curva integral del campo S con $\alpha(0) = p$. Para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}$, sea $\gamma_\varepsilon(s)$ la curva característica de Σ con $\gamma_\varepsilon(0) = \alpha(\varepsilon)$. Tomando δ pequeño se puede suponer que la aplicación $F : (-\delta, \delta) \times \mathbb{S}^1(2\pi/L) \to \Sigma$ dada por $F(\varepsilon, s) = \gamma_\varepsilon(s)$ parametriza un entorno abierto W de p en Σ. Es obvio que F es de clase C^1; por tanto, la función $f(\varepsilon, s) := |\mathrm{Jac}\, F|(\varepsilon, s)$ es continua. Sea $g : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$ la función definida por $g(\varepsilon) := \int_{\mathbb{S}^1(2\pi/L)} f(\varepsilon, s) ds$. Consideremos una función $\phi \in C_0(-\delta, \delta)$ con $\phi(0) > 0$ y media nula. Definimos $u : (-\delta, \delta) \times \mathbb{S}^1(2\pi/L) \to \mathbb{R}$ como $u(\varepsilon, s) := \phi(\varepsilon)/g(\varepsilon)$. Es claro que u induce sobre Σ una función continua con soporte compacto contenido en W. Además, por el teorema de Fubini, la definición de $g(\varepsilon)$, y el hecho de que ϕ tenga media nula, se tiene que:

$$\int_\Sigma u \, d\Sigma = \int_{-\delta}^{\delta} \phi(\varepsilon) \, d\varepsilon = 0.$$

Por otro lado, la función u es constante a lo largo de las curvas características de Σ. En particular, $Z(u) = 0$ sobre Σ. Al calcular $\mathcal{Q}(u)$ a partir de (4), deducimos que:

$$\mathcal{Q}(u) = -\int_\Sigma |N_h|^{-1} \, |B(Z) + S|^2 \, u^2 \, d\Sigma,$$

que es claramente una cantidad no positiva. Finalmente, como $|N_h| > 0$ sobre Σ, $|B(Z) + S|(p) > 0$ y $u(0,0) > 0$ se sigue que $\mathcal{Q}(u) < 0$. Por la proposición 2.4 concluimos que Σ es inestable. Esto finaliza la demostración. □

Terminamos este trabajo con una aplicación del teorema 3.1 al *problema isoperimétrico* en $(\mathbb{S}^3, g_h)$. Dicho problema estudia los conjuntos que minimizan el funcional de perímetro definido en (3) bajo una restricción de volumen. Como $\mathbb{S}^3$ es compacta, existen soluciones isoperimétricas compactas con cualquier volumen [2]. Además, si dichas soluciones son de clase C^2, entonces su frontera es una superficie compacta, estacionaria y estable. Gracias al teorema 3.1 y a la proposición 2.2 deducimos el siguiente resultado, que resuelve afirmativamente una conjetura establecida en [4].

Corolario 3.1. *Si Ω es una región isoperimétrica de clase C^2 en $(\mathbb{S}^3, g_h)$, entonces cada componente conexa de $\partial\Omega$ es congruente con una esfera de revolución $\mathcal{S}_\lambda$ o con un toro estacionario $\mathcal{T}_{\mu,\lambda}$.*

En el espacio de Heisenberg sub-riemanniano existe una conjetura de Pansu [2] que afirma que las soluciones isoperimétricas tienen por frontera a ciertas esferas de revolución similares a las esferas $\mathcal{S}_\lambda$. Resulta natural conjeturar que en $(\mathbb{S}^3, g_h)$ ocurrirá el mismo fenómeno. De hecho, podemos ir más allá y conjeturar que las esferas $\mathcal{S}_\lambda$ son las únicas superficies compactas y estables de clase C^2 en $(\mathbb{S}^3, g_h)$.

Agradecimientos

Ambos autores disfrutan de la ayuda MICINN-FEDER con referencia MTM2010-21206-C02-01, y de ayudas de la Junta de Andalucía con referencias FQM-325 y P09-FQM-5088, respectivamente.

Referencias

[1] J. Barbosa, M. do Carmo y J. Eschenburg, Stability of hypersurfaces of constant mean curvature in Riemannian manifolds, *Math. Z.* **197** (1988), 123–138.

[2] L. Capogna, D. Danielli, S. Pauls y J. Tyson, *An introduction to the Heisenberg group and the sub-Riemannian isoperimetric problem*, Progress in Mathematics, 259, Birkhäuser Verlag, Basel, 2007.

[3] J.-H. Cheng, J.-F. Hwang, A. Malchiodi y P. Yang, Minimal surfaces in pseudo-hermitian geometry, *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)* **4** (2005), 129–177.

[4] A. Hurtado y C. Rosales, Area-stationary surfaces inside the sub-Riemannian three-sphere, *Math. Ann.* **340** (2008), 675–708.

[5] M. Ritoré y C. Rosales, Area stationary surfaces in the Heisenberg group $\mathbb{H}^1$, *Adv. Math.* **219** (2008), 633–671.

[6] C. Rosales, Complete stable CMC surfaces inside Sasakian sub-Riemannian three manifolds, aparecerá en *Calc. Var. Partial Differential Equations*, `arXiv:1007.2597`.

Florentino García Santos: In Memoriam
Universidad de Granada, 2011, págs. 95–105

Real hypersurfaces in complex two-plane Grassmannians with $\mathfrak{F}$-parallel normal Jacobi operator

Imsoon Jeong • Young J. Suh

Resumen In this paper we give a non-existence theorem for Hopf hypersurfaces M in complex two-plane Grassmannians $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ whose normal Jacobi operator $\bar{R}_N$ is parallel on the distribution $\mathfrak{F}$ defined by $\mathfrak{F} = [\xi] \cup \mathfrak{D}^{\perp}$, where $[\xi] = \mathrm{Span}\ \{\xi\}$, $\mathfrak{D}^{\perp} = \mathrm{Span}\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ and $T_xM = \mathfrak{D} \oplus \mathfrak{D}^{\perp}$, $x \in M$.

1. Introduction

The geometry of real hypersurfaces in complex space forms or in quaternionic space forms is one of interesting parts in the field of differential geometry. Until now there have been many characterizations for homogeneous hypersurfaces of type (A_1), (A_2), (B), (C), (D) and (E) in complex projective space $\mathbb{C}P^m$, of type (A_1), (A_2) and (B) in quaternionic projective space $\mathbb{H}P^m$, or of type (A) and (B) in complex two-plane Grassmannians $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$. Each corresponding geometric features are classified and investigated by Berndt [2], Pérez, Santos and Suh [13], Kimura [9], Martinez and Pérez [10], Berndt and Suh [3] and [4], respectively.

Let $(\bar{M}, \bar{g})$ be a Riemannian manifold. A vector field U along a geodesic γ in a Riemannian manifold $\bar{M}$ is said to be a *Jacobi field* if it satisfies a differential equation

$$\bar{\nabla}^2_{\dot{\gamma}} U + \bar{R}(U(t), \dot{\gamma}(t))\dot{\gamma}(t) = 0,$$

where $\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}}$ and $\bar{R}$ respectively denotes the covariant derivative of the vector field U along the curve γ in $\bar{M}$ and the curvature tensor of the Riemannian manifold $(\bar{M}, \bar{g})$. Then this equation is called the *Jacobi* equation.

The Jacobi operator $\bar{R}_X$ for any tangent vector field X at $x \in \bar{M}$, is defined by

$$(\bar{R}_X Y)(x) = (\bar{R}(Y, X)X)(x)$$

for any $Y \in T_x\bar{M}$, becomes a self adjoint endomorphism of the tangent bundle $T\bar{M}$ of $\bar{M}$. That is, the Jacobi operator satisfies $\bar{R}_X \in \mathrm{End}(T_x\bar{M})$ and is symmetric in the sense of $\bar{g}(\bar{R}_X Y, Z) = \bar{g}(\bar{R}_X Z, Y)$ for any vector fields Y and Z on $\bar{M}$.

Imsoon Jeong, *imsoon.jeong@gmail.com*
Young J. Suh, *yjsuh@knu.ac.kr*
Department of Mathematics, Kyungpook National University, Taegu 702-701, Korea

The complex two-plane Grassmannians $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ which consists of all complex two dimensional linear subspaces in $\mathbb{C}^{m+2}$ has a remarkable geometric structure. It is known to be the unique compact irreducible Riemannian symmetric space equipped with both a Kähler structure J and a quaternionic Kähler structure $\mathfrak{J}$ (See Berndt and Suh [3]). From such a view point, Berndt and Suh [3] considered two natural geometric conditions for real hypersurfaces in $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ that $[\xi] = \text{Span}\{\xi\}$ and $\mathfrak{D}^{\perp} = \text{Span}\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ are invariant under the shape operator. By using such conditions and the result in Alekseevskii [1], Berndt and Suh [3] proved the following

Teorema 1.1. *Let M be a connected real hypersurface in $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$, $m \geqslant 3$. Then both $[\xi]$ and $\mathfrak{D}^{\perp}$ are invariant under the shape operator of M if and only if*

(A) *M is an open part of a tube around a totally geodesic $G_2(\mathbb{C}^{m+1})$ in $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$, or*

(B) *m is even, say $m = 2n$, and M is an open part of a tube around a totally geodesic $\mathbb{H}P^n$ in $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$.*

In papers [5] and [6] due to Jeong, Pérez and Suh the authors have introduced a notion of normal Jacobi operator $\bar{R}_N$ for hypersurfaces in $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ in such a way that

$$\bar{R}_N = \bar{R}(X, N)N \in \text{End}(T_xM), \quad x \in M,$$

where $\bar{R}$ denotes the curvature tensor of $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$. They [5] have also classified real hypersurfaces in $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ with commuting normal Jacobi operator, that is, $\bar{R}_N \circ \phi = \phi \circ \bar{R}_N$ or otherwise $\bar{R}_N \circ A = A \circ \bar{R}_N$ and proved that the commuting normal Jacobi operator $\bar{R}_N$ with the shape operator A is equivalent to the fact that the distributions $\mathfrak{D}$ and $\mathfrak{D}^{\perp}$ are invariant by the shape operator A for Hopf hypersurfaces M in $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$, where $T_xM = \mathfrak{D} \oplus \mathfrak{D}^{\perp}$, $x \in M$. Moreover, a normal Jacobi operator for hypersurface M in $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ is said to be *parallel* if $\nabla_X \bar{R}_N = 0$ for any X in T_xM, $x \in M$ (See [7]). And in paper [7], the present authors and Kim proved a non-existence theorem for Hopf hypersurfaces in complex two-plane Grassmannians $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$, $m \geq 3$, with parallel normal Jacobi operator as follows:

Teorema 1.2. *There do not exist any connected Hopf hypersurfaces in $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$, $m \geq 3$, with parallel normal Jacobi operator.*

On the other hand, Suh [15] obtained a non-existence theorem for Hopf hypersurfaces in $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ with parallel shape operator on the distribution $\mathfrak{F}$ defined by $\mathfrak{F} = [\xi] \cup \mathfrak{D}^{\perp}$, where $[\xi] = \text{Span}\{\xi\}$, $\mathfrak{D}^{\perp} = \text{Span}\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ and $T_xM = \mathfrak{D} \oplus \mathfrak{D}^{\perp}$, $x \in M$.

As a generalization of parallel normal Jacobi operator, let us introduce the notion of parallel normal Jacobi operator along the distribution $\mathfrak{F}$, that is, $\nabla_X \bar{R}_N = 0$ for any X in $\mathfrak{F}$, defined by $\mathfrak{F} = [\xi] \cup \mathfrak{D}^{\perp}$ on M in $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$.

A $\mathfrak{F}$*-parallel* normal Jacobi operator means that the normal Jacobi operator $\bar{R}_N$ is parallel along the distribution $\mathfrak{F}$ of M in $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$, that is, the eigenspaces of the normal Jacobi operator $\bar{R}_N$ is parallel along the distribution $\mathfrak{F}$ of M. Here the eigenspaces of the normal Jacobi operator $\bar{R}_N$ are said to be *parallel* along the distribution $\mathfrak{F}$ if they are *invariant* with respect to any *parallel displacement* along the distribution $\mathfrak{F}$.

As a generalization of Theorem 1.2, we prove a non-existence theorem for Hopf hypersurfaces in $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$, $m \geq 3$, with $\mathfrak{F}$-parallel normal Jacobi operator as follows:

Teorema 1.3. *There do not exist any connected Hopf hypersurfaces in* $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$, $m \geqslant 3$, *with* $\mathfrak{F}$*-parallel normal Jacobi operator, where* $\mathfrak{F} = [\xi] \cup \mathfrak{D}^{\perp}$.

2. Riemannian geometry of $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$

In this section we summarize basic material about $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$, for details we refer to [3], [4] and [15].

By $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ we denote the set of all complex two-dimensional linear subspaces in $\mathbb{C}^{m+2}$. The special unitary group $G = SU(m+2)$ acts transitively on $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ with stabilizer isomorphic to $K = S(U(2) \times U(m)) \subset G$. Then $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ can be identified with the homogeneous space G/K, which we equip with the unique analytic structure for which the natural action of G on $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ becomes analytic. Denote by $\mathfrak{g}$ and $\mathfrak{k}$ the Lie algebra of G and K, respectively, and by $\mathfrak{m}$ the orthogonal complement of $\mathfrak{k}$ in $\mathfrak{g}$ with respect to the Cartan-Killing form B of $\mathfrak{g}$. Then $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ is an $Ad(K)$-invariant reductive decomposition of $\mathfrak{g}$.

We put $o = eK$ and identify $T_oG_2(\mathbb{C}^{m+2})$ with $\mathfrak{m}$ in the usual manner. Since B is negative definite on $\mathfrak{g}$, its negative restricted to $\mathfrak{m} \times \mathfrak{m}$ yields a positive definite inner product on $\mathfrak{m}$. By $Ad(K)$-invariance of B this inner product can be extended to a G-invariant Riemannian metric $\bar{g}$ on $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$.

In this way $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ becomes a Riemannian homogeneous space, even a Riemannian symmetric space. For computational reasons we normalize $\bar{g}$ such that the maximal sectional curvature of $(G_2(\mathbb{C}^{m+2}), \bar{g})$ is eight.

When $m = 1$, $G_2(\mathbb{C}^3)$ is isometric to the two-dimensional complex projective space $\mathbb{C}P^2$ with constant holomorphic sectional curvature eight.

When $m = 2$, we note that the isomorphism $Spin(6) \simeq SU(4)$ yields an isometry between $G_2(\mathbb{C}^4)$ and the real Grassmann manifold $G_2^+(\mathbb{R}^6)$ of oriented two-dimensional linear subspaces of $\mathbb{R}^6$.

In this paper, we will assume $m \geq 3$.

Let $J_\nu, \nu = 1, 2, 3$, be a canonical local basis, which becomes an almost Hermitian structure in $\mathfrak{J}$. Then $JJ_\nu = J_\nu J$ and JJ_ν is a symmetric endomorphism with $(JJ_\nu)^2 = I$ and $\mathrm{Tr}(JJ_\nu) = 0$, $\nu = 1, 2, 3$.

A canonical local basis J_1, J_2, J_3 of $\mathfrak{J}$ consists of three local almost Hermitian structures J_ν in $\mathfrak{J}$ such that $J_\nu J_{\nu+1} = J_{\nu+2} = -J_{\nu+1}J_\nu$, where the index is taken modulo three. Since $\mathfrak{J}$ is parallel with respect to the Riemannian connection $\bar{\nabla}$ of $(G_2(\mathbb{C}^{m+2}), \bar{g})$, there exist for any canonical local basis J_1, J_2, J_3 of $\mathfrak{J}$ three local one-forms q_1, q_2, q_3 such that

$$\bar{\nabla}_X J_\nu = q_{\nu+2}(X)J_{\nu+1} - q_{\nu+1}(X)J_{\nu+2} \tag{8}$$

for all vector fields X on $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$.

The Riemannian curvature tensor $\bar{R}$ of $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ is locally given by

$$\begin{aligned}\bar{R}(X,Y)Z = {}& \bar{g}(Y,Z)X - \bar{g}(X,Z)Y + \bar{g}(JY,Z)JX \\ & - \bar{g}(JX,Z)JY - 2\bar{g}(JX,Y)JZ \\ & + \sum_{\nu=1}^{3}\{\bar{g}(J_\nu Y,Z)J_\nu X - \bar{g}(J_\nu X,Z)J_\nu Y \\ & - 2\bar{g}(J_\nu X,Y)J_\nu Z\} \\ & + \sum_{\nu=1}^{3}\{\bar{g}(J_\nu JY,Z)J_\nu JX - \bar{g}(J_\nu JX,Z)J_\nu JY\},\end{aligned} \tag{9}$$

where J_1, J_2, J_3 is any canonical local basis of $\mathfrak{J}$ (See [3]).

3. Some fundamental formulas

In this section we derive some basic formulae from the Codazzi equation for a real hypersurface in $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ (See [3], [4], [14] and [15]).

Let M be a real hypersurface of $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$, that is, a hypersurface of $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ with real codimension one. The induced Riemannian metric on M will be denoted by g, and ∇ denotes the Riemannian connection of (M, g). Let N be a local unit normal field of M and A the shape operator of M with respect to N. The Kähler structure J of $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ induces on M an almost contact metric structure (ϕ, ξ, η, g). Furthermore, let J_1, J_2, J_3 be a canonical local basis of $\mathfrak{J}$. Then each J_ν induces an almost contact metric structure $(\phi_\nu, \xi_\nu, \eta_\nu, g)$ on M. Using the above expression (9) for the curvature tensor $\bar{R}$, we have the equations of Gauss and Codazzi respectively (See Berndt and Suh [3], [4], Jeong, Pérez and Suh [5], and Suh [15]).

On the other hand, the following identities can be proved in a straightforward method and will be used frequently in subsequent calculations:

$$\begin{aligned}
&\phi_{\nu+1}\xi_\nu = -\xi_{\nu+2}, \quad \phi_\nu\xi_{\nu+1} = \xi_{\nu+2},\\
&\phi\xi_\nu = \phi_\nu\xi, \quad \eta_\nu(\phi X) = \eta(\phi_\nu X),\\
&\phi_\nu\phi_{\nu+1}X = \phi_{\nu+2}X + \eta_{\nu+1}(X)\xi_\nu,\\
&\phi_{\nu+1}\phi_\nu X = -\phi_{\nu+2}X + \eta_\nu(X)\xi_{\nu+1}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Now let us put

$$JX = \phi X + \eta(X)N, \quad J_\nu X = \phi_\nu X + \eta_\nu(X)N \tag{11}$$

for any tangent vector X of M in $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$, where N denotes a normal vector of M in $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$. Then from this and the formulas (8) and (10) we have that

$$(\nabla_X\phi)Y = \eta(Y)AX - g(AX,Y)\xi, \quad \nabla_X\xi = \phi AX, \tag{12}$$

$$\nabla_X\xi_\nu = q_{\nu+2}(X)\xi_{\nu+1} - q_{\nu+1}(X)\xi_{\nu+2} + \phi_\nu AX, \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla_X\phi_\nu)Y = &-q_{\nu+1}(X)\phi_{\nu+2}Y + q_{\nu+2}(X)\phi_{\nu+1}Y + \eta_\nu(Y)AX\\
&- g(AX,Y)\xi_\nu.
\end{aligned} \tag{14}$$

Moreover, from $JJ_\nu = J_\nu J$, $\nu = 1,2,3$, it follows that

$$\phi\phi_\nu X = \phi_\nu\phi X + \eta_\nu(X)\xi - \eta(X)\xi_\nu. \tag{15}$$

4. Key lemmas

Now let us consider a real hypersurface M in $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ with parallel normal Jacobi operator $\bar{R}_N$, that is, $\nabla_X\bar{R}_N = 0$ for any vector field X on M. Then first of all, we want to derive the normal Jacobi operator from the curvature tensor $\bar{R}(X,Y)Z$ of complex two-plane Grassmannian $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ given in (9).

Now let us consider a covariant derivative of the normal Jacobi operator $\bar{R}_N$ given in the introduction along any direction X of T_xM, $x \in M$ (See [6], [7]). Then it is given by

$$(\nabla_X\bar{R}_N)Y = \nabla_X(\bar{R}_NY) - \bar{R}_N(\nabla_XY). \tag{16}$$

From this, together with the formulae given in section 3, a real hypersurface M in $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ with parallel normal Jacobi operator, that is, $\nabla_X\bar{R}_N = 0$ for any vector field X on M. Then the derivative of the normal Jacobi operator (16) becomes

$$\begin{aligned} 0 &= (\nabla_X \bar{R}_N)Y \\ &= 3\,g(\phi AX, Y)\xi + 3\eta(Y)\phi AX \\ &\quad + 3\sum_{\nu=1}^{3}\Big\{g(\phi_\nu AX, Y)\xi_\nu + \eta_\nu(Y)\phi_\nu AX\Big\} \\ &\quad - \sum_{\nu=1}^{3}\Bigg[2\eta_\nu(\phi AX)(\phi_\nu\phi Y - \eta(Y)\xi_\nu) - g(\phi_\nu AX, \phi Y)\phi_\nu\xi \\ &\quad - \eta(Y)\eta_\nu(AX)\phi_\nu\xi - \eta_\nu(\phi Y)(\phi_\nu\phi AX - g(AX,\xi)\xi_\nu)\Bigg] \end{aligned} \tag{17}$$

for any tangent vector fields X and Y on M in $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$.

By putting $X = \xi_\mu$ and replacing Y by X in (17) we have

$$\begin{aligned} 0 &= (\nabla_{\xi_\mu} \bar{R}_N)X \\ &= 3\,g(\phi A\xi_\mu, X)\xi + 3\eta(X)\phi A\xi_\mu \\ &\quad + 3\sum_{\nu=1}^{3}\Big\{g(\phi_\nu A\xi_\mu, X)\xi_\nu + \eta_\nu(X)\phi_\nu A\xi_\mu\Big\} \\ &\quad - \sum_{\nu=1}^{3}\Bigg[2\eta_\nu(\phi A\xi_\mu)(\phi_\nu\phi X - \eta(X)\xi_\nu) - g(\phi_\nu A\xi_\mu, \phi X)\phi_\nu\xi \\ &\quad - \eta(X)\eta_\nu(A\xi_\mu)\phi_\nu\xi - \eta_\nu(\phi X)(\phi_\nu\phi A\xi_\mu - g(A\xi_\mu,\xi)\xi_\nu)\Bigg]. \end{aligned} \tag{18}$$

From this, by putting $X = \xi$ in (18), it follows that

$$\begin{aligned} 0 &= (\nabla_{\xi_\mu} \bar{R}_N)\xi \\ &= 3\,\phi A\xi_\mu + 5\sum_{\nu=1}^{3}\eta_\nu(\phi A\xi_\mu)\xi_\nu + 3\sum_{\nu=1}^{3}\eta_\nu(\xi)\phi_\nu A\xi_\mu \\ &\quad + \sum_{\nu=1}^{3}\eta_\nu(A\xi_\mu)\phi_\nu\xi \end{aligned} \tag{19}$$

for any $\mu = 1, 2, 3$.

We consider the notion of parallel normal Jacobi operator along the direction of the Reeb vector ξ, that is, $\nabla_\xi \bar{R}_N = 0$ for a hypersurface M in $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$. We assert the following

Lema 4.1. *Let M be a Hopf hypersurface in $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$, $m \geq 3$. If the normal Jacobi operator $\bar{R}_N$ is parallel in the direction of the structure vector ξ, then the Reeb vector ξ belongs to either the distribution $\mathfrak{D}$ or the distribution $\mathfrak{D}^\perp$.*

Demostración. Putting $X = Y = \xi$ in (17), we have

$$0 = 4\alpha \sum_{\nu=1}^{3} \eta_\nu(\xi)\phi_\nu\xi, \tag{20}$$

where we have used $A\xi = \alpha\xi$. From this, we have $\alpha = 0$ or $\sum_{\nu=1}^{3}\eta_\nu(\xi)\phi_\nu\xi = 0$.

In the case where M is with vanishing geodesic Reeb flow, it can be verified directly by Pérez and Suh [12].

Now let us consider the other case that M is with non-vanishing geodesic Reeb flow, that is, $\alpha \neq 0$. Then we assume that $\xi = \eta(X_0)X_0 + \eta(\xi_1)\xi_1$ for some unit $X_0 \in \mathfrak{D}$ and the non-zero functions $\eta(X_0)$ and $\eta(\xi_1)$. From this, together with (21), it follows that

$$\begin{aligned} 0 &= \eta_1(\xi)\phi_1\xi \\ &= \eta_1(\xi)\phi_1(\eta(X_0)X_0 + \eta(\xi_1)\xi_1) \\ &= \eta_1(\xi)\eta(X_0)\phi_1 X_0. \end{aligned}$$

Then two non-zero functions $\eta_1(\xi)$ and $\eta(X_0)$ give

$$\phi_1 X_0 = 0,$$

which makes a contradiction. This means $\eta(X_0) = 0$ or $\eta(\xi_1) = 0$, that is, the Reeb vector ξ belongs to either the distribution $\mathfrak{D}$ or the distribution $\mathfrak{D}^\perp$. □

Next, we consider the notion of parallel normal Jacobi operator along the distribution $\mathfrak{D}^\perp$, that is, $\nabla_{\xi_\mu}\bar{R}_N = 0, \mu = 1, 2, 3$, for a hypersurface M in $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$. Then we obtain the following

Lema 4.2. *Let M be a Hopf real hypersurface in $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$, $m \geq 3$, with $\mathfrak{D}^\perp$-parallel normal Jacobi operator and $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$. Then $g(A\mathfrak{D}, \mathfrak{D}^\perp) = 0$.*

Demostración. Assume that ξ is tangent to $\mathfrak{D}^\perp$. Then the unit normal N is a singular tangent vector of $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$ of type $JN \in \mathfrak{J}N$. So there exists an almost Hermitian structure $J_1 \in \mathfrak{J}$ such that $JN = J_1 N$. Then we have

$$\xi = \xi_1, \quad \phi\xi_2 = -\xi_3, \quad \phi\xi_3 = \xi_2, \quad \phi\mathfrak{D} \subset \mathfrak{D}.$$

Putting $\xi = \xi_1$ into (19), we have

$$0 = 3\phi A\xi_\mu + 5\sum_{\nu=1}^{3}\eta_\nu(\phi A\xi_\mu)\xi_\nu + 3\phi_1 A\xi_\mu + \sum_{\nu=1}^{3}\eta_\nu(A\xi_\mu)\phi_\nu\xi.$$

From this, taking an inner product with any $X \in \mathfrak{D}$ and using $g(\phi_\nu\xi, X) = 0$, we have

$$0 = 3g(\phi A\xi_\mu, X) + 3g(\phi_1 A\xi_\mu, X). \tag{21}$$

On the other hand, by using (13) we know that

$$\begin{aligned}\phi A\xi_\mu &= \nabla_{\xi_\mu}\xi \\ &= \nabla_{\xi_\mu}\xi_1 \\ &= q_3(\xi_\mu)\xi_2 - q_2(\xi_\mu)\xi_3 + \phi_1 A\xi_\mu.\end{aligned}$$

From this, taking an inner product with any $X \in \mathfrak{D}$, we have

$$g(\phi A\xi_\mu, X) = g(\phi_1 A\xi_\mu, X).$$

Substituting this formula into (21) gives

$$0 = g(\phi A\xi_\mu, X). \tag{22}$$

From this, let us replace X by ϕX in (22). Then it follows that

$$\begin{aligned}0 &= g(\phi A\xi_\mu, \phi X) \\ &= -g(A\xi_\mu, \phi^2 X) \\ &= g(AX, \xi_\mu)\end{aligned}$$

for any $X \in \mathfrak{D}$, $\mu = 1, 2, 3$. This gives a complete proof of our Lemma. □

Moreover, in order to prove our theorem 1.3, next we should prove the following Lemma, which could be proved by the same method as in Jeong and Suh [6].

Lema 4.3. *Let M be a Hopf hypersurface in $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$, $m \geq 3$, with $\mathfrak{D}^\perp$-parallel normal Jacobi operator and $\xi \in \mathfrak{D}$. Then $g(A\mathfrak{D}, \mathfrak{D}^\perp) = 0$.*

5. $\mathfrak{F}$-parallel normal Jacobi operator

Now in this section we consider the weaker condition than having parallel normal Jacobi operator. So as a generalization of the notion of parallel normal Jacobi operator, we consider a notion of parallel normal Jacobi operator along the distribution $\mathfrak{F}$ defined by $\mathfrak{F} = [\xi] \cup \mathfrak{D}^\perp$ on M in $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$, where $[\xi] = \mathrm{Span}\{\xi\}$ and $\mathfrak{D}^\perp = \mathrm{Span}\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$. Then, on such a distribution $\mathfrak{F}$ we can use Lemmas 4.1, 4.2 and 4.3. Then we assert the following

Proposición 5.1. *Let M be a Hopf hypersurface in $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$, $m \geq 3$, with $\mathfrak{F}$-parallel normal Jacobi operator. Then $g(A\mathfrak{D}, \mathfrak{D}^\perp) = 0$.*

By Proposition 5.1 and Theorem 1.1, we have

Proposición 5.2. *Let M be a Hopf hypersurface in $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$, $m \geq 3$, with $\mathfrak{F}$-parallel normal Jacobi operator. Then M is congruent to an open part of one of the following real hypersurfaces in $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$:*

(A) *M is an open part of a tube around a totally geodesic $G_2(\mathbb{C}^{m+1})$ in $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$.*

(B) *m is even, say $m = 2n$, and M is an open part of a tube around a totally geodesic $\mathbb{H}P^n$ in $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$.*

Before giving the proof of Theorem 1.3, we will check whether any kind of hypersurfaces in Theorem 1.1 satisfy $\mathfrak{F}$-parallel normal Jacobi operator.

By Lemma 4.2 and Theorem 1.1, we know that M is locally congruent to a tube over a totally geodesic $G_2(\mathbb{C}^{m+1})$ in $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$. Then it naturally rises to a problem that the normal Jacobi operator $\bar{R}_N$ of hypersurfaces of type (A) in Theorem 1.1 satisfies $\mathfrak{F}$-parallel or not? Corresponding to such a problem, we introduce the following due to Berndt and Suh [3]:

Proposición 5.3. *Let M be a connected real hypersurface of $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$. Suppose that $A\mathfrak{D} \subset \mathfrak{D}$, $A\xi = \alpha\xi$, and ξ is tangent to $\mathfrak{D}^\perp$. Let $J_1 \in \mathfrak{J}$ be the almost Hermitian structure such that $JN = J_1N$. Then M has three (if $r = \pi/2\sqrt{8}$) or four (otherwise) distinct constant principal curvatures*

$$\alpha = \sqrt{8}\cot(\sqrt{8}r),\ \beta = \sqrt{2}\cot(\sqrt{2}r),\ \lambda = -\sqrt{2}\tan(\sqrt{2}r),\ \mu = 0$$

with some $r \in (0, \pi/\sqrt{8})$. The corresponding multiplicities are

$$m(\alpha) = 1,\ \ m(\beta) = 2,\ m(\lambda) = 2m - 2 = m(\mu),$$

and the corresponding eigenspaces we have

$$\begin{aligned}
T_\alpha &= \mathbb{R}\xi = \mathbb{R}JN = \mathbb{R}\xi_1,\\
T_\beta &= \mathbb{C}^\perp\xi = \mathbb{C}^\perp N = \mathbb{R}\xi_2 \oplus \mathbb{R}\xi_3,\\
T_\lambda &= \{X | X \perp \mathbb{H}\xi, JX = J_1X\},\\
T_\mu &= \{X | X \perp \mathbb{H}\xi, JX = -J_1X\},
\end{aligned}$$

where $\mathbb{R}\xi$, $\mathbb{C}\xi$ and $\mathbb{H}\xi$ respectively denotes real, complex and quaternionic span of the structure vector ξ and $\mathbb{C}^\perp\xi$ denotes the orthogonal complement of $\mathbb{C}\xi$ in $\mathbb{H}\xi$.

Let us consider for $\mu = 2$ in (19). Then we have

$$\begin{aligned}
0 &= (\nabla_{\xi_2}\bar{R}_N)\xi\\
&= 3\phi A\xi_2 + 5\sum\nolimits_{\nu=1}^{3}\eta_\nu(\phi A\xi_2)\xi_\nu + 3\sum\nolimits_{\nu=1}^{3}\eta_\nu(\xi)\phi_\nu A\xi_2\\
&\quad + \sum\nolimits_{\nu=1}^{3}\eta_\nu(A\xi_2)\phi_\nu\xi.
\end{aligned} \tag{23}$$

Now let us suppose that M is of type (A) with $\mathfrak{F}$-parallel normal Jacobi operator and its Reeb vector $\xi \in \mathfrak{D}^\perp$. Then, by using Proposition 5.3 and $\phi\xi_2 = -\xi_3$, $\phi\xi_3 = \xi_2$,

(23) can be written

$$
\begin{aligned}
0 &= 3\beta\phi\xi_2 + 5\beta\sum\nolimits_{\nu=1}^{3}\eta_\nu(\phi\xi_2)\xi_\nu + 3\beta\sum\nolimits_{\nu=1}^{3}\eta_\nu(\xi)\phi_\nu\xi_2 \\
&\quad + \beta\sum\nolimits_{\nu=1}^{3}\eta_\nu(\xi_2)\phi_\nu\xi \\
&= -3\beta\xi_3 - 5\beta\xi_3 + 3\beta\phi_1\xi_2 + \beta\phi_2\xi \\
&= -6\beta\xi_3.
\end{aligned} \tag{24}
$$

Thus, we have $\beta = 0$ and this case also can not occur for some $r \in (0, \pi/\sqrt{8})$. This makes a contradiction.

On the other hand, by Lemma 4.3 and Theorem 1.1 we know that M is locally congruent to a tube over a totally geodesic $\mathbb{H}P^n$ in $G_2(\mathbb{C}^{m+2})$, $m = 2n$.

Now it remains only to check that whether real hypersurfaces of type (B) in Theorem 1.1 satisfy $\mathfrak{F}$-parallel normal Jacobi operator or not? Then in order to do we need another Proposition B given in Berndt and Suh [3].

Let us consider for $\mu = 2$ in (19) and $\xi \in \mathfrak{D}$. Then, by using Proposition B in Berndt and Suh [3], together with (10), (19) can be written

$$
\begin{aligned}
0 &= 3\beta\phi\xi_2 + 5\beta\sum\nolimits_{\nu=1}^{3}\eta_\nu(\phi\xi_2)\xi_\nu + 3\beta\sum\nolimits_{\nu=1}^{3}\eta_\nu(\xi)\phi_\nu\xi_2 \\
&\quad + \beta\sum\nolimits_{\nu=1}^{3}\eta_\nu(\xi_2)\phi_\nu\xi \\
&= 3\beta\phi\xi_2 + \beta\phi_2\xi \\
&= 4\beta\phi_2\xi.
\end{aligned} \tag{25}
$$

Thus, we have $\beta = 0$ and this case also can not occur for some $r \in (0, \pi/4)$. This also gives a contradiction. Accordingly, we know that the normal Jacobi operator $\bar{R}_N$ for hypersurfaces of type (A) or of type (B) in Theorem 1.1 can not be $\mathfrak{F}$-parallel, respectively.

From this, we complete the proof of Theorem 1.3 in the introduction.

Acknowledgments

This work was supported by grant Proj. No. BSRP-2010-0020931 from National Research Foundation of Korea.

Referencias

[1] D.V. Alekseevskii, *Compact quaternion spaces*, Func. Anal. Appl. **2** (1968), 106-114.

[2] J. Berndt, *Real hypersurfaces in quaternionic space forms*, J. Reine Angew. Math. **419** (1991), 9-26.

[3] J. Berndt and Y.J. Suh, *Real hypersurfaces in complex two-plane Grassmannians*, Monatshefte für Math. **127** (1999), 1-14.

[4] J. Berndt and Y.J. Suh, *Isometric flows on real hypersurfaces in complex two-plane Grassmannians*, Monatshefte für Math. **137** (2002), 87-98.

[5] I. Jeong, J.D.Pérez and Y.J. Suh *Real hypersurfaces in complex two-plane Grassmannians with commuting normal Jacobi operator*, Acta Math. Hungarica **117** (2007), 201-217.

[6] I. Jeong and Y.J. Suh *Real hypersurfaces in complex two-plane Grassmannians with Lie ξ-parallel normal Jacobi operator*, J. of Korean Math. Soc. **45** (2008), 1113-1133.

[7] I. Jeong, H.J.Kim and Y.J.Suh *Real hypersurfaces in complex two-plane Grassmannians with parallel normal Jacobi operator*, Publ. Math. Debrecen **76** (2010), 203-218.

[8] U-H. Ki, J.D.Pérez, F.G. Santos and Y.J.Suh *Real hypersurfaces in complex space forms with ξ-parallel Ricci tensor and structure Jacobi operator*, J. of Korean Math. Soc.**44** (2007), 307-326.

[9] M. Kimura, *Real hypersurfaces and complex submanifolds in complex projective space*, Trans. Amer. Math. Soc. **296** (1986), 137-149.

[10] A. Martinez and J.D. Pérez, *Real hypersurfaces in quaternionic projective space*, Ann. Math. Pura Appl. **145** (1986), 355-384.

[11] J.D. Pérez and Y.J. Suh, *Real hypersurfaces of quaternionic projective space satisfying* $\nabla_{U_i} R = 0$, Diff. Geom. and Its Appl. **7** (1997), 211-217.

[12] J.D. Pérez and Y.J. Suh, *The Ricci tensor of real hypersurfaces in complex two-plane Grassmannians*, J. of Korean Math. Soc. **44** (2007), 211-235.

[13] J.D.Pérez, F.G. Santos and Y.J. Suh, *Real hypersurfaces in complex projective space whose structure Jacobi operator is Lie ξ-parallel*, Diff. Geom. and Its Appl. **22** (2005), 181-188.

[14] Y.J. Suh, *Real hypersurfaces in complex two-plane Grassmannians with parallel shape operator*, Bull. of Austral. Math. Soc. **67** (2003), 493-502.

[15] Y.J. Suh, *Real hypersurfaces of type B in complex two-plane Grassmannians*, Monatshefte für Math. **147** (2006), 337-355.

Florentino García Santos: In Memoriam
Universidad de Granada, 2011, págs. 107–114

Aprendiendo con un blog: análisis de una experiencia en los estudios de Matemáticas

Rafael López

Resumen El artículo analiza el uso de un blog como apoyo a las horas docentes de clase de una asignatura de la Licenciatura de Matemáticas. Presentamos esta experiencia y mostramos la metodología empleada.

1. Introducción y aproximación al contexto

Actualmente es habitual en el marco de la docencia universitaria, la existencia de páginas webs creadas por profesores. Desde éllas, los estudiantes pueden descargar apuntes desarrollados por el profesor, tareas y problemas propuestos por el mismo, así como guías docentes o bibliografía adicional. Éstas se presentan como un almacén de contenidos, donde el alumno llega y toma sólo aquello que le interesa, sin poder contribuir a su desarrollo. Recientemente, una nueva visión de internet ha emergido, más descentralizada y abierta, que comúnmente se conoce como Web 2.0, y que concibe internet basado en la interactividad, la colaboración y en la diseminación de contenidos. Como ejemplos de recursos Web 2.0 son las redes sociales, wikis, e-learning, blogs, etc. El alumnado universitario de hoy en día es un usuario habitual de internet, especialmente en el uso de redes sociales. Esto contrasta con el uso de internet en los estudios de Matemáticas, donde a veces, el punto de vista de muchos profesores es que los contenidos matemáticos deberían ser enseñados como un sistema cerrado, de forma que es habitual que las clases se desarrollen en la pizarra en una sucesión de definiciones, teoremas y demostraciones.

Desde la perspectiva Web 2.0, el autor ha implementado un blog en la asignatura "Topología I" de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Granada durante el año académico 2008/09 y continuado en los siguientes cursos 2009/10 y 2010/11. La dirección de internet del blog es: http://topologia-i.blogspot.com/. Los contenidos de la asignatura son difíciles debido al alto grado de abstracción y no es apropiado el uso de algún tipo de software informático como apoyo docente (GeoGebra, Mathematica o Sketchpad). La principal función de nuestro blog ha sido la

Rafael López, *rcamino@ugr.es*
Departamento de Geometría y Topología
Universidad de Granada
18071 Granada

de ser diario de la asignatura, una página web donde el profesor se centra en algún aspecto tratado en clase y que quiere desarrollar y discutir brevemente.

En el área de Matemáticas, el blog más popular es quizás “What’s new” de Terence Tao [6]. Otras veces, el blog es meramente un lugar web de noticias y anuncios, como sucede con el del Instituto de Ciencias Matemáticas de Madrid [7]. En el campo de la Topología existen blogs como “Sketches of Topology”, de K. Baker [8] y “Juegos Topológicos” de J. L. Rodríguez en la Universidad de Almería [9]. Ambos están concebidos como blogs donde los autores seleccionan un tema “popular” en Topología, el cual es explicado compresiblemente para una audiencia general, al menos, de Matemáticas. En contraste a estos dos últimos ejemplos, los temas en el blog que presentamos se refieren a asuntos concretos que han surgido en el aula, sin pretensión de ir más allá del grupo formado por el profesor y sus alumnos.

2. El diseño y la metodología del blog

Por un blog queremos decir un lugar web actualizado regularmente en el tiempo, que incluye, en el caso que estamos considerando aquí, el desarrollo cronológico de una asignatura [1]. El profesor publica un breve texto en el blog sobre un asunto que él ha seleccionado y que es denominado una entrada o post. El formato del blog permite a cualquiera escribir sobre dicha entrada en forma de comentarios. Señalemos que, contrario a lo que sucede en un foro en internet, el tema discutido en la entrada es escogido e iniciado por el administrador del blog, que en nuestro caso, es el profesor de la asignatura. Las características principales de nuestro blog son básicamente tres. La primera es que es transparente al público en el sentido que cualquier visitante, alumno o no, puede saber qué tipo de actividad se está desarrollando y participar en el blog; la segunda es que los contenidos del blog son aportados por los visitantes a través de los comentarios y discusiones; finalmente, la interacción que surge se realiza en un sentido horizontal porque cualquiera usa los mismos canales y métodos que el resto de usuarios. En este sentido, el blog permite que los estudiantes (y el profesor) desarrollen capacidades de lectura y escritura. Esto ha sido denominado por Rushkoff como “sociedad de la autoría” [5]. Por esta razón, podemos afirmar que el blog promociona igualdad al acceso del conocimiento entre todos los miembros del aula.

El diseño del blog es el típico de este formato: en la cabecera aparece el nombre del blog e inmediatamente debajo las últimas entradas, en sentido cronológico, siendo la entrada más reciente, la primera que aparece en el blog. Cada entrada tiene un título, una fecha de publicación y un enlace a los comentarios. Cada post tiene también unas palabras claves que permiten una clasificación temática de las entradas. En el lado derecho del blog, en una columna, hay una serie de gadgets respecto de diferentes asuntos relacionados con la asignatura, enlaces externos e información del blog.

Una de las ventajas para hacer un blog es que su creación es fácil, rápida y no necesita muchos conocimientos de ordenadores o informática. Ésta es la razón que hace que el blogging esté tan extendido [3]. El sistema de un blog permite la publicación de entradas, comentarios y su moderación. Sin embargo, y en el caso que mostramos, el blog tuvo que mejorarse en su presentación, y como consecuencia, tuvimos que aprender más sobre el diseño de blogs, especialmente, para el uso de LaTeX en el blog. El blog se aloja en Blogger porque encontramos el sistema manejable, fácil de usar, de confianza, así como que la política de seguridad de Google contra ataques de virus es efectiva. Además, permite el uso de otras herramientas diseñadas específicamente por Google que pueden ayudar en el desarrollo del blog. Un ejemplo de esto es Google Analytics, que mide el número de visitantes, así como el tipo de las mismas.

Ya que nuestro blog es el diario de la asignatura, nuestra primera y principal fuente de las entradas es el aula. Con esto en mente, al final de cada clase, el profesor elabora un pequeño texto y lo publica en el blog. El tema se centra en un aspecto específico relacionado con algo explicado en clase (un ejemplo, un ejercicio, un comentario o alguna duda) y que quiere que sea profundizado. Otras entradas tocan otros aspectos como pueden ser, curiosidades, notas históricas, biografías, etc. Un tercer grupo de entradas se refieren a aspectos del propio desarrollo docente de la asignatura, como pueden ser, exámenes, cambios de horario, etc.

El profesor es el administrador del blog. Esto significa que él es la única persona que puede modificar la configuración del blog y su diseño, y finalmente, el desarrollo posterior del mismo. Las entradas son realizadas por el profesor o por los alumnos. Si un estudiante quiere elaborar una entrada, el profesor supervisa dicha edición para que sea apropiada a los fines del blog, lo cual retrasa la publicación en dos o tres días. En tal caso, el estudiante comunica al profesor qué tipo y qué tema quiere desarrollar, y el profesor evalúa si merece o no ser publicado en el blog. En caso afirmativo, el estudiante elabora el post y posteriormente le da al profesor el texto definitivo para que lo escriba, indicando la autoría de la entrada.

Algunas características acerca de la forma de participar en nuestro blog son las siguientes:

1. Acceso abierto a cualquiera y cualquiera puede participar. El blog no está limitado a los alumnos de la asignatura. De hecho, es así como sucede, como muestra un análisis de las estadísticas de los visitantes.

2. No es necesario registrarse en el blog. El visitante puede firmar como "anónimo", aunque esto ha sucedido en casos aislados. Sin embargo, los alumnos que constituyen la asignatura firman sus propios comentarios ya que la participación en el blog forma parte de su evaluación.

3. No hay restricción ni censura en los comentarios y el administrador del blog no los ve previamente ni los corrige después.

4. El profesor también participa con comentarios, aunque nuestra idea es que no se involucre demasiado en ello, esperando que otros alumnos continúen con la discusión y sólo interviene con la finalidad de clarificar o corregir.

El trabajo del profesor en la administración y el mantenimiento técnico del blog es alto, concretamente:

1. Elabora las entradas. Debe estar pensando constantemente un tema para escribir ya que las entradas son publicadas regularmente. El ritmo de publicación ha sido alto, ya que intentamos que haya una entrada por cada sesión de clase (cuatro veces a la semana).

2. Modera el blog. Esta labor es consecuencia de los comentarios y discusiones surgidos alrededor de una entrada, o para resolver preguntas propuestas por los estudiantes. Necesita leer regularmente los comentarios y decide cuándo participar en las discusiones.

3. Elabora el material docente del blog que aparece en la columna de la derecha del formato. Aunque gran parte de este material ha sido escrito en el pasado, el profesor actualiza y corrige constantemente estos contenidos.

4. El profesor tiene que llevar una medida de quién hace los comentarios y cuántas veces ya que la participación en el blog es parte de la nota del alumno.

5. Mejora los aspectos técnicos del blog y es quien decide su diseño y su configuración. Este trabajo es alto al principio, y posteriormente menor.

Finalmente, no hemos tenido otro tipo de problemas y que han sido descritos en la literatura [4]. Por ejemplo, la posible interferencia de grupos hostiles con el único propósito de causar problemas con comentarios inapropiados o que generan automáticamente un número excesivo y artificial de comentarios. Tampoco hemos tenidos problemas con banners o publicidad.

3. Puntos fuertes y débiles de la experiencia

Tanto profesor como los alumnos de la asignatura “Topología I” no se habían enfrentado previamente con una experiencia de este tipo. Para el profesor, ha supuesto aprender cómo construir y desarrollar un blog y ha tenido que involucrarse casi diariamente en la publicación de una entrada sobre algo sucedido en el aula, trabajando desde la inmediatez. Para el alumno, ha sido un esfuerzo añadido en el aprendizaje habitual de una asignatura, ya que ha tenido que visitar frecuentemente el blog si quería saber qué asuntos se estaban discutiendo en el mismo. Señalamos algunas habilidades que un alumno aprende a través de su participación en el blog.

1. Estimula el trabajo autónomo, ya que el estudiante decide si quiere o no participar en este proyecto. Simplemente con el hecho de leer la última entrada del blog, el alumno opta por involucrarse en la experiencia. Más tarde, decide si quiere contribuir con un comentario o incluso con una entrada.

2. Estimula el trabajo diario, porque uno necesita visitar el blog regularmente. Si un post es interesante, debe comprender el propósito de la entrada y su relación con lo explicado en clase.

3. Incrementa el interés por la asignatura, compartiendo con sus compañeros preguntas, comentarios y discusiones a través del blog.

4. Desarrolla e incrementa la capacidad de comunicación. Esto aparece reflejado en las expresiones escritas por el estudiante cuando realiza algún comentario. Señalemos que una característica particular de las Matemáticas es la precisión en las expresiones y en los razonamientos lógicos. Escribiendo en un blog, los estudiantes muestran a cualquier visitante, el nivel de su aprendizaje y comprensión y por tanto deben cuidar la presentación y redacción de sus textos.

5. Estimula el sentido crítico ya que una parte de los comentarios son consecuencia de otros realizados por el profesor o sus compañeros.

Con algo más de detalle, existe una variedad de beneficios tanto para el profesor como para el alumno y que pasamos a detallar.

1. El blog ha representado una nueva forma de comunicación entre el profesor y sus alumnos, y entre los propios alumnos. Esto último es incluso más interesante porque ha significado una nueva forma de relación entre ellos fuera del aula, y más cercana a la idea de una red social.

2. Los contenidos (posts y comentarios) han sido generados por el profesor y los alumnos y los sucesivos comentarios-entradas-comentarios han producido una retroalimentación en la creación de contenidos del blog.

3. Un mejor desarrollo de la asignatura, porque el blog ha permitido enfatizar aquellos aspectos teóricos y prácticos con la ventaja que ha sido realizados en el mismo día que han surgido en el aula.

4. Se ha ejercido una acción tutorial, porque los estudiantes han usado los comentarios a una entrada para realizar preguntas sobre algún aspecto de la asignatura, ejercicios de clase o dudas.

5. Diseminación del proyecto, ya que la mayor parte de los visitantes del blog ha sido personas que no son de la Universidad de Granada, especialmente de países latinoamericanos.

Discutimos también aquellos puntos débiles de la experiencia y que pueden probablemente ser resueltos con el paso de los años.

- La participación de los estudiantes no ha sido tan alta como uno podría haber esperado al principio de la experiencia. La razón es que el alumno necesita llevar al día el desarrollo de la asignatura para poder comprender en su totalidad qué se quiere mostrar con cada entrada o si él quiere dar una opinión con un comentario. En parte, este problema podría ser resuelto si el profesor asigna previamente, como trabajo de clase, la edición de una entrada en el blog.

- El problema de la inmediatez del blog. Ha sido difícil a veces encontrar un tema apropiado para hacer una entrada, o lo suficientemente atractivo y útil para el alumno. Esto se ha incrementado en algunos periodos del curso académico, especialmente en vacaciones y fines de semana, debido a la falta de clases. A esto se le une que el ritmo de publicación no ha sido uniforme a lo largo de curso y ha dependido de los periodos lectivos.

- El nivel de discusión en el blog ha dependido de los temas publicados. Algunas entradas han estimulado una alta participación entre los visitantes pero otras relacionadas con aspectos históricos, nuevos enlaces o nuevos recursos didácticos, han recibido un nivel bajo de atención.

- El hecho que los comentarios y entradas realizados por los estudiantes aparezcan en la web y que cualquiera pueda verlos, ha provocado cierto recelo a la hora de comentar y disuade una participación más activa.

Un análisis estadístico de las visitas al blog puede hacerse a través de la aplicación Google Analytics de Google. En el primer año, el número de visitas fue de 15369 y en el segundo, de 21315. El número de colaboraciones de los alumnos en la elaboración de entradas ha sido 17 en el primer año y 13 en el segundo. En el periodo Enero-Septiembre de 2009, hubo 201 comentarios (para 123 entradas). La relación ha sido 1,65 comentarios por entrada. En el periodo Octubre 2009-Junio 2010, el número de comentarios fue de 117 (para 87 entradas). En este caso la relación es 1,75. En general, las entradas donde el profesor ha propuesto algún tipo de ejercicio, han recibido mayor número de comentarios. Por el contrario, aquellas entradas meramente descriptivas o que solamente clarificaban alguna definición o teorema, han recibido pocos comentarios.

La dimensión de nuestro blog ha ido más allá del aula. El hecho de que el blog pueda ser leído por internet y que los contenidos puedan ser interesantes por otros estudiantes, hace que el blog traspase nuestro aula. En este sentido, uno de los aspectos más interesantes de los visitantes es el origen (por regiones) de los mismos. Podemos afirmar que casi todos los visitantes del blog no son estudiantes de la Universidad de Granada. Por ejemplo, durante 2009/10, hubo 2107 visitantes de la Universidad de Granada representando sólo el 9,88 % del total de las visitas.

Sabemos también que el país que ha aportado más visitantes es España, pero incluso considerando a España como país de origen, Granada es sólo parte de los visitantes. Los visitantes desde Granada y provincias cercanas alcanza el 31 % y por supuesto, ciudades como Madrid y Barcelona son el origen de la mayor parte de los usuarios del blog. Si uno considera el resto del mundo, observamos de nuevo el interés del blog para otros países. España es el país con el mayor número de visitantes, pero sólo representa el 31 % del total. Hay un gran número de visitantes desde Latinoamérica, debido al lenguaje común (español). Así países como Mexico, Colombia y Argentina contribuyen con un gran número de visitantes.

4. Conclusiones

Nuestra tesis en este artículo es que los blogs son útiles como herramienta educativa para los profesores en el contexto de la enseñanza universitaria porque sirven como apoyo y complemento de las clases habituales en el aula. Para conseguir este objetivo, nuestra idea es que el blog sea un diario de la asignatura, con un alto ritmo de publicación de entradas y que cada una de ellas esté relacionada con algún asunto tratado en clase. Las relaciones establecidas a través del blog han proporcionado valor añadido al uso de internet, y en nuestro caso, nuevas formas de expresión de tipo Web 2.0.

Las relaciones establecidas a través del blog han proporcionado valor añadido al uso de internet, y en nuestro caso, nuevas formas de expresión de tipo Web 2.0. Este tipo de experiencias son comúnmente observadas con cierto recelo, especialmente en los estudios de Matemáticas donde los contenidos docentes apenas cambian con el paso del tiempo. El uso de blogs es útil como una iniciación en procesos de e-learning basados en la web, y donde el vehículo de comunicación en sí mismo se nos presenta como generador de nuevos contenidos y como forma de interacción entre el profesor y los alumnos.

Finalmente, queremos dar importancia al hecho que los contenidos del blog han servido para traer una nueva dimensión al trabajo desarrollado durante el curso. Alrededor del blog, se ha formado una pequeña comunidad que se muestra en internet a cualquier persona interesada en las actividades que se desarrollan en el blog. El trabajo producido durante el curso por este grupo ha dejado una marca, una “huella en internet”, donde las discusiones y comentarios, junto con las entradas y el material docente, realiza una “memoria colectiva” la cual puede ser útil a otras personas [2].

Referencias

[1] P. Bausch, M. Haughev, M. Hourihan, *We blog: publishing online with weblogs*, Wiley, Indianapolis, 2002.

[2] A. Gewerc, El uso de weblogs en la docencia universitaria, *Rev. Lat. Tec. Educ.*, **4** (2005), 9–24.

[3] J. Henning, *The blogging iceberg: of 4.12 million weblogs, most little seen and quickly abandoned*, Perseus, Braintree, 2003.

[4] S. Lujan, S. Espinosa , The use of weblogs in higher education: benefits and barriers, 2007. *http://gplsi.dlsi.ua.es/proyectos/webeso/pdf/inted07.pdf*

[5] D. Rushkoff, *Open Source Democracy. How online communication is changing offline politics*, Demos, London, 2003

[6] *http://terrytao.wordpress.com/*

[7] *http://www.madrimasd.org/blogs/matematicas*

[8] *http://sketchesoftopology.wordpress.com*

[9] *http://topologia.wordpress.com*

Florentino García Santos: In Memoriam
Universidad de Granada, 2011, págs. 115–117

Una extensión del teorema de Krust para superficies mínimas

Francisco Martín • Cristóbal Reyes

Resumen En 1989 Krust demostró que, dado un grafo minimal M sobre un dominio convexo de $\mathbb{R}^2$, entonces la superficie minimal conjugada M^* está embebida. Nosotros generalizamos este resultado a una familia más amplia de superficies mínimas.

1. Introducción

Sea (M, ds^2) una superficie riemanniana *orientable* y $X : M \to \mathbb{R}^3$ una inmersión isométrica. Es bien conocido que X verifica

$$\Delta X = 2\, H\, N,$$

donde N denota la aplicación de Gauss de M y H la curvatura media asociada. Es claro entonces que X es minimal si, y sólo si, sus coordenadas son funciones armónicas. Si M es simplemente conexa y X^* representa la conjugada armónica de X, entonces sabemos que se verifica:

$$dX^* = -\, dX \circ \mathrm{Rot}_{\pi/2}, \tag{26}$$

siendo $\mathrm{Rot}_{\pi/2}$ el giro de 90 grados en el plano tangente inducido por la orientación de M.

Definición 1.1. *Sea $X : M \to \mathbb{R}^3$ una inmersión minimal y $\beta : [a,b] \to M$ una curva diferenciable. Si llamamos $\alpha := X \circ \beta$, definimos el vector* **conormal** *a α en t como $\eta(t) := N(\alpha(t)) \times \alpha'(t)$.*

Observación 1.1. *De (26) se obtiene claramente que si llamamos $\alpha^* := X \circ \beta$, entonces $(\alpha^*)'(t) = \eta(t)$.*

Con estas premisas, R. Krust demostró en 1989 el siguiente resultado (véase [1, 2]):

Francisco Martín, *fmartin@ugr.es*
Cristóbal Reyes, *creyes@correo.ugr.es*
Dep. Geometría y Topología, Facultad de Ciencias, Universidad de Granada, 18071-Granada

Teorema 1.1 (Teorema de Krust)**.** *Si una superficie minimal embebida $X : B \to \mathbb{R}^3$, $B = \{w \in \mathbb{C}$ tal que $| \ w \ |< 1\}$ puede ser escrita como un grafo de un dominio convexo en un plano, entonces la correspondiente superficie conjugada $X^* : B \to \mathbb{R}^3$ es también un grafo.*

Le demostración de Krust es esencialmente analítica y se basa, sobre todo, en la representación conforme del grafo minimal que proporciona los datos de Weierstrass. Los detalles pueden verse, como ya hemos dicho, en [1].

2. Extensión del Teorema de Krust

En esta sección pretendemos dar una demostración alternativa, más geométrica, del resultado de Krust, a la vez que proporcionamos un resultado más general.

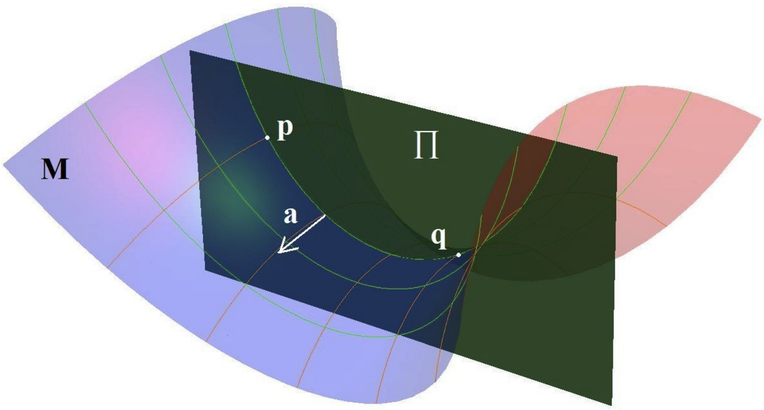

Figura 4: La superficie M y el plano Π.

Teorema 2.1. *Sea M una superficie minimal tal que para todo $p, q \in M$ existe un corte plano transverso uniendo p y q, es decir, que existe un plano Π que corta transversalmente a M y la curva $\Pi \cap M$ contiene una componente conexa σ uniendo p y q. Entonces su superficie conjugada M^* esta embebida.*

Demostración. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\sigma(t)$ está parametrizada por el arco, con

$$\sigma : [0, \ell] \to M, \quad \sigma(0) = p, \quad \sigma(\ell) = q.$$

Sea $\eta(t)$ el vector conormal a M a lo largo de $\sigma(t)$.

Sea $a \in \mathbb{S}^2$ tal que a es ortogonal al plano Π definido en la hipótesis. Como el plano Π es transverso a M entonces $\langle \eta(t), a\rangle \neq 0$ para todo $t \in I$, donde I es el intervalo donde esta definida la curva σ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ representa el producto escalar usual de $\mathbb{R}^3$.

Podemos suponer también que $\langle \eta(t), a\rangle > 0$, si no tomaríamos $-a$ en lugar de a. Consideremos ahora la curva conjugada $\sigma^* : [0, \ell] \to M^*$ verificando $\sigma^*(0) = p^*$ y $\sigma^*(\ell) = q^*$, donde p^* y q^* son la imagen por la inmersión conjugada de p y q respectivamente. Es claro entonces que:

$$\langle q^* - p^*, a\rangle = \langle \int_0^\ell (\sigma^*)'(t)dt, a\rangle = \langle \int_0^\ell \eta(t)dt, a\rangle = \int_0^\ell \langle \eta(t), a\rangle dt > 0,$$

de donde claramente se tiene que $q^* - p^* \neq 0$, es decir, $p^* \neq q^*$. Por tanto llegamos a que M^* la superficie conjugada de M es embebida. □

Observación 2.1. *Es inmediato comprobar que si M es un grafo sobre un convexo, entonces verifica las condiciones del Teorema 2.1. Además en este caso $N(M)$ está contenida en un hemisferio. Como M^* tiene la misma aplicación de Gauss que M, entonces M^* sería también un grafo.*

A partir del Teorema 2.1 podemos obtener varios corolarios, de entre ellos destacamos:

Corolario 2.1. *Sea M una superficie minimal que es un grafo sobre una región (geodésicamente) convexa de una esfera. Entonces su superficie conjugada M^* está embebida.*

Agradecimientos

El primer autor está parcialmente financiado por el proyecto MTM2007-61775 del Ministerio de Educación y Ciencia y por el proyecto de excelencia P09-FQM-5088 de la Junta de Andalucía.

Referencias

[1] U. Dierkes, S. Hildebrandt, A. Küster, O. Wohlrab, *Minimal surfaces I*, Grundlheren der mathematischen Wissenschaften, 295, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[2] D. Hoffman, H. Karcher, *Complete embedded minimal surfaces of finite total curvature. Geometry, V.* R. Osserman (Editor), 5-93, Encyclopaedia Math. Sci., 90, Springer, Berlin, 1997.

Florentino García Santos: In Memoriam
Universidad de Granada, 2011, págs. 119–127

Aportación en Geometría Diferencial Afín

Antonio Martínez • Francisco Milán

Dedicado a la memoria del Profesor Florentino García Santos.

Resumen La aportación realizada por el Profesor Florentino García Santos en el campo de la Geometría Diferencial Afín, ha resultado ser pionera en técnicas y resultados generales de clasificación de superficies afines con invariantes afines constantes. El objetivo del presente artículo es mostrar algunos de estos resultados, su impacto y los avances realizados.

1. Antecedentes y planteamiento del problema

Si bien la geometría diferencial afín tiene una larga historia cuyos orígenes se remontan a 1841 en un trabajo de Transon sobre el normal afín de una curva, fue 65 años después cuando un grupo de geómetras como Pick (1906) y Tzitzéica (1907), entre otros, iniciaron el estudio sistemático y profundo de aquellas propiedades de curvas y superficies que son invariantes bajo el grupo unimodular (o equiafín) de transformaciones de $\mathbb{R}^3$.

A partir de 1916, Blaschke y sus colaboradores continuaron con este estudio, publicando en 1923 la primera monografía en Geometria Diferencial Afín, [2]. Ellos desarrollaron la Teoría Equiafín de Superficies de forma análoga a la Teoría clásica de superficies, tratando de buscar invariantes equiafines sobre las mismas. De hecho, ya observaron que para una superficie no degenerada en $\mathbb{R}^3$ es posible introducir:

- Una métrica invariante por transformaciones equiafines, conocida como *métrica afín* o *métrica de Blaschke*, que, esencialmente, no es mas que la segunda forma fundamental corregida por una potencia de la función curvatura de Gauss euclídea de la superficie.

- Una normalización equiafín, determinada por un campo de vectores transversal llamado *normal afín* cuya dirección en cada punto, en el caso localmente convexo, viene dada por la velocidad de la curva que determinan los centros de gravedad de las secciones de la superficie con los planos paralelos al plano

Antonio Martínez, *amartine@ugr.es*
Francisco Milán, *milan@ugr.es*
Dep. Geometría y Topología, Facultad de Ciencias, Universidad de Granada, 18071-Granada

tangente en dicho punto. En consecuencia, hiperboloides y elipsoides verifican que su vector de posición respecto a su centro es paralelo a la correspondiente dirección del normal afín, y en un paraboloide, la dirección del normal afín es siempre constante.

Concretamente, sea $\psi : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie con segunda forma fundamental σ no degenerada y normal unitario η. Con estos invariantes euclídeos, se pueden introducir la **métrica afín** h y el **conormal afín** N como

$$h = |K|^{-1/4}\sigma \ \ y \ \ N = |K|^{-1/4}\eta,$$

donde por K se denota la curvatura de Gauss euclídea de la inmersión.

El **normal afín** de la inmersión viene dado por el siguiente campo de vectores transversales

$$\xi = \frac{1}{2}\Delta_h \psi,$$

siendo Δ_h el Laplaciano para la métrica afín. Este campo puede ser caracterizado como el único campo de vectores transversal a Σ (o $\psi(\Sigma)$) que verifica la siguiente normalización:

$$< N, \xi >= 1 \ \ y \ \ < N, D_X\xi >= 0, \ \ \forall X \in T\Sigma, \tag{27}$$

siendo D la conexión afín llana usual de $\mathbb{R}^3$.

De forma natural, aparecen también la **conexión afín inducida** ∇ y el **operador afín de Weingarten** S, dados por

$$D_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y)\xi, \quad SX = -D_X\xi, \quad \forall X, Y \in T\Sigma \tag{28}$$

así como los invariantes afines

$$H = \frac{1}{2}traza(S) \ \ y \ \ \tau = det(S),$$

que se denominan **curvatura media afín** y **curvatura afín de Gauss-Kronecker**, respectivamente. Además, de (27) y (28) se puede deducir que

$$\Delta_h N = -2HN.$$

El Teorema Afín Egregio establece también que

$$\kappa = H + J,$$

donde κ es la curvatura de Gauss de la métrica afín h y J es el **invariante Pick** dado por

$$J = \frac{1}{8}h(\nabla h, \nabla h),$$

el cual mide la diferencia entre ∇ y la conexión de Levi-Civita para h.

De hecho, cuando la métrica afín es definida, el clásico Teorema de Berwald, establece que las dos conexiones coinciden si y sólo si $J = 0$ y la superficie es parte de una cuádrica. En 1918 y para el caso indefinido, J. Radon [17] clasificó todas las superficies con $J = 0$ y H constante obteniendo localmente superficies regladas.

Salvo estos resultados clásicos, la clasificación de las superficies afines con invariantes afines constantes ha sido uno de los principales objetivos para un buen entendimiento de la geometría diferencial afín y sigue siendo una de sus metas más importantes.

En este sentido, algunas familias particulares han merecido una especial atención, destacamos:

Esferas afines con κ constante.

Las superficies umbilicales de esta teoría denominadas también *esferas afines*, son superficies afines cuyas rectas ‘normales afines"son todas paralelas (esferas afines *impropias*) o pasan todas por un punto fijo llamado centro (esferas afines *propias*); en ellas la curvatura media afín H es automáticamente constante. En este sentido, las esferas afines con métrica afín de curvatura constante fueron clasificadas por U. Simon en [18], quien generalizó resultados de M. Magid y P. Ryan, [10], A.M. Li y G. Penn, [7], T. Kurose, [6] y J. Radon, [17]. Concretamente, toda esfera afín con κ constante es una cuádrica o afínmente equivalente a una de las siguientes superficies (ver Figura 5)

- La superficie de ecuación $xyz = 1$ con métrica afín definida, $H < 0$ y $\kappa = 0$.
- La superficie de ecuación $x(y^2 + z^2) = 1$ con métrica afín indefinida, $H \neq 0$ y $\kappa = 0$.
- La superficie reglada de ecuación $z = xy + f(y)$ donde f es una función diferenciable. Esta superficie tiene métrica afín indefinida, $H = 0$ y $\kappa = 0$

Superficies regladas con κ constante.

Es bien conocido que toda superficie afín reglada tiene invariante Pick nulo, [12]. Así, toda superficie reglada con curvatura media afín constante tiene su métrica afín de curvatura constante.

Superficies con $3\kappa = H$.

Las superficies con $3\kappa = H$ juegan un papel fundamental en el estudio de las superficies con invariantes afines constantes. De [19], se tiene que las superficies

$$\left(u, v, \frac{1}{2}\left(u^2 + \varepsilon v^{\frac{2}{3}}\right)\right), \qquad \varepsilon = \pm 1 \tag{29}$$

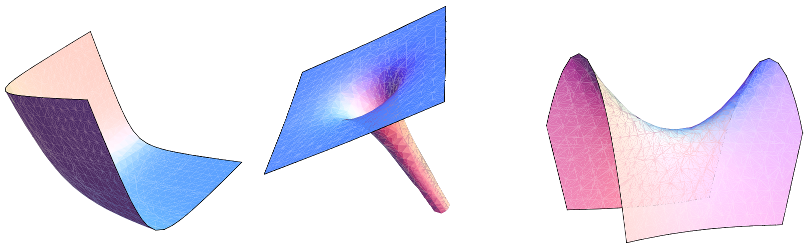

Figura 5: Esferas afines con κ constante (no cuádricas).

no son esferas afines y tienen H y τ constantes. Además $3\kappa = H$.

Estas familias de ejemplos motivaron que los autores en colaboración con los profesores F. Dillen, L. Vrancken y el profesor Florentino García Santos, nos propusiésemos en [5] avanzar en la clasificación general de las superficies afines con invariantes κ, H y J constantes.

2. Resultados

2.1. Superficies con invariante Pick no nulo

En el caso particular de que el invariante Pick sea una constante no nula, (se puede suponer que ésta es positiva, en caso contrario cambiamos el signo del normal afín) logramos demostrar la existencia de una referencia ortonormal que diagonaliza la forma cúbica ∇h y permite probar el siguiente resultado de clasificación: $\boldsymbol{\varrho}$ Si una superficie afín con métrica afín de curvatura constante tiene invariante Pick J constante y positivo, entonces $3\kappa = H$ o su curvatura afín de Gauss-Kronecker, τ, es también constante. Resultado que usamos para demostrar que

Teorema 1. *Una superficie afín con métrica afín de curvatura constante e invariante Pick constante y positivo es una esfera afín con curvatura afín de Gauss nula o* $3\kappa = H < 0$.

Corolario 2. *Una superficie afín localmente convexa en* $\mathbb{R}^3$*, con métrica afín de curvatura constante positiva e invariante Pick constante es parte de un elipsoide.*

Para el caso en que $3\kappa = H$, aparte de los ejemplos descritos en la sección anterior, obtenemos, usando el Teorema Fundamental de Existencia de Radón, dos nuevas superficies Σ_1 y Σ_2 que aunque no pueden describirse explícitamente si nos permiten obtener la siguiente clasificación

Teorema 3. *Si una superficie afín tiene métrica afín de curvatura constante y* $3\kappa = H \neq 0$*, entonces ha de ser una parte de las superficies descritas en (29) o de las superficies* Σ_1 *o* Σ_2.

2.2. Superficies con invariante Pick nulo

En el caso localmente convexo, el Teorema de Berwald nos dice que las únicas superficies con invariante Pick nulo son parte de una cuádrica, por tanto la clasificación de ésta familia de superficies se puede reducir a estudiar el caso en el que la métrica afín sea indefinida.

Aunque la familia de superficies con $J = 0$ resulta ser bastante amplia, en [5], obtenemos una descripción de las mismas:

Teorema 4. *Si una superficie afín tiene métrica afín indefinida de curvatura constante y* $J = 0$*, entonces en un entorno de cada punto puede ser descrita como la siguiente superficie reglada dada por*

$$x(u, v) = uf(v) + g(v),$$

donde las curvas f *y* g *verifican:*

$$Det[f, g', f'] = 1, \qquad Det[f, f', f''] = H.$$

3. Impacto y avances

El estudio y clasificación realizado en [5] sobre las superficies afines con H, J y $\kappa = H + J$ constantes, proporcionó ideas y caracterizaciones de los ejemplos fundamentales de esta teoría, que han motivado y siguen haciéndolo resultados en distintas direcciones:

3.1. Superficies con métrica afín definida y llana

En el caso localmente convexo es bien conocido, por el clásico Teorema de Pick y Berwald, que la única superficie afín llana con $J = 0$ es el paraboloide elíptico. Sin embargo, en [5] se caracterizan también:

- La esfera afín llana $xyz = 1$ que tiene invariante Pick J constante no nulo.

- La superficie de revolución

$$\psi(u,v) = \Big(\cosh(3u)^{\frac{1}{3}}\cosh(\sqrt{3}v), \cosh(3u)^{\frac{1}{3}}\sinh(\sqrt{3}v), \int_0^u \cosh(3t)^{\frac{-2}{3}}dt\Big) \tag{30}$$

  que es llana y completa respecto la métrica afín y no tiene otros invariantes afines constantes.

Estos ejemplos han abierto la puerta al interesante problema, aun sin resolver de:

> “clasificar las superficies afines de curvatura afín de Gauss nula tanto desde un punto de vista local como global".

Aportaciones en esta dirección han sido la de Manhart, [11], quien completa la clasificación de las superficies afines llanas de revolución con otros ejemplos que no tienen su métrica afín completa y la de Lee y Vrancken, [9], quienes prueban que las únicas superficies afines llanas completas y proyectivamente llanas son afinmente equivalentes a un paraboloide elíptico o a la esfera afín $xyz = 1$.

En relación con este último resultado de Lee y Vrancken, mencionar que sigue como problema abierto el conocer si estas dos esferas afines son o no las únicas superficies afines llanas completas con curvatura afín de Gauss-Kronecker constante.

Los tres ejemplos anteriores han sido caracterizados, ver [13], como las únicas superficies con métrica afín completa y de curvatura nula, cuyo endomorfismo afín de Weingarten e invariante Pick verifican la siguiente condición:

$$\text{traza}(\nabla S) + \mu \text{grad}_h(J) = 0$$

para alguna constante μ que es nula en el caso de superficies proyectivamente llanas.

Estos tres ejemplos, ver también Figura 6, resultan ser las únicas superficies afines llanas y de Weingarten conocidas hasta el momento, quedando abierta su clasificación.

3.2. Superficies con métrica afín indefinida y llana

Contrariamente al caso localmente convexo, cuando la métrica afín es indefinida, el Teorema 4 nos dice que tenemos una gran familia, que incluye a las superficies regladas con curvatura media afín nula. Además, en [12] describimos estas superficies, que son puntos críticos para el funcional área afín, a partir de las soluciones de la ecuación diferencial ordinaria $y'' = by$. y probamos que el índice de esta ecuación guarda una estrecha relación con el signo de la segunda variación del área afín de la superficie y el número de vueltas que da. Esto contrasta con el caso convexo, donde E. Calabi, [3], probó que la segunda variación del área afín es siempre negativa.

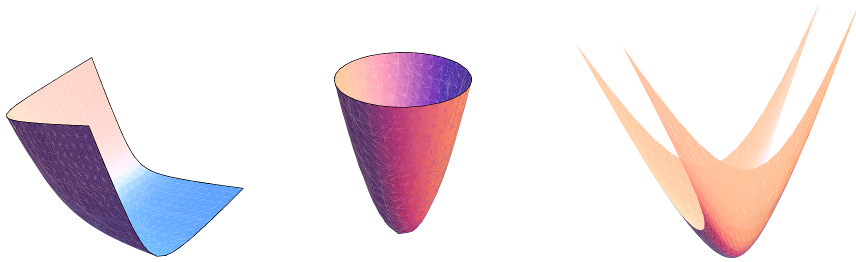

Figura 6: Superficies afines completas y llanas.

3.3. Otros resultados

Caracterizaciones locales de superficies afines con invariantes afines constantes han sido también obtenidas por C. Chen y H. Sun, [4], quienes han clasificado las superficies afines de traslación con H constante.

Por otro lado, la existencia de superficies afines homogéneas y no homogéneas con J y $H = 3k$ constantes ha motivado la búsqueda de otras condiciones para distinguirlas. Así por ejemplo en [14], se prueba que si una superficie localmente convexa tiene invariante Pick constante y curvatura afín de Gauss-Kronecker nula, entonces, salvo transformaciones afines, ha de ser una parte de un paraboloide elíptico o de la superficie afín homogénea

$$(u, v, \frac{1}{2}(u^2 + v^{-2/3})), \qquad v > 0.$$

Recientemente, P.J. Olver, [16], ha destacado la importancia del invariante Pick en el conocimiento de las superficies afines y T. Binder, [1], ha probado que las curvas de gravedad, que dan la dirección del normal afín, son llanas si y sólo si $3H + J$ es constante. Pero de momento no se conoce ningún ejemplo que verifique esta condición y que tenga invariante Pick no constante.

Referencias

[1] T. Binder, An affine invariant characterization of flat gravity curves, *Abh. Math. Semin. Univ. Hambg.* **79** (2009), 265–281.

[2] W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie II. Affine Differentialgeometrie. *Springer*, 1923.

[3] E. Calabi, Hypersurfaces with maximal affinely invariant area, *Amer. J. Math.* **104** (1984), 91–126.

[4] C. Chen y H. Sun, On affine translation hypersurfaces of constant mean curvature. *Publ. Math. Debrecen* **64** (2004), 381–390.

[5] F. Dillen, A. Martínez, F. Milán, F.G. Santos y L. Vrancken, On the Pick invariant, the affine mean curvature and the Gauss curvature of affine surfaces, *Result. Math.* **20** (1991), 622–642.

[6] T. Kurose, Two results in the affine hypersurface theory, *J. Math. Soc. Japan* **41(3)** (1989), 539–548.

[7] A.M. Li y G. Penn, Uniqueness theorems in affine diferential geometry, part II, *Results Math.* **13** (1988), 308–317.

[8] A.M. Li, U. Simon y G. Zhao, Global affine differential geometry of hypersurfaces, *Walter de Gruyter* 1993.

[9] C.I. Lee y L. Vrancken, Projectively flat affine surfaces with flat affine metric, *J. Geom.* **70** (2001), 85–100.

[10] M.A. Magid y P. Ryan, Flat affine spheres in $\mathbb{R}^3$, *Geom. Dedicata* **33(3)** (1990), 277–288.

[11] F. Manhart, Affine rotational surfaces with vanishing affine curvature., *J. Geom.* **80(1-2)** (2004), 166–178.

[12] A. Martínez y F. Milán, On affine-maximal ruled surfaces, *Math. Z.* **208** (1991), 635-644.

[13] A. Martínez, F. Milán y L. Vrancken, A class of surfaces with flat Blaschke metric and their characterization, *Annals of Global Analysis and Geometry* **28** (2005), 35-57.

[14] F. Milán, Pick invariant and affine Gauss-Kronecker curvature, *Geom. Dedicata* **45** (1993), 41-47.

[15] K. Nomizu y T. Sasaki, Affine differential geometry, *Cambridge University Press* 1994.

[16] P.J. Olver, Moving frames and differential invariants in centro-affine geometry *Lobachevskii J. Math.* **31** (2010), 77–89.

[17] J. Radon, Zur affingeometrie der regelflächen, *Leipzier Berichte* **70** (1918), 147–155.

[18] U. Simon, Local classification of two-dimensional affine spheres with constant curvature metric *Differential Geom. Appl.* **1** (1991), 123–132.

[19] L. Vrancken, Affine surfaces with constant affine curvatures, *Geom. Dedicata* **33** (1990), 177–194.

Florentino García Santos: In Memoriam
Universidad de Granada, 2011, págs. 129–144

Apuntes sobre la producción científica de Florentino

Miguel Ortega • Juan D. Pérez • Young J. Suh

Resumen Como no podía ser de otra forma, Floro realizó una intensa labor investigadora, que desarrolló durante más de treinta años. El segundo autor compartió con él gran parte de estos años, mientras el tercero lo hizo durante los últimos siete. Sus artículos versan principalmente sobre la *Teoría de Hipersuperficies*, en especial en espacios modelo complejos y cuaterniónicos. Colaboró con otros once científicos, consiguiendo un índice $h = 5$ según MathSciNet. En este capítulo, se repasan sus últimas aportaciones y se incluyen unas breves notas acerca de sus artículos.

1. Aportaciones recientes

En esta sección, vamos a comentar las últimas aportaciones científicas de Floro, en las que colaboró principalmente con el segundo y tercer autores de este capítulo.

1.1. El operador de Jacobi estructural de una hipersuperficie real del espacio proyectivo complejo

Denotaremos por $\mathbb{C}P^m$, $m \geqslant 2$, el espacio proyectivo complejo dotado de la métrica g de curvatura seccional holomorfa 4. Sea M una hipersuperficie real (subvariedad de codimensión 1) sin borde en $\mathbb{C}P^m$ y N un campo local normal unitario sobre M. Si J denota la estructura compleja del espacio proyectivo complejo, $\xi = -JN$ es un campo tangente a M que llamaremos el campo estructural sobre M. Para cada campo X tangente a M, escribimos $JX = \phi X + \eta(X)\xi$, donde ϕX denota la componente tangente de JX y η es una 1-forma definida sobre M. Así, (ϕ, ξ, η, g) define una estructura métrica casi de contacto sobre M. Para sus propiedades ver [1]. Llamaremos también $\mathcal{D}$ a la distribución maximal holomorfa sobre M, que, en cada punto, está dada por todos los vectores tangentes ortogonales a ξ.

Takagi, [20], [21], clasificó las hipersuperficies reales homogéneas de $\mathbb{C}P^m$, obteniendo seis tipos diferentes. Podemos destacar las correspondientes a los tipos A_1

Miguel Ortega, *miortega@ugr.es*
Juan D. Pérez, *jdperez@ugr.es*
Dep. Geometría y Topología, Facultad de Ciencias, Universidad de Granada, 18071-Granada
Young J. Suh, *yjsuh@knu.ac.kr*
Department of Mathematics, Kyungpook National University, Taegu. korea

(hiperesferas geodésicas) y A_2 (tubos sobre espacios proyectivos complejos totalmente geodésicamente embebidos en $\mathbb{C}P^m$). Ambos tipos fueron caracterizados por Okumura, [9], como las únicas hipersuperficies reales para las que $A\phi = \phi A$, donde A es el endomorfismo de Weingarten asociado al campo normal N. Aparte de las hipersuperficies reales de la lista de Takagi, la otra familia importante de hipersuperficies reales en el espacio proyectivo complejo la constituyen las hipersuperficies reales regladas que verifican que la distribución $\mathbb{D}$ es integrable y su variedad integral es un espacio proyectivo complejo $\mathbb{C}P^{m-1}$ totalmente geodésico. Ejemplos de este tipo de hipersuperficies reales se encuentran en [5] y [8].

Por otro lado, los campos de Jacobi a lo largo de geodésicas de una variedad de Riemann dada verifican una ecuación diferencial muy conocida, que inspira los llamados operadores de Jacobi sobre dicha variedad: Si R denota el operador de curvatura de la variedad y X es un vector tangente, el operador de Jacobi (con respecto a X) en el punto p se define como $(R_X(Y))(p) = (R(Y,X)X)(p)$ para cualquier vector tangente en p, Y. Tenemos, pues, un operador de Jacobi definido para cada campo tangente y cada uno de ellos es un endomorfismo autoadjunto del fibrado tangente de la variedad.

En el caso particular de una hipersuperficie real M del espacio proyectivo complejo, como tenemos un campo tangente destacado, el campo estructural, nos aparece destacado el correspondiente operador de Jacobi, R_ξ, que, a partir de ahora llamaremos el operador de Jacobi estructural de M. A partir de la expresión del tensor de curvatura de la hipersuperficie se obtiene la siguiente expresión del operador de Jacobi estructural: $R_\xi(X) = X - \eta(X)\xi + \alpha AX - g(A\xi, X)A\xi$, donde $\alpha = g(A\xi, \xi)$. Las hipersuperficies reales para las que el campo estructural es principal se llaman hipersuperficies de Hopf.

Una variedad de Riemann se llama puntualmente Osserman si para cada punto el espectro de los operadores de Jacobi no depende de la elección de los vectores que definen tales operadores. Si tampoco depende del punto la variedad se dice globalmente Osserman. Osserman, [11], conjeturó que las variedades globalmente Osserman son los espacios simétricos de dos puntos. Esta conjetura fue resuelta afirmativamente por Chi y Nikolayevsky y, posteriormente, Brozos-Vázquez y Gilkey, [2], demostraron que si en una variedad de Riemann de dimensión al menos 3 cualquier par de operadores de Jacobi conmutan la variedad ha de ser llana y si lo mismo ocurre para cualquier par de operadores de Jacobi correspondientes a vectores ortogonales, entonces la variedad debe tener curvatura seccional constante. Como esto no ocurre para ninguna hipersuperficie real del espacio proyectivo complejo, podemos afirmar que en una tal hipersuperficie no todos los operadores de Jacobi conmutan. Sin embargo, al tener un campo de Jacobi destacado, el estructural, nos planteamos cuándo ese operador de Jacobi podía conmutar con cualquier otro, es decir, cuándo $R_\xi R_X = R_X R_\xi$. En [17] obtuvimos el siguiente

Teorema 1.1. *No existen hipersuperficies reales en $\mathbb{C}P^m$, $m \geqslant 3$, cuyo operador de*

Jacobi estructural conmute con cualquier otro.

1.2. Derivada covariante del operador de Jacobi estructural

En [3], Cho y Ki estudiaron un cierto "paralelismo"del operador de Jacobi estructural de una hipersuperficie real M del espacio proyectivo complejo. Concretamente, definieron $R'_\xi(X) = (\nabla_\xi R)(X, \xi, \xi)$, donde ∇ denota la derivada covariante de M, obteniendo que si el campo estructural es geodésico y $R'_\xi = 0$, la hipersuperficie real es Hopf. Si, además, la curvatura principal correspondiente a ξ es $2cot(2r)$ y el rango de la aplicación focal ψ_r es constante, M ha de ser localmente congruente o bien con una hipersuperficie real de tipos A_1 o A_2 o con un tubo no homogéneo de radio $\frac{\pi}{4}$ sobre $\psi_{\frac{\pi}{4}}(M)$ con curvaturas principales no nulas y distintas de 1 y -1.

A partir de este resultado nos planteamos el estudio de la derivada covariante del operador de Jacobi estructural de una hipersuperficie real M del espacio proyectivo complejo: $(\nabla_X R_\xi)Y = \nabla_X(R_\xi(Y)) - R_\xi(\nabla_X Y)$, para cualesquiera X e Y tangentes a M. Si $\nabla_X R_\xi = 0$ para cada X tangente a M, diremos que R_ξ es paralelo. En este caso, los autoespacios del operador de Jacobi estructural son paralelos a lo largo de cada curva γ en M, es decir, son invariantes con respecto a cualquier desplazamiento paralelo a lo largo de γ. En [10] obtuvimos el siguiente

Teorema 1.2. *No existen hipersuperficies reales M en $\mathbb{C}P^m$, $m \geqslant 3$, cuyo endomorfismo de Weingarten verifica $A\xi = \xi + \beta U$, $AU = \beta\xi + (\beta^2 - 1)U$, $A\phi U = -\phi U$ y $AX = -X$ para cualquier campo X ortogonal al subespacio que generan ξ, U y ϕU, donde U es un campo unitario en $\mathbb{D}$ y β una función no nula definida sobre M.*

A partir de este Teorema pudimos demostrar la no existencia de hipersuperficies reales cuyo operador de Jacobi estructural fuera paralelo en el espacio proyectivo complejo de dimensión compleja al menos 3. Este resultado nos llevó a considerar condiciones más débiles que el paralelismo del operador de Jacobi estructural. Restringiendo el paralelismo a campos de vectores en $\mathbb{D}$ obtenemos la noción de $\mathbb{D}$-paralelismo y en [15] demostramos el siguiente

Teorema 1.3. *No existen hipersuperficies reales en $\mathbb{C}P^m$, $m \geqslant 3$, cuyo operador de Jacobi estructural sea $\mathbb{D}$-paralelo.*

Otra condición más débil que el paralelismo sería que $\nabla_\xi R_\xi = 0$. Sin embargo, en este caso no podemos obtener una clasificación completa de las hipersuperficies reales que satisfacen esta condición. Hemos de imponer condiciones adicionales. En [4] pudimos clasificarlas considerando como condición adicional el que el tensor de Ricci S de la hipersuperficie también fuese paralelo en la dirección de ξ.

Teorema 1.4. *Sea M una hipersuperficie real de $\mathbb{C}P^m$, $m \geqslant 3$ verificando $\nabla_\xi R_\xi = 0$ y $\nabla_\xi S = 0$. Entonces M es Hopf y localmente congruente o a una hipersuperficie de tipo A_1 o A_2 o a un tubo de radio $\frac{\pi}{4}$ sobre una subvariedad compleja de $\mathbb{C}P^m$.*

Posteriormente, en [6] generalizamos el Teorema 2.1 mediante el siguiente

Teorema 1.5. *No existen hipersuperficies reales en $\mathbb{C}P^m$, $m \geqslant 3$, cuyo endomorfismo de Weingarten viene dado por $A\xi = \alpha\xi + \beta U$, $AU = \beta\xi + \frac{\beta^2-(c+1)}{\alpha}U$ y $AX = -\frac{c+1}{\alpha}X$, para cualquier campo tangente X ortogonal al subespacio que generan ξ y U, siendo U un campo unitario en $\mathbb{D}$, α y β funciones no nulas definidas sobre M y c una constante.*

Generalizando la noción de $\mathbb{D}$-paralelismo del operador de Jacobi estructural, diremos que dicho operador es pseudo-$\mathbb{D}$-paralelo si verifica $(\nabla_X R_\xi)Y = c\{\eta(Y)\phi AX + g(\phi AX, Y)\xi\}$, donde c es una constante no nula, $X \in \mathbb{D}$ e Y es tangente a la hipersuperficie real. A partir del anterior Teorema en [7] pudimos demostrar el siguiente

Teorema 1.6. *Sea M una hipersuperficie real de $\mathbb{C}P^m$, $m \geqslant 3$, cuyo operador de Jacobi estructural es pseudo-$\mathbb{D}$-paralelo, con $c \neq -1$. Entonces $c < 0$ y M es localmente congruente con una hiperesfera geodésica de radio r tal que $cot^2(r) = -c$.*

Señalemos que, aunque las hiperesferas geodésicas de radio $\frac{\pi}{4}$ tienen operador de Jacobi estructural pseudo-$\mathbb{D}$-paralelo ($c = -1$), no podemos asegurar que sean las únicas que lo tienen en este caso, por lo que este problema aún está abierto.

Otra forma de generalizar el paralelismo del operador de Jacobi estructural es considerar que sea de tipo Codazzi, es decir, que $(\nabla_X R_\xi)Y = (\nabla_Y R_\xi)X$, para cualesquiera X e Y tangentes a la hipersuperficie. En [16] demostramos el siguiente

Teorema 1.7. *No existen hipersuperficies reales M en $\mathbb{C}P^m$, $m \geqslant 3$, cuyo endomorfismo de Weingarten viene dado por $A\xi = \alpha\xi + \beta U$, $AU = \beta\xi + \frac{\beta^2-1}{\alpha}U$, $A\phi U = -\frac{1}{\alpha}\phi U$ and $AX = \lambda X$, con $\lambda^2 + 2\alpha\lambda + 1 = 0$, donde α y β son funciones no nulas definidas sobre M, U es un campo unitario en $\mathbb{D}$ y X es un campo ortogonal al subespacio que generan ξ, U y ϕU.*

A partir de este Teorema pudimos probar que no existen hipersuperficies reales en el espacio proyectivo complejo cuyo operador de Jacobi estructural es de tipo Codazzi.

1.3. Derivada de Lie del operador de Jacobi estructural

La derivada de Lie del operador de Jacobi estructural de una hipersuperficie real M en el espacio proyectivo complejo viene dada por

$$(\mathcal{L}_X R_\xi)Y = \nabla_X R_\xi(Y) - \nabla_{R_\xi}(Y)X - R_\xi(\nabla_X Y) + R_\xi(\nabla_Y X)$$

para cualesquiera X e Y tangentes a M. En primer lugar nos planteamos obtener qué hipersuperficies reales tenían operador de Jacobi estructural invariante, es decir, tal que $\mathcal{L}_X R_\xi = 0$ para cada X tangente a M. Esto significa que todos los autoespacios del operador de Jacobi estructural son invariantes por cualquier desplazamiento paralelo generado por el flujo de cada curva integral γ de X en T_xM, para cada punto $x \in M$. Así, en [12] obtuvimos el siguiente

Teorema 1.8. *No existen hipersuperficies reales en $\mathbb{C}P^m$, $m \geqslant 3$, con operador de Jacobi estructural invariante.*

Para generalizar este resultado podíamos suponer la invarianza de R_ξ sólo para el campo estructural ξ o para las direcciones de su distribución ortogonal $\mathbb{D}$. En el primer caso, en [14] obtuvimos el siguiente teorema de clasificación

Teorema 1.9. *Sea M una hipersuperficie real en $\mathbb{C}P^m$, $m \geqslant 3$, cuyo operador de Jacobi estructural es invariante en la dirección del campo estructural ξ, es decir, $\mathcal{L}_\xi R_\xi = 0$. Entonces M es localmente congruente con un tubo de radio $\frac{\pi}{4}$ sobre una subvariedad compleja de $\mathbb{C}P^m$ o con una hipersuperficie real de tipo A_1 o A_2 de radio $r \neq \frac{\pi}{4}$.*

Sin embargo, cuando tratamos de estudiar la invarianza del operador de Jacobi estructural en las direcciones de la distribución $\mathbb{D}$, comprobamos que sólo con esta condición no era suficiente para obtener resultados de caracterización. Era necesario añadir alguna condición más. Por ello pensamos en la condición de conmutatividad del operador de Jacobi estructural y el endomorfismo de Weingarten. Aún no se conoce qué hipersuperficies reales verifican esta segunda condición, aunque es muy fácil ver que todas las que son Hopf la satisfacen. Así, en un artículo aún por publicar, [18], obtenemos el siguiente

Teorema 1.10. *No existen hipersuperficies reales en $\mathbb{C}P^m$, $m \geqslant 3$, cuyo operador de Jacobi estructural es invariante en cualquier dirección de $\mathbb{D}$ y conmuta con el endomorfismo de Weingarten.*

Precisamente por lo señalado anteriormente este teorema nos asegura la no existencia de hipersuperficies reales Hopf en el espacio proyectivo complejo cuyo operador de Jacobi estructural sea invariante en cualquier dirección de $\mathbb{D}$.

A continuación nos planteamos estudiar las hipersuperficies reales para las que la derivada de Lie del operador de Jacobi estructural va en la dirección de ξ. En principio, [19], obtuvimos dos resultados de no existencia de ciertas familias de "posibles" hipersuperficies reales:

Teorema 1.11. *No existen hipersuperficies reales M en $\mathbb{C}P^m$, $m \geqslant 3$, cuyo endomorfismo de Weingarten verifica $A\xi = \alpha\xi + \beta U$, $AU = \beta\xi + \frac{\beta^2-1}{\alpha}U$, $A\phi U = \delta\phi U$, donde U es un campo unitario en $\mathbb{D}$ y existe un campo Z ortogonal al subespacio generado por ξ, U y ϕU tal que $AZ = 0$, $A\phi Z = -\frac{1}{\alpha}\phi Z$, siendo α y β funciones no nulas sobre M y donde δ es 0 ó $-\frac{\beta^2}{\alpha}$.*

Teorema 1.12. *No existen hipersuperficies reales M en $\mathbb{C}P^m$, $m \geqslant 3$, cuyo endomorfismo de Weingarten verifica $A\xi = \alpha\xi + \beta U$, $AU = \beta\xi + \frac{\beta^2-1}{\alpha}U$, $A\phi U = \delta\phi U$, donde U es un campo unitario en $\mathbb{D}$, y para cada campo Z ortogonal al subespacio que general ξ, U y ϕU, $AZ = \lambda Z$, donde α y β son funciones no nulas sobre M, δ es 0 ó $-\frac{\beta^2}{\alpha}$ y λ es 0 ó $-\frac{1}{2\alpha}$.*

A partir de estos resultados podemos demostrar el siguiente

Teorema 1.13. *Sea M una hipersuperficie real en $\mathbb{C}P^m$, $m \geqslant 3$. Entonces $(\mathcal{L}_X R_\xi)Y = -g(\phi AX, Y)\xi$ para cualesquiera X e Y en $\mathcal{D}$ y R_ξ conmuta con el endomorfismo de Weingarten si y sólo si M es localmente congruente con una hiperesfera geodésica de radio r tal que $cot^2(r) = \frac{1}{2}$.*

Para finalizar expondremos el último resultado obtenido por Floro. En [13] se prueba el siguiente

Teorema 1.14. *No existen hipersuperficies reales M en $\mathbb{C}P^m$, $m \geqslant 3$, cuyo endomorfismo de Weingarten verifica $A\xi = \alpha\xi + \beta U$, $AU = \beta\xi + \frac{\beta^2-1}{\alpha}U$, $A\phi U = -\frac{1}{\alpha}\phi U$, los valores propios de A en el complemento ortogonal del subespacio generado por ξ, U y ϕU son distintos de 0, $-\frac{1}{\alpha}$ y $\frac{\beta^2-1}{\alpha}$ y si Z está en dicho subespacio y verifica $AZ = \lambda Z$, entonces $A\phi Z = -\lambda\phi Z$, siendo U un campo unitario en $\mathcal{D}$ y α y β funciones no nulas definidas sobre M.*

A partir de este Teorema se demuestra el siguiente Teorema de clasificación:

Teorema 1.15. *Sea M una hipersuperficie real en $\mathbb{C}P^m$, $m \geqslant 3$, cuyo operador de Jacobi estructural verifica $\mathcal{L}_\xi R_\xi = \nabla_\xi R_\xi$. Entonces M es localmente congruente con un tubo de radio $\frac{\pi}{4}$ sobre una subvariedad compleja de $\mathbb{C}P^m$ o con una hipersuperficie de tipo A_1 o A_2 de radio $r \neq \frac{\pi}{4}$.*

2. Publicaciones científicas

En esta segunda parte, se listan por orden cronológico las publicaciones de Floro en revistas científicas y sus aportaciones a congresos, incluyendo breves recensiones de ellas. Los artículos que han sido citados en la primera sección no se van a comentar, aunque aparezcan en la lista.

[1] M. Barros, F. G. Santos, On normal curvature tensor of Kaehler submanifolds, *Chinese J. Math.* **8**(1980), no. 2, 105–112.

Los autores estudiaron las subvariedades complejas N de variedades Kaehlerianas cuyo tensor de curvatura normal cumple la condición $R^\perp(X, Y)\xi = f(X, Y)J\xi$, donde J es la estructura compleja del espacio ambiente, ξ es un campo (unitario) normal a N cualquiera y X, Y denotan cualesquiera campos de vectores tangentes a N. En este ambiente, los autores clasificaron completamente tales subvariedades en el caso de que el espacio ambiente fuera un espacio modelo complejo. También calcularon la clase total de Chern del fibrado normal de dichas subvariedades.

[2] F. G. Santos, Reduction of the codimension in Riemannian embeddings with parallel mean curvature vector, Proceedings of the seventh Spanish-Portuguese conference on mathematics, Part II (Sant Feliu de Guíxois, 1980). Publ. Sec. Mat. Univ. Autònoma Barcelona No. 21 (1980), 75–8.

En esta aportación, se demuestra un teorema de reducción de codimension. Más concretamente, se considera una variedad de Riemann M^n conexa n-dimensional inmersa en otra variedad de Riemann $M^{n+p}(c)$ de dimensión $n+p$ y curvatura seccional constante c. Se demuestra un teorema de reducción de codimensión en términos del tensor curvatura normal cuando el vector curvatura media de la inmersión es paralelo en el fibrado normal. Este teorema extiende otro resultado de A. G. Colares y M. P. do Carmo [Geometry and topology (Rio de Janeiro, 1976), 10–113, Lecture Notes in Math., 597, Springer, Berlin, 1977; MR0493820 (58 #12788)].

[3] F. G. Santos, Some conditions for the constancy of the holomorphic sectional curvature of an RK-manifold, Proceedings of the Eighth Portuguese-Spanish Conference on Mathematics, Vol. I (Coimbra, 1981), pp. 381–387, Univ. Coimbra, Coimbra, 1981.

En esta aportación se estudiaron condiciones para que la curvatura seccional holomorfa de una variedad RK sea constante.

[4] J. D. Pérez, F. G. Santos, Diffeomorphisms which preserve quaternionic sectional curvature, *Soochow J. Math.* **8**(1982), 171–178.

En este artículo, los autores demuestran que los difeomorfismos entre variedades Kaehlerianas cuaterniónicas que respeten las respectivas curvaturas seccionales cuaterniónicas, han de ser al menos isometrías locales. Más cocretamente, sean M y $\bar{M}$ dos variedades Kaehlerianas cuaterniónicas con respectivas curvaturas seccionales cuaterniónicas Q y $\bar{Q}$. Sea $f : M \to \bar{M}$ un difeomorfismo tal que $f^*\bar{Q} = Q$. Entonces o bien $Q = \bar{Q}$ y en tal caso f es una isometría local, o bien f es una isometría.

[5] J. D. Pérez, F. G. Santos, F. Urbano, On the axioms of planes in quaternionic geometry. *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) **130** (1982), 215–221.

Los autores trasladan resultados clásicos de Cartan a la Geometría Cuaterniónica. En todo el artículo se considera como variedad ambiente una variedad Kaehleriana cuaterniónica. En primer lugar, cuando la dimensión cuaterniónica es al menos dos, demuestran la equivalencia entre la constancia de la curvatura seccional cuaterniónica y la curvatura seccional totalmente real. A continuación intrudocen los conceptos de axioma de planos semi-cuaterniónicos y de axioma de planos totalmente reales. Basándose en el resultado anterior, demuestran que toda variedad Kaehleriana cuaterniónica que cumpla alguno de los dichos axiomas, necesariamente ha de tener curvatura seccional cuaterniónica constante.

[6] F. G. Santos, Kaehler submanifolds with parallel normal curvature tensor, *An. Stiint. Univ. "Al. I. Cuza" Iasi Sect. I a Mat. (N.S.)* **28**(1982), no. 1, 79–82.

En esta ocasión, el problema a atacar es la clasificación de las subvariedades complejas de variedades Kaehlerianas con curvatura seccional holomorfa constante. El resultado principal es como sigue. Dada una subvariedad Kaehleriana M de una variedad Kaehleriana $\bar{M}$ con curvatura seccional holomorfa constante, se cumple que el tensor curvatura normal de M es paralelo si, y sólo si, la segunda forma fundamental de M en $\bar{M}$ es paralela.

[7] J. D. Pérez, F. G. Santos, Indefinite quaternion space forms, *Ann. Mat. Puta Appl. (4)*, **132** (1982), 383–398 (1983).

Este artículo supone la introducción del concepto de Geometría Cuaterniónica indefinida. En primer lugar, se define el concepto de variedad Kaehleriana cuaterniónica indefinida. A continuación, se demuestra que toda variedad Kaehleriana cuaterniónica indefinida con dimensión cuaterniónica al menos dos, ha de ser una variedad Einstein. Posteriormente, calculan explícitamente el tensor de curvatura cuando la curvatura seccional cuaterniónica es constante. A partir de aquí, se centran en buscar condiciones necesarias y suficientes sobre la constancia de la curvatura seccional cuaterniónica, destacando que la curvatura seccional totalmente real sea constante, cuando la dimensión cuaterniónica sea al menos dos.

[8] J. D. Pérez, F. G. Santos, F. Urbano, On the normal connection of totally complex submanifolds, *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica* **10** (10982), no. 3, 277-287.

Se demuestra que si una subvariedad totalmente compleja N de una variedad Kaehleriana cuaterniónica M tiene conexión normal llana, entonces M es Ricci llana y N es llana. El segundo resultado muestra la no existencia de campos de vectores normales unitarios paralelos sobre una subvariedad totalmente compleja de una variedad Kaehleriana cuaterniónica.

[9] A. Martínez, J. D. Pérez, F. G. Santos, On the normal connection of quaternion CR-submanifolds, *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica* **12** (1984), no. 3, 237–247.

En ambiente cuaterniónico, se estudian ciertas variedades llamadas CR-subvariedades cuaterniónicas. Dado un modelo de espacio cuaternónico $(\bar{M}(c), g)$, con su base (local) canónica $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ de la estructura cuaterniónica, se considera

M una CR-subvariedad cuaterniónica de $\bar{M}$. Si $R^{\perp}$ es el tensor de curvatura de la conexión normal de M, se dice que la conexión normal es *semillana* si

$$R^{\perp}(X,Y)\xi = (c/2)\sum_{r=1}^{3} g(X, P_r Y) f_r \xi$$

para todos $X, Y \in TM$ y todo $\xi \in T^{\perp}M$, donde $P_r Y$ y $f_r\xi$ son, respectivamente, la componente tangencial de $\varphi_r Y$ y de $\varphi_r \xi$. El principal resultado afirma que una CR-subvariedad cuaterniónica M de $\bar{M}(c)$ tiene conexión normal semillana si, y sólo si, M es una subvariedad cuaterniónica de $\bar{M}(c)$. En este ambiente, también calculan las formas de Pontryagin del fibrado normal de una subvariedad cuaterniónica con conexión casi-llana.

[10] A. Martínez, J. D. Pérez, F. G. Santos, Generic submanifolds of a quaternion Kaehlerian manifold, *Soochow J. Math.* **10** (1984), 79–98.

Se intruduce el concepto de subariedad *genérica* de una subvariedad Kaehleriana cuaterniónica. Dada una variedad Kaehleriana cuaterniónica $\bar{M}$ con su base local $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ de la estructura cuaterniónica, se considera una subvariedad M. Sobre M se definen la distribución cuaterniónica D, las distribuciones $D_r = TM \cap \Phi_r(TM)$ $(r = 1, 2, 3)$ y sus correspondientes distribuciones ortogonales en TM, llamadas $D^{\perp} \subset TM$, $D_r^{\perp}$, $r = 1, 2, 3$. Se dice que M es una subvariedad *genérica* de $\bar{M}$ si M posee las distribuciones D y D_r para algún r. En primer lugar, se estudian condiciones de integrabilidad para D, D_1, $D^{\perp}$ y $D_1^{\perp}$. También construyen cinco tipos de productos genéricos de subvariedades de $\bar{M}$, como aquellas subvariedades que son, localmente, el producto riemanniano de distintos tipos de subvariedades genéricas. A continuación, obtienen restricciones para la existencia de dichos productos, como son:

a) Si $\bar{M}$ tiene curvatura escalar negativa, no existen productos genéricos cuaterniónicos ni productos genéricos de una subvariedad puramente real y de una cuaterniónica.

b) Si $\bar{M}$ tiene tensor de Ricci no nulo, no existen productos genéricos de una subvariedad compleja y una cuaterniónica, ni tampoco productos genéricos de una subariedad puramente real, una puramente compleja y una cuaterniónica.

[11] J. D. Pérez, F. G. Santos, On pseudo-Einstein real hypersurfaces of the quaternionic projective space, *Kyungpook Math. J.* **25** (1985), 15–28.

Erratum en *Kyungpook Math. J.* **25** (1985), no. 2, 185.

Dada una variedad Kaehleriana cuaterniónica, con base local { I,J,K} de la estructura cuaterniónica, sea N una hypersuperficie real suya. Sea ζ es un campo de vectores normal y unitario a N en M. Se dice que N es *pseudo-Einstein* si el tensor de Ricci de N se puede expresar como

$$SX = aX + b\{g(X, U_1)U_1 + g(X, U_2)U_2 + g(X, U_3)U_3\}, \ \forall X \in TN,$$

donde $U_1 = -I\zeta, U_2 = -J\zeta, U_3 = -K\zeta$, siendo a, b funciones diferenciables en M. Aunque la definición se establece para variedades Kaehlerianas cuaterniónicas, el estudio se hace para modelos de espacios cuaterniónicos, obteniendo resultados parciales. Si $\sigma = 0$ en un abierto U de M, entonces M admite en U como máximo dos curvaturas principales λ y μ, que cumplen $\lambda + \mu = h$, $\lambda\mu = \rho$, donde h es la traza del Endomorfismo de Weingarten, $\rho = a - c(4m + 7)$, $\sigma = -(b + 3c)$, además, U_1, U_2 y U_3 son principales. A continuación, se aplican las técnicas de puntos focales de T. E. Cecil y de P. J. Ryan en [Trans. Am. Math. Soc. 269(1982), 481-499] y cuando N es una hipersuperficie real conexa del espacio proyectivo cuaterniónico. Si los campos U_1, U_2 y U_3 son principales con la misma curvatura principal, entonces N resulta ser un abierto de una hiperesfera geodésica o un tubo de radio r sobre un QP^k totalmente geodésico, $0 < k < m - 1$ con $0 < r < \pi/2$ y $\cot^2 r = (4k + 2)/(4m - 4k - 2)$. Como consecuencia, la única hipersuperficie real Einstein en QP^m es un abierto de una hipersuperficie geodésica de radio r con $\cot^2(r) = 1/(2m)$.

[12] M. Barros, F. G. Santos, On the first Chern class of a complex submanifold in an almost Hermitian manifold and the normal connection, *Colloq. Math.* **54** (1987), no. 1, 59–65.

En una variedad casi Hermítica $(\bar{M}, g, J)$, se considera una subvariedad holomorfa M con segunda forma fundamental σ. Se dice que M es una σ-subvariedad si $J\sigma(X, Y) = \sigma(JX, Y) = \sigma(X, JY)$ para todos $X, Y \in TM$. En este artículo, los autores estudian las σ-subvariedades cuyo tensor de curvatura normal R^D cumple $R^D(X, Y)\xi = fg(X, JY)J\xi$, para todos $X, Y \in TM$, siendo f una función diferenciable sobre M y ξ un campo de vectores normal a M. En particular, se estudia la primera forma de Chern del fibrado normal de M para ciertos casos particulares de $(\bar{M}, g, J)$, construyendo ejemplos de σ-subvariedades que cumplen la condición adicional sobre R^D.

[13] J. D. Pérez, F. G. Santos, On certain real hypersurfaces of quaternionic projective space, *Internat. J. Math. Math. Sci.* **14** (1991), no. 1, 205–207.

En el espacio proyectivo cuaterniónico HP^n, $n \geqslant 2$, con base local de la estructura cuaterniónica (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3), se considera una hipersuperficie real conexa M. Es claro que si ξ es un campo de vectores unitario normal a M en HP^n, los campos $U_i = -\phi_i\xi$, $i = 1, 2, 3$, son tangentes a M. En este artículo se clasifican las hipersuperficies reales de HP^n con campos U_i, $i = 1, 2, 3$, principales y que cumplan que el tensor de curvatura R y el tensor de Ricci S de M están ligados por la expresión

$$(R(X,Y)S)Z + (R(Y,Z)S)X + (R(Z,X)S)Y = 0, \ \forall X, Y, Z \in TM,$$

obteniendo que dichas hipersuperficies han de ser un abierto de una hiperesfera geodésica de radio r, con $0 < r < \pi/2$, $\cot(2r) = 1/2n$.

[14] J. D. Pérez, F. G. Santos, On real hypersurfaces with harmonic curvature of a quaternionic projective space, *J. Geom.* **40** (1991), no. 1-2, 165–69.

Se considera el espacio proyectivo cuaterniónico HP^m y (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) una base local de la estructura cuanterniónica. Si M es una hipersuperficie real conexa de HP^m y ξ es un campo de vectores unitario normal a M en HP^m, los campos $U_i = -\phi_i \xi$, $i = 1, 2, 3$, son tangentes a M. En esta ambiente, se estudian las hipersuperficies reales de HP^m con curvatura armónica, es decir, aquellas cuyo tensor de Ricci S cumple $(\nabla_X S)Y = (\nabla_Y S)X$, para todos $X, Y \in TM$. Concretamente, se clasifican las que tienen curvatura armónica y sus campos U_1, U_2, U_3, son principales con la misma curvatura principal, obteniendo que han de ser abiertos de hiperesferas geodésicas de HP^m de radio r, con $0 < r < \pi/2$, $\cot^2(r) = 1/2m$.

[15] F. Dillen, A. Martínez, F. Milán, F. G. Santos, , L. Vrancken, On the Pick invariant, the affine mean curvature and the Gauss curvature of affine surfaces. Affine differential geometry (Oberwolfach, 1991). *Results Math.* **20** (1991), no. 3-4, 622–642.

Este artículo está ampliamente comentado en el capítulo escrito por A. Martínez y F. Milán.

[16] A. Martínez, J. D. Pérez, F. G. Santos, Recent results on the geometry of real hypersurfaces in quaternionic projective space. Papers in honor of Pablo Bobillo Guerrero (Spanish), 183–190, Univ. Granada, Granada, 1992.

En esta comunicación se realiza un estudio bastante completo del estado del momento de la Teoría de Hipersuperficies en el espacio proyectivo cuaterniónico. Se recuerdan cuáles son los ejemplos principales y se listan distintas caracterizaciones basándose en hipótesis sobre la segunda forma fundamental y sobre el tensor de Ricci. Finalmente, se exhiben algunos problemas abiertos.

[17] J. D. Pérez, F. G. Santos, Cyclic-parallel Ricci tensor on real hypersurfaces of a quaternionic projective space, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* **38** (1993), no. 1, 37–40.

En esta nota se clasifican las hypersuperficies reales M del espacio proyectivo cuaterniónico HP^n que cumplen las siguientes hipótesis:

a) Los campos de vectores $J_i\zeta$, $i = 1, 2, 3$, son principales con la misma curvatura principal, donde ζ es un campo de vectores unitario normal a M y (J_1, J_2, J_3) es una base local de la estructura cuaterniónica de HP^n.

b) El tensor de Ricci S de M cumple $\mathfrak{S}g((\nabla_X S)Y, Z) = 0$, para todos $X, Y, Z \in TM$, donde $\mathfrak{S}$ denota la suma cíclica.

Las únicas hipersuperficies que cumplen dichas hipótesis resultan ser abiertos de hiperesferas geodésicas o tubos de radio r sobre un HP^k totalmente geodésico, $0 < k < n-1$ con radio $0 < r < \pi/2$.

[18] J. D. Pérez, F. G. Santos, Y. J. Suh, Real hypersurfaces in complex projective space whose structure Jacobi operator is Lie ξ-parallel, *Differential Geom. Appl.* **22** (2005), no. 2, 181–188.

Véase la Sección 1.

[19] J. D. Pérez, F. G. Santos, On the Lie derivative of structure Jacobi operator of real hypersurfaces in complex projective space, *Publ. Math. Debrecen* **66** (2005), no. 3-4, 269–289.

Véase la Sección 1.

[20] M. Ortega, J. D. Pérez, F. G. Santos, Non existence of real hypersurfaces with parallel structure Jacobi operator in nonflat space forms, *Rocky Mountain J. Math.* **36** (2006), no. 5, 1603–1613.

Véase la Sección 1.

[21] J. D. Pérez, F. G. Santos, Y. J. Suh, Real hypersurfaces in complex projective space whose structure Jacobi operator is $\mathbb{D}$-parallel, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin* **13** (2006), no. 3, 459–469.

Véase la Sección 1.

[22] U-H. Ki, J. D. Pérez, F. G. Santos, Y. J. Suh, Real hypersurfaces in complex space forms with ξ-parallel Ricci tensor and structure Jacobi operator, *J. Korean Math. Soc.* **44** (2007), no. 2, 307–326.

Véase la Sección 1.

[23] J. D. Pérez, F. G. Santos, Y. J. Suh, Real hypersurfaces in complex projective space whose structure Jacobi operator is of Codazzi type, *Canad. Math. Bull.* **50** (2007), no. 3, 347–355.

Véase la Sección 1.

[24] J. D. Pérez, F. G. Santos, Y. J. Suh, Real hypersurfaces in nonflat complex space forms with commuting structure Jacobi operator, *Houston J. Math.* **33** (2007), no. 4, 1005–1009.

Véase la Sección 1.

[25] J. D. Pérez, F. G. Santos, Real hypersurfaces in complex projective space with recurrent structure Jacobi operator, *Differential Geom. Appl.* **26** (2008), no. 2, 218–223.

En el espacio proyectivo complejo $\mathbb{C}P^m$, $m \geqslant 3$, con su métrica usual, se considera una hipersuperficie real M y su campo de vectores estructural ξ. Sea $\mathbb{D}$ la distribución en M de todos los vectores tangentes a M que son ortogonales a ξ. Dado el operador de curvatura R de M, se construye el operador de Jacobi estructural $R_\xi = R(\cdot, \xi)\xi$. Se dice que R_ξ es *recurrente* si existe una 1-forma ω en M tal que para cada $X, Y \in TM$, se cumple $(\nabla_X R_\xi)Y = \omega(X)R_\xi Y$. La definición anterior se puede debilitar a $\mathbb{D}$-recurrente cuando se escoge $X \in \mathbb{D}$. Los autores demuestran que si el operador de Jacobi estructural es $\mathbb{D}$-recurrente, entonces M es una hipersuperficie real reglada mínima. Como corolario, obtienen que no existen hipersuperficies reales con operador de Jacobi estructural recurrente.

[26] J. D. Pérez, F. G. Santos, On derivatives of the structure Jacobi operator of a real hypersurface in complex projective space. Proceedings of the 12th International Workshop on Differential Geometry and Related Fields [Vol. 12], 43–57, Korean Math. Soc., Seoul, 2008.

[27] J. D. Pérez, F. G. Santos, Y. J. Suh, Real hypersurfaces in complex space forms with commuting structure Jacobi operator. Proceedings of the 12th International Workshop on Differential Geometry and Related Fields [Vol. 12], 59–67, Korean Math. Soc., Seoul, 2008.

Esta comunicación presenta los resultados obtenidos en [24]

[28] J. D. Pérez, F. G. Santos, Real hypersurfaces in complex projective space whose structure Jacobi operator satisfies $\mathcal{L}_\xi R_\xi = \nabla_\xi R_\xi$, *Rocky Mountain J. Math.* **39** (2009), no. 4, 1293–1301.

Véase la Sección 1.

[29] J. D. Pérez, F. G. Santos, Real hypersurfaces in complex projective space whose structure Jacobi operator is cyclic-Ryan parallel, *Kyungpook Math. J.* **49** (2009), no. 2, 212–219.

Sea M una hipersuperficie real del espacio proyectivo complejo $\mathbb{C}P^m$, con campo de vectores estructural ξ. El operador de Jacobi estructural R_ξ está dado por

$R_\xi = R(\cdot, \xi)\xi$, donde R es el operador de curvatura de M. Por otro lado, se puede hacer actuar R sobre R_ξ como una derivación,

$$(R(X,Y) \cdot R_\xi)Z = R(X,Y)(R_\xi(Z)) - R_\xi(R(X,Y)Z),$$

para todos X, Y, Z tangentes a M. En este artículo, los autores investigan qué hipersuperficies reales de $\mathbb{C}P^m$ cumplen la ecuación

$$(R(X,Y) \cdot R_\xi)Z + (R(Y,Z) \cdot R_\xi)X + (R(Z,X) \cdot R_\xi)Y = 0,$$

para todos X, Y, Z tangentes a M. Dichas hipersuperficies se dice que tiene operador de Jacobi estructural cíclico-Ryan. El resultado es que cuando la dimensión es $m \geqslant 3$, dichas hipersuperficies han de ser localmente congruentes a una hiperesfera geodésica o un tubo de radio $\pi/4$ sobre una cierta subvariedad compleja de $\mathbb{C}P^m$.

[30] H. J. Lee, J. D. Pérez, F. G. Santos, Y. J. Suh, On the structure Jacobi operator of a real hypersurface in complex projective space, *Monatsh. Math.* **158** (2009), no. 2, 187–194.

Véase la Sección 1.

Agradecimientos

El primer y segundo autores están parcialmente financiados por el proyecto MTM-2010-18099 y el segundo autor por el proyecto BSRP-2010-0020931 de la National Research Foundation of Korea

Referencias

[1] D. Blair, *Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds*, Progress in Mathematics 203 (2002), Birkhauser Boston Inc., Boston , Ma.

[2] M. Brozos-Vázquez, P. Gilkey, Manifolds with commuting Jacobi operators, *J. Geom.* **86** (2006), 21-30.

[3] J.T. Cho, U.H. Ki, Jacobi operators on real hypersurfaces of a complex projective space, *Tsukuba J. Math.* **22** (1998), 145-156.

[4] U.H. Ki, J.D. Pérez, F.G. Santos, Y.J. Suh, Real hypersurfaces in complex space forms with ξ-parallel Ricci tensor and structure Jacobi operator, *J. Korean Math. Soc.* **44** (2007), 307-326.

[5] M. Kimura, Sectional curvatures and holomorphic planes on a real hypersurface in $P_n(\mathcal{C})$, *Math. Ann.* **276** (1987), 487-497.

[6] H. Lee, J.D. Pérez, F.G. Santos, Y.J. Suh, On the structure Jacobi operator of a real hypersurface in complex projective space, *Monatsh. Math.* **158** (2009), 187-194.

[7] H. Lee, J.D. Pérez, Y.J. Suh, Real hypersurfaces in complex projective space with pseudo-$\mathbb{D}$-parallel structure Jacobi operator, *Czech. Math. J.* **60** (2010), 1025-1036.

[8] M. Lohnherr, H. Reckziegel, On ruled real hypersurfaces in complex space forms, *Geom. Dedicata* **74** (1999), 267-286.

[9] M. Okumura, On some real hypersurfaces of a complex projective space, *Trans. Amer. Math. Soc.* **212** (1975), 355-364.

[10] M. Ortega, J.D. Pérez, F.G. Santos, Non-existence of real hypersurfaces with parallel structure Jacobi operator in nonflat complex space forms, *Rocky Mount. J. Math.* **36** (2006), 1603-1613.

[11] R. Osserman, Curvature in the eighties, *Amer. Math. Monthly* **97** (1990), 731-756.

[12] J.D. Pérez, F.G. Santos, On the Lie derivative of structure Jacobi operator of real hypersurfaces in complex projective space, *Publ. Math. Debrecen* **66** (2005), 269-289.

[13] J.D. Pérez, F.G. Santos, Real hypersurfaces in complex projective space whose structure Jacobi operator satisfies $\mathcal{L}_\xi R_\xi = \nabla_\xi R_\xi$, *Rocky Mount. J. Math.* **39** (2009), 1293-1301.

[14] J.D. Pérez, F.G. Santos, Y.J. Suh, Real hypersurfaces in complex projective space whose structure Jacobi operator is Lie ξ-parallel, *Diff. Geom. Appl.* **22** (2005), 181-188.

[15] J.D. Pérez, F.G. Santos, Y.J. Suh, Real hypersurfaces in complex projective space whose structure Jacobi operator is $\mathbb{D}$-parallel, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin* **13** (2006), 459-469.

[16] J.D. Pérez, F.G. Santos, Y.J. Suh, Real hypersurfaces in complex projective space whose structure Jacobi operator is of Codazzi type, *Canad. Math. Bull.* **50** (2007), 347-355.

[17] J.D. Pérez, F.G. Santos, Y.J. Suh, Real hypersurfaces in nonflat complex space forms with commuting structure Jacobi operator, *Houston J. Math.* **33** (2007), 1005-1009.

[18] J.D. Pérez, Y.J. Suh, Real hypersurfaces in complex projective space whose structure Jacobi operator is Lie $\mathbb{D}$-parallel, preprint.

[19] J.D. Pérez, Y.J. Suh, A characterization of certain geodesic hyperspheres in complex projective space, preprint.

[20] R. Takagi, Real hypersurfaces in a complex projective space with constant principal curvatures, *J. Math. Soc. Japan* **27** (1975), 43-53.

[21] R. Takagi, Real hypersurfaces in a complex projective space with constant principal curvatures II, *J. Math. Soc. Japan* **27** (1975), 507-516.

Florentino García Santos: In Memoriam
Universidad de Granada, 2011, págs. 145–156

Sinh-Gordon type equations for CMC surfaces

Joaquín Pérez

Resumen We review how the classical Sinh-Gordon equation appears in the theory of constant mean curvature surfaces in space forms and minimal surfaces in product spaces, and introduce a new equation of this type occurring for constant mean curvature surfaces in homogeneous three-manifolds with isometry group of dimension four.

1. Introduction

The Sinh-Gordon equation is an elliptic PDE which appears naturally in surface theory, among others in the following two different contexts: for constant mean curvature (CMC) surfaces in space forms and for minimal surfaces in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, where $\mathbb{S}^2$ denotes the 2-sphere with its usual metric. In both situations, the Sinh-Gordon equation has been shown to be a useful tool in obtaining both existence and uniqueness results (see e.g. Pinkall and Sterling [7], Ritoré and Ros [8], Hauswirth, Sa Earp and Toubiana [5], Kilian and Schmidt [6] and references therein). In this note we will review how to find the Sinh-Gordon equation in these known settings, and provide a new related extension which allows to find a geometrical Sinh-Gordon (or Sin-Gordon) type equation valid for CMC surfaces in more general ambient geometries, namely in homogeneous three-manifolds N with isometry group $\mathrm{Iso}(N)$ of dimension four. Since our result is purely local, we can assume that N is simply-connected. It is well-known that every simply-connected, homogeneous three-manifold is of one of the following three types: If $\dim \mathrm{Iso}(N) = 6$, then N is a space form $\mathbb{R}^3, \mathbb{S}^3$ or $\mathbb{H}^3$; if $\dim \mathrm{Iso}(N) = 4$, then N admits a Riemannian submersion $\Pi\colon N \to \mathbb{M}^2(\kappa)$ over a surface of constant curvature $\kappa \in \mathbb{R}$; finally, if $\dim \mathrm{Iso}(N) = 3$, then N is a Lie group endowed with a left invariant metric. In this note we will focus on case 2 above, although for the sake of completeness, we will also discuss to some extent the already known situation in case 1.

Joaquín Pérez, *jperez@ugr.es*
Dep. Geometría y Topología, Facultad de Ciencias, Universidad de Granada, 18071-Granada

2. CMC surfaces in $\mathbb{M}^3(c)$

Along this section, $\mathbb{M}^3(c)$ will denote the three-dimensional space form of constant sectional curvature $c \in \mathbb{R}$. Let $\Sigma \looparrowright \mathbb{M}^3(c)$ be an immersed surface of CMC $H \in \mathbb{R}$ in $\mathbb{M}^3(c)$. Let $ds^2 = \lambda |dz|^2$ be the induced metric on Σ, where $z = x + iy$ is a local holomorphic coordinate and λ a smooth positive function. If σ stands for the second fundamental form of Σ, then after complexifying the tangent bundle and taking the $(2,0)$-part we find the well-known *Hopf differential* of the immersion,

$$\sigma^{2,0} = p\,(dz)^2, \qquad p = 4\sigma(\partial_z, \partial_z), \tag{31}$$

which is a globally defined holomorphic quadratic differential on Σ (holomorphicity comes from the Codazzi equation). The zeros of $\sigma^{2,0}$ are the umbilical points of Σ, hence $\mathfrak{U} = \{\sigma^{2,0} = 0\}$ is either a discrete set of points or Σ is totally umbilical. We will assume in the sequel that Σ is not umbilical, and work away from $\mathfrak{U}$. We will also suppose that $H^2 + c > 0$ (note that this condition is meaningless in $\mathbb{S}^3(c)$ and excludes minimal surfaces in $\mathbb{R}^3$). Consider the metric $ds_0 = 2\sqrt{H^2 + c}\,|\sigma^{2,0}|$ on $\Sigma - \mathfrak{U}$, which is flat and conformal to ds^2. Thus, there exists $\psi \in C^\infty(\Sigma - \mathfrak{U})$ such that

$$ds^2 = \frac{e^{2\psi}}{4(c + H^2)}\, ds_0^2. \tag{32}$$

The following result is well-known.

Proposición 2.1. *ψ satisfies the Sinh-Gordon equation $\Delta_0 \psi + \frac{1}{2}\sinh(2\psi) = 0$ in $\Sigma - \mathfrak{U}$, where Δ_0 is computed with respect to ds_0^2.*

Demostración. By the Gauss equation,

$$c = K - \det S, \tag{33}$$

where K is the Gauss curvature of ds^2 and S the shape operator of Σ. A direct computation (valid in every ambient space) gives

$$\frac{|p|^2}{\lambda^2} = |\sigma|^2 = 4\left(H^2 - \det S\right). \tag{34}$$

Plugging (34) in (33) and using the classical relation between the Gaussian curvatures of conformally related metrics, we have

$$c + H^2 = K + \frac{|p|^2}{4\lambda^2} = -\frac{4(c + H^2)}{e^{2\psi}}\Delta_0 \psi + \frac{|p|^2}{4\lambda^2}. \tag{35}$$

On the other hand,

$$\lambda\,|dz|^2 = ds^2 = \frac{e^{2\psi}}{4(c + H^2)}\, ds_0^2 = \frac{e^{2\psi}}{2\sqrt{c + H^2}}|\sigma^{2,0}| = \frac{e^{2\psi}}{2\sqrt{c + H^2}}|p|\,|dz|^2,$$

hence $\frac{|p|}{\lambda} = \frac{2\sqrt{c+H^2}}{e^{2\psi}}$ and (35) gives $c+H^2 = -4(c+H^2)e^{-2\psi}\Delta_0\psi + (c+H^2)e^{-4\psi}$. Therefore, $0 = \Delta_0\psi + \frac{e^{2\psi}}{4} - \frac{1}{4e^{2\psi}} = \Delta_0\psi + \frac{1}{2}\sinh(2\psi)$. □

Reciprocally, every solution ψ of $\Delta_0\psi + \frac{1}{2}\sinh(2\psi) = 0$ defined in a simply-connected domain of $\Sigma \subset \mathbb{C}$ produces a metric ds^2 by equation (32) (with ds_0^2 being the usual metric on $\mathbb{C}$, which is equivalent to taking $p = \frac{e^{i\theta}}{2\sqrt{H^2+c}}$ for certain $\theta \in [0, 2\pi)$). Now $(ds^2, \sigma^{2,0}, H)$ satisfy the Gauss and Codazzi equations and thus define an immersed H-surface $\Sigma \looparrowright \mathbb{M}^3(c)$ (up to congruences) with this fundamental data. Roughly speaking, we can say that CMC surfaces in $\mathbb{M}^3(c)$ are described by solutions of the Sinh-Gordon equation. We remark that moving $\theta \in [0, 2\pi)$ we get the well-known family of *associated surfaces,* all of them isometric and with the same CMC H.

3. Minimal surfaces in $M \times \mathbb{R}$

Let (M, g_M) be a Riemannian surface with metric $g_M = \mu(w)|dw|^2$, $\mu \in C^\infty(M)$, $\mu > 0$. We endow the product space $M \times \mathbb{R}$ with the product metric $\mu|dw|^2 + dt^2$, where t parameterizes the vectical factor. Consider an immersion $X = (h, f)\colon \Sigma \looparrowright M \times \mathbb{R}$. As before, call $ds^2 = \lambda^2|dz|^2$ to the induced metric on Σ, $z = x + iy$ being a conformal coordinate on Σ. The tangent bundle of the immersion is generated by $X_x = (h_x, f_x)$ and $X_y = (h_y, f_y)$. Then,

$$\langle X_x, X_y\rangle = g_M(h_x, h_y) + f_x f_y = (\mu \circ h)^2 \Re(h_x \overline{h_y}) + f_x f_y,$$

where $\Re(\cdot)$ stands for real part. Analogously, $\|X_x\|^2 = (\mu \circ h)^2|h_x|^2 + f_x^2$ and $\|X_y\|^2 = (\mu \circ h)^2|h_y|^2 + f_y^2$. Using the classical operators $\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$ and $\partial_{\overline{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$, we can easily get

$$\left(\|X_x\|^2 - \|X_y\|^2\right) - 2i\langle X_x, X_y\rangle = 4(\mu \circ h)^2 h_z \overline{h}_z + 4f_z^2,$$

from where we have that

$$X \textit{ is conformal if and only if } (f_z)^2 = -(\mu \circ h)^2 h_z \overline{h}_z = -g_M(h_z, h_z). \qquad (36)$$

Assume from now on that X is conformal. Then, the conformal factor of the induced metric ds^2 on Σ is given by

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= \tfrac{1}{2}(\|X_x\|^2 + \|X_y\|^2) = \tfrac{1}{2}\left[2(\mu \circ h)^2(|h_z|^2 + |h_{\overline{z}}|^2) + 4|f_w|^2\right] \\ &\overset{(36)}{=} (\mu \circ h)^2(|h_z|^2 + |h_{\overline{z}}|)^2. \end{aligned}$$

Consider the smooth map $g\colon \Sigma \to \mathbb{C}$ given by

$$g = \frac{f_z h_{\overline{z}} - f_{\overline{z}} h_z}{\lambda |h_{\overline{z}}|}.$$

Note that the gradient of h has no zeros (otherwise we contradict that X is an immersion), hence the denominator of the last formula cannot vanish and, thus, g is smooth. The geometric meaning of the map g is stated in the following lemma, whose proof can be found in Sa Earp and Toubiana [9], Proposition 4:

Lema 3.1. *Let $X = (h, f): (\Sigma, \lambda^2|dz|^2) \looparrowright (M \times \mathbb{R}, \mu|dw|^2 + dt^2)$ be a conformal immersion. Then, the following formula defines a unit normal vector field along X:*

$$N = \frac{1}{|g|^2+1}\left(\frac{2\Re(g)}{\mu\circ h}, \frac{2\Im(g)}{\mu\circ h}, |g|^2-1\right), \tag{37}$$

where $\Im(\cdot)$ stands for imaginary part. Furthermore,

$$g^2 = -\frac{h_z}{\overline{h}_z}. \tag{38}$$

We remark that in the case $M = \mathbb{R}^2$ with its usual metric, then $\mu = 1$ and (37) says that g is the stereographic projection of the unit normal vector field from the north pole of the sphere.

Coming back to the general case, we now state a formula for the mean curvature of the immersion X, whose proof can be found in [9], Proposition 7. Note that if $w = a + ib$ is a local conformal coordinate in M, then $\partial_a, \partial_b, \partial_t$ give a (local) trivialization of the tangent bundle of $M \times \mathbb{R}$.

Lema 3.2. *Let $X = (h, f): (\Sigma, \lambda^2|dz|^2) \looparrowright (M \times \mathbb{R}, \mu|dw|^2 + dt^2)$ be a conformal immersion. Then, the mean curvature vector is given by*

$$2\lambda^2\vec{H} = 4\Re(\Theta)\,\partial_a + 4\Im(\Theta)\,\partial_b + \Delta_0 f\,\partial_t \tag{39}$$

where $\Theta = \Theta(z) = h_{z\overline{z}} + 2\left(\log\mu\right)_w h_z h_{\overline{z}}$ and Δ_0 is the laplacian with respect to the flat metric $|dz|^2$.

An immediate consequence of (39) is that X is a conformal and minimal if and only if both h and f are harmonic. In the sequel, we will assume this is the case. The fact that h is harmonic with values on the Riemann surface M allows us to associate to it an holomorphic object, namely the *Hopf differential* of h:

$$Q_h = \phi\,(dz)^2, \quad \text{where } \phi = g_M(h_z, h_z) = (\mu\circ h)^2 h_z\overline{h}_z. \tag{40}$$

By equation (36), $Q_h = -(f_z)^2\,(dz)^2 = -(\partial f)^2$, so Q_h is the square of a holomorphic differential on Σ. It is worth mentioning that the holomorphic differential Q_h also coincides up to a multiplicative constant with the celebrated *Abresch-Rosenberg* differential Q_{AR}, although these two authors defined Q_{AR} for any CMC surface in a three-dimensional homogeneous space with isometry group of dimension 4, see [1, 2]. We will not make use of this remarkable property.

With the above ingredients, we next explain how the Sinh-Gordon equation appears in this setting. A straightforward computation (see for instance page 8 of Schoen and Yau [10]) gives that

$$0 \overset{(A)}{\leqslant} \left|\frac{h_{\overline{z}}}{h_z}\right| = \frac{|dh|^2 - 2\,\mathrm{Jac}(h)}{|dh|^2 + 2\mathrm{Jac}(h)} \overset{(B)}{\leqslant} 1,$$

where dh is the differential of h and $\mathrm{Jac}(h)$ its Jacobian, and equality holds in (A) if and only if $h_{\overline{z}} = 0$ while equality holds in (B) if and only if $\mathrm{Jac}(h) = 0$. Since the gradient of h has no zeros, then equality in (A) cannot hold. Comparing with (38) we deduce that $1 \leqslant |g| < \infty$ in Σ, and thus the function $\psi\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ given by

$$\psi = \log|g| \tag{41}$$

is smooth and non-negative. Furthermore, the zeros of ψ coincide with the zeros of $\mathrm{Jac}(h)$, that is to say, with the points where the tangent plane to the immersion is vertical. We next compute the laplacian of ψ with respect to the flat metric $|dz|^2$:

$$\Delta_{|dz|^2}\psi = \frac{1}{2}\Delta_{|dz|^2}\log|g|^2 = \frac{1}{2}\Delta_{|dz|^2}\log\frac{|h_z|}{|h_{\overline{z}}|} = -2K_M\,\mathrm{Jac}_{|dz|^2}(h),$$

where K_M is the Gaussian curvature of $(M, \mu|dw|^2)$, $\mathrm{Jac}_{|dz|^2}(h)$ is the Jacobian of h with respect to the metrics $|dz|^2$ on Σ and $\mu|dw|^2$ on M, and in the last equality we have used the Bochner formula for harmonic maps between surfaces (see [10] page 10). On the other hand,

$$\sinh(2\psi) = \frac{1}{2}\left(e^{2\psi} - e^{-2\psi}\right) \overset{(41)}{=} \frac{1}{2}\left(|g|^2 - |g|^{-2}\right) \overset{(38)}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{|h_z|}{|h_{\overline{z}}|} - \frac{|h_{\overline{z}}|}{|h_z|}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{|h_z|^2 - |h_{\overline{z}}|^2}{|h_z|\,|h_{\overline{z}}|} = \frac{1}{2}\frac{|\partial h|^2 - |\overline{\partial} h|^2}{|\partial h|\,|\overline{\partial} h|} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{Jac}_{|dz|^2}(h)}{(\mu\circ h)^2|h_z|\,|h_{\overline{z}}|} \overset{(40)}{=} \frac{1}{2}\frac{\mathrm{Jac}_{|dz|^2}(h)}{|\phi|},$$

from where we obtain

$$\Delta_{|dz|^2}\psi + 4|\phi|K_M\sinh(2\psi) = 0.$$

We can absorb the multiplicative factor $|\phi|$ in the last equation by considering the metric $ds_0^2 = 8|\phi|\,|dz|^2 = 8|Q_h|^2$ on Σ, which is unbranched since the gradient of h does not vanish, and flat since ϕ is holomorphic. In this way we conclude the following well-known result (see Proposition 1 in [5]):

Proposición 3.1. *Let $X = (h, f)\colon (\Sigma, \lambda^2|dz|^2) \looparrowright (M\times\mathbb{R}, \mu|dw|^2 + dt^2)$ be a conformal minimal immersion. Then, the function ψ given by (41) satisfies the PDE*

$$\Delta_0\psi + \frac{1}{2}K_M\sinh(2\psi) = 0 \qquad \text{on } \Sigma, \tag{42}$$

where the laplacian is computed with respect to the flat metric $ds_0 = 8|Q_h|$ and Q_h is the Hopf differential associated to the harmonic function h.

In the case K_M is constant (i.e. $M = \mathbb{M}^2(\kappa)$, $\kappa \in \mathbb{R}$), then (42) is a genuine Sinh-Gordon equation, at least in the case $\kappa > 0$. Proposition 3.1 admits a converse, which allows to construct conformal minimal immersions in $\mathbb{M}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$ by prescribing the induced metric and a holomorphic quadratic differential $Q = Q_h$. For details, see Theorem 7 in [5].

4. New Sinh-Gordon and Sin-Gordon type equations for CMC surfaces in spaces $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$

In the sequel, we will study CMC surfaces in a simply-connected homogeneous three-manifold whose isometry group has dimension 4. These homogeneous spaces are classified in terms of two real numbers κ, τ with $\kappa \neq 4\tau^2$, and are usually denoted by $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$. The space $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ admits a Riemannian fibration Π over the complete simply-connected surface $\mathbb{M}^2(\kappa)$ of constant curvature κ (the sphere $\mathbb{S}^2(\kappa)$ when $\kappa > 0$, the Euclidean plane $\mathbb{R}^2$ when $\kappa = 0$ and the hyperbolic plane $\mathbb{H}^2(\kappa)$ when $\kappa < 0$); here τ is the bundle curvature. The fibers of $\Pi\colon \mathbb{E}(\kappa, \tau) \to \mathbb{M}^2(\kappa)$ are geodesics, and translations along these fibers generate a unit Killing vector field E_3, called the *vertical vector field.* If $\tau = 0$, then $\mathbb{E}(\kappa, \tau)$ is the product space $\mathbb{M}^2(\kappa) \times \mathbb{R}$. In the case $\tau \neq 0$, we get three types of manifolds depending on the sign of κ: if $\kappa > 0$ we have the *Berger spheres,* if $\kappa = 0$ we obtain the *Heisenberg space* Nil_3, and the case $\kappa < 0$ corresponds to the universal cover of $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, the special linear group (or equivalently, the universal cover of the unit tangent bundle of $\mathbb{H}^2$). The above description could be extended for $\kappa = 4\tau^2$, obtaining the Euclidean space $\mathbb{R}^3$ (when $\kappa = \tau = 0$) or a round 3-sphere $\mathbb{S}^3$ (when $\kappa = 4\tau^2 \neq 0$), although these space forms have isometry group of dimension 6 and we will not consider them in this section.

Consider a (two-sided) immersion $X\colon \Sigma \looparrowright \mathbb{E}(\kappa, \tau)$ with CMC $H \geqslant 0$. We exclude the case $H = \tau = 0$, which was treated in the Section 3. Denote by $ds^2 = \lambda |dz|^2$ its induced metric (as before, $z = x + iy$ is a local conformal coordinate), and by K, N to the Gaussian curvature of ds^2 and the unit normal vector field to X, respectively. The bounded Jacobi function $\nu = \langle N, E_3 \rangle$ is called the *angle function* of X. Another geometrically relevant object in this setting is the complex valued smooth 1-form $A\, dz = \langle X_z, E_3 \rangle dz$. With these ingredients, we can consider the globally defined Abresch-Rosenberg quadratic differential $Q_{AR} = \phi\, (dz)^2$, where

$$\phi = 2(H + i\tau)p - (\kappa - 4\tau^2)A^2 \tag{43}$$

and $\sigma^{2,0} = p\, (dz)^2$ is the Hopf differential of X, defined as $p = \sigma(\partial_z, \partial_z)$. Note that the factor 4 appearing in (31) does not occur now; here we follow the notation in Daniel, Hauswirth and Mira [3]. Abresch and Rosenberg [1, 2] proved that Q_{AR} is holomorphic for every CMC surface $\Sigma \looparrowright \mathbb{E}(\kappa,\tau)$. The structure equations for ψ are given by (see for instance [3]):

$$\begin{array}{llll}
(\mathbf{C},\mathbf{1}) & p_{\overline{z}} & = & \dfrac{\kappa-4\tau^2}{2}\lambda\nu A,\\
(\mathbf{C},\mathbf{2}) & A_{\overline{z}} & = & \dfrac{H+i\tau}{2}\lambda\nu,\\
(\mathbf{C},\mathbf{3}) & \nu_z & = & -(H-i\tau)A-2\dfrac{p}{\lambda}\overline{A},\\
(\mathbf{C},\mathbf{4}) & 4\dfrac{|A|^2}{\lambda} & = & 1-\nu^2.
\end{array}$$

The zero set of Q_{AR} consists of isolated points unless Σ is invariant by a one-parameter group of ambient isometries (Lemma 2.3.6 in [3]). In the sequel we will assume that Q_{AR} is not identically zero, and work outside the discrete set $\mathfrak{U}$ of zeros of Q_{AR}. We will also assume that $4H^2+\kappa>0$. Consider the metric

$$ds_0^2 = b|Q_{AR}| \qquad \text{in } \Sigma-\mathfrak{U},$$

where $b>0$ is a constant to be determined. ds_0^2 is flat and conformal to ds^2. Hence, there exists a smooth, real valued function $w\in C^\infty(\Sigma-\mathfrak{U})$ such that

$$ds^2 = e^{2w}\,ds_0^2 \qquad \text{in } \Sigma-\mathfrak{U}. \tag{44}$$

We define the constants

$$\delta = 4H^2+\kappa>0, \qquad \mu=\kappa-4\tau^2\neq 0,$$

(hence $4(H^2+\tau^2)=\delta-\mu$) and the following strictly increasing diffeomorphism:

$$\left.\begin{array}{lll}
\text{If } \mu>0, & f\colon(-\sqrt{\delta/\mu},\sqrt{\delta/\mu})\to\mathbb{R}, & f(x)=\frac{\operatorname{arg\,tanh}\left(\sqrt{\frac{\mu}{\delta}}x\right)}{\sqrt{\delta\mu}}\\
\text{If } \mu<0, & f\colon\mathbb{R}\to\left(-\frac{\pi}{2\sqrt{-\delta\mu}},\frac{\pi}{2\sqrt{-\delta\mu}}\right), & f(x)=\frac{\arctan\left(\sqrt{\frac{-\mu}{\delta}}x\right)}{\sqrt{-\delta\mu}}
\end{array}\right\} \tag{45}$$

We remark that the function $\delta-\mu\nu^2$ is smooth and positive on Σ, since otherwise μ is necessarily positive and then,

$$\nu^2\leqslant 1\leqslant\frac{4H^2+\kappa}{\kappa-4\tau^2}=\frac{\delta}{\mu}, \tag{46}$$

with equality only if $H=\tau=0$ at those points in Σ where $\nu^2=1$. Since we are assuming $H^2+\tau^2\neq 0$, then $\delta-\mu\nu^2>0$. Note that (46) also implies that ν always lies in the domain of definition of f (regardless of the sign of μ), hence $f\circ\nu$ makes sense.

Lema 4.1. *In the above situation, assume that $\delta \neq \mu$ (i.e. $H^2+\tau^2 \neq 0$). Then, $f\circ\nu$ satisfies the following PDE in $\Sigma - \mathfrak{U}$:*

$$\Delta(f\circ\nu) + \left(\frac{1}{2} + \frac{8e^{-4w}}{b^2}\frac{1}{(\delta-\mu\nu^2)^2}\right)\nu = 0.$$

Demostración. By the Gauss equation,

$$\tau^2 + \mu\nu^2 = K - \det S = K + \frac{4|p|^2}{\lambda^2} - H^2, \tag{47}$$

where we have used that (see page 4 of [4])

$$\frac{4|p|^2}{\lambda^2} = H^2 - \det S. \tag{48}$$

Hence,

$$\frac{\delta-\mu}{4} + \mu\nu^2 = K + \frac{4|p|^2}{\lambda^2} = -e^{-2w}\Delta_0 w + \frac{4|p|^2}{\lambda^2}, \tag{49}$$

Where Δ_0 refers to ds_0^2. On the other hand,

$$\lambda\,|dz|^2 = ds^2 = e^{2w}\,ds_0^2 = e^{2w}b\,|Q_{AR}| = e^{2w}b|\phi|\,|dz|^2,$$

hence

$$\frac{|\phi|}{\lambda} = \frac{e^{-2w}}{b}. \tag{50}$$

Squaring (50) and using (43) and (**C.4**),

$$\frac{|\phi|^2}{\lambda^2} = \frac{e^{-4w}}{b^2} = (\delta-\mu)\frac{|p|^2}{\lambda^2} + \frac{\mu^2}{16}(1-\nu^2)^2 - 4\mu\Re\left[(H+i\tau)\frac{p\overline{A}^2}{\lambda^2}\right]. \tag{51}$$

Since $\delta \neq \mu$, we can solve for $\frac{4|p|^2}{\lambda^2}$ in (51) obtaining

$$4\frac{|p|^2}{\lambda^2} = \frac{4e^{-4w}}{b^2(\delta-\mu)} - \frac{\mu^2}{4(\delta-\mu)}\left(1-\nu^2\right)^2 + \frac{16\mu}{\delta-\mu}\Re\left[(H+i\tau)\frac{p\overline{A}^2}{\lambda^2}\right]. \tag{52}$$

On the other hand, the last term in the RHS of (51) is related to $|\nabla\nu|^2$. To find the exact expression, first use (43) and (**C.4**) to obtain

$$2(H+i\tau)\frac{p}{\lambda}\overline{A} = \frac{\mu}{4}(1-\nu^2)A + \frac{\phi}{\lambda}\overline{A}. \tag{53}$$

Now (**C.3**) gives

$$\nu_z = -(H-i\tau)\left[1+\frac{\mu}{\delta-\mu}(1-\nu^2)\right]A - \frac{1}{H+i\tau}\frac{\phi}{\lambda}\overline{A} \tag{54}$$

(compare with equation (2.3.4) in [3]). Now (43), (**C.4**) and (54) give

$$\begin{array}{rcl} |\nabla\nu|^2 = \frac{4}{\lambda}|\nu_z|^2 & = & \frac{\delta-\mu}{4}\left[1-\frac{\mu^2}{(\delta-\mu)^2}(1-\nu^2)^2\right](1-\nu^2) \\ & & +\frac{4}{\delta-\mu}\frac{e^{-4w}}{b^2}(1-\nu^2)+16\frac{\delta-\mu\nu^2}{\delta-\mu}\Re\left[(H+i\tau)\frac{p\overline{A}^2}{\lambda^2}\right]. \end{array}$$

Solving for $\Re\left[(H+i\tau)\frac{p\overline{A}^2}{\lambda^2}\right]$ in the last expression and substituting the resulting value first in (51) and then in (49), we obtain

$$\frac{\delta-\mu}{4}+\mu\nu^2=-e^{-2w}\Delta_0 w+\frac{4e^{-4w}}{b^2\left(\delta-\mu\nu^2\right)}+\frac{\mu}{\delta-\mu\nu^2}|\nabla\nu|^2-\frac{\mu}{4}\left(1-\nu^2\right),$$

hence

$$\Delta w-\frac{4e^{-4w}}{b^2(\delta-\mu\nu^2)}-\frac{\mu}{\delta-\mu\nu^2}|\nabla\nu|^2+\frac{\delta+3\mu\nu^2}{4}=0. \tag{55}$$

Since ν is a Jacobi function,

$$\Delta\nu=2K\nu-(\delta+\mu\nu^2)\nu=-2\nu\Delta w-(\delta+\mu\nu^2)\nu. \tag{56}$$

Multiplying (55) by 2ν and using (56) we get

$$\frac{\delta+3\mu\nu^2}{2}\nu=\Delta\nu+(\delta+\mu\nu^2)\nu+\frac{8e^{-4w}}{b^2}\frac{\nu}{\delta-\mu\nu^2}+\frac{2\mu\nu}{\delta-\mu\nu^2}|\nabla\nu|^2. \tag{57}$$

On the other hand, by direct computation in (45) (regardless of whether μ positive or negative) we have

$$f'(x)=\frac{1}{\delta-\mu x^2},\qquad f''(x)=\frac{2\mu x}{\left(\delta-\mu x^2\right)^2}$$

whenever x lies in the domain of definition of f. Recall that $f\circ\nu$ makes sense. Multiplying by $f'(\nu)\neq 0$ in (57) gives

$$\frac{\delta+3\mu\nu^2}{2}\nu f'(\nu)\overset{(57)}{=}f'(\nu)\Delta\nu+(\delta+\mu\nu^2)\nu f'(\nu)+\frac{8e^{-4w}}{b^2}\frac{\nu f'(\nu)}{\delta-\mu\nu^2}+f''(\nu)|\nabla\nu|^2.$$

The first and fourth terms in the RHS of the last expression add up to $\Delta(f\circ\nu)$. Grouping the LHS with the third term of the RHS, we get

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & \Delta(f\circ\nu)+\left(\frac{\delta-\mu\nu^2}{2}+\frac{8e^{-4w}}{b^2}\frac{1}{\delta-\mu\nu^2}\right)\nu f'(\nu) \\ & = & \Delta(f\circ\nu)+\left(\frac{1}{2}+\frac{8e^{-4w}}{b^2}\frac{1}{(\delta-\mu\nu^2)^2}\right)\nu, \end{array}$$

and the lemma is proved. □

Next we manipulate the PDE in Lemma 4.1 to obtain an equation of Sinh-Gordon type if $\mu > 0$ (resp. Sin-Gordon type if $\mu < 0$).

Assume that $\mu > 0$**.** These $\mathbb{E}(\kappa,\tau)$ spaces are $\mathbb{S}^2(\kappa)\times\mathbb{R}$ and the Berger spheres which lie in the complex projective space $\mathbb{CP}^2$ as geodesic spheres. Then, $\sqrt{\frac{\mu}{\delta}}\nu = \tanh\left[\sqrt{\delta\mu}f(\nu)\right]$ and thus,

$$\cosh^2\left[\sqrt{\delta\mu}f(\nu)\right] = \frac{\delta}{\delta-\mu\nu^2}, \qquad \sinh^2\left[\sqrt{\delta\mu}f(\nu)\right] = \frac{\mu\nu^2}{\delta-\mu\nu^2}.$$

Since $\nu^2 < \frac{\delta}{\mu}$ as explained before Lemma 4.1, then $\delta-\mu\nu^2 > 0$ and we can extract square roots in the last two equalities. Therefore, $\sinh\left[\sqrt{\delta\mu}f(\nu)\right]\cosh\left[\sqrt{\delta\mu}f(\nu)\right] = \frac{\sqrt{\delta\mu}}{\delta-\mu\nu^2}\nu$ from which the PDE in Lemma 4.1 reads

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta_0(f\circ\nu) + \left(\tfrac{e^{2w}}{2} + \tfrac{8e^{-2w}}{b^2}\tfrac{1}{(\delta-\mu\nu^2)^2}\right)\nu \\ &= \Delta_0(f\circ\nu) + \tfrac{1}{2\sqrt{\delta\mu}}\sinh\left[2\sqrt{\delta\mu}f(\nu)\right]\left(\tfrac{e^{2w}}{2}(\delta-\mu\nu^2) + \tfrac{8e^{-2w}}{b^2}\tfrac{1}{\delta-\mu\nu^2}\right). \end{aligned}$$

(note that $\nu, f(\nu), \sinh[\sqrt{\delta\mu}f(\nu)]$ all have the same sign). It is natural to write the parenthesis in the RHS in the form $u+\frac{1}{u}$. To do this, we take $b=2$ and define the positive smooth function

$$u = \frac{e^{2w}}{2}(\delta-\mu\nu^2). \tag{58}$$

Then, $\Delta_0(\sqrt{\delta\mu}f\circ\nu) + \frac{1}{2}\sinh\left[2\sqrt{\delta\mu}f(\nu)\right]\left(u+\frac{1}{u}\right) = 0.$

Assume that $\mu < 0$**.** These $\mathbb{E}(\kappa,\tau)$ spaces are $\mathbb{H}^2(\kappa)\times\mathbb{R}$, Nil_3 and those Berger spheres which lie in the complex hyperbolic space $\mathbb{HP}^2$ as geodesic spheres. We continue assuming $4H^2+\kappa > 0$, which in Nil_3 only excludes the minimal case and in fibrations over the hyperbolic plane $\mathbb{H}^2(\kappa)$ constraints the mean curvature to $|H| > \frac{-\kappa}{2}$. Then, $\sqrt{\frac{-\mu}{\delta}}\nu = \tan\left[\sqrt{-\delta\mu}f(\nu)\right]$ and thus,

$$\cos^2\left[\sqrt{-\delta\mu}f(\nu)\right] = \frac{\delta}{\delta-\mu\nu^2}, \qquad \sin^2\left[\sqrt{-\delta\mu}f(\nu)\right] = \frac{-\mu\nu^2}{\delta-\mu\nu^2}.$$

Extracting square roots (again (note $\nu, f(\nu), \sin[\sqrt{-\delta\mu}f(\nu)]$ all have the same sign), we have $\sin\left[\sqrt{-\delta\mu}f(\nu)\right]\cos\left[\sqrt{-\delta\mu}f(\nu)\right] = \frac{\sqrt{-\delta\mu}}{\delta-\mu\nu^2}\nu$. Taking $b=2$ and reasoning as before, we transform the PDE in Lemma 4.1 into

$$\Delta_0(\sqrt{-\delta\mu}f\circ\nu) + \frac{1}{2}\sin\left[2\sqrt{-\delta\mu}f(\nu)\right]\left(u+\frac{1}{u}\right) = 0,$$

with u as before (note that $u > 0$ is again positive in this setting). In summary:

Proposición 4.1. *Let* $\Sigma \looparrowright \mathbb{E}(\kappa,\tau)$ *be a CMC* H *surface with* $H^2+\tau^2 \neq 0$ *and* $4H^2+\kappa > 0$. *Let* ds^2, ν, Q_{AR} *be its induced metric, angle function and Abresch-Rosenberg differential, respectively. Consider the flat metric* $ds_0^2 = 2|Q_{AR}|$ *(defined away from the zero set* $\mathfrak{U}$ *of* Q_{AR}*) and the functions*

$$\psi = \begin{cases} \operatorname{arg\,tanh}\left(\sqrt{\frac{\kappa-4\tau^2}{4H^2+\kappa}}\nu\right) & \text{if } \kappa-4\tau^2>0, \\ \arctan\left(\sqrt{\frac{-\kappa+4\tau^2}{4H^2+\kappa}}\nu\right) & \text{if } \kappa-4\tau^2<0, \end{cases}$$

$$u = \frac{e^{2w}}{2}\left[4H^2+\kappa-(\kappa-4\tau^2)\nu^2\right],$$

where $w \in C^\infty(\Sigma-\mathfrak{U})$ *is defined by* $ds^2 = e^{2w}\,ds_0^2$. *Then,* $u>0$ *and*

$$\Delta_0\psi + \frac{1}{2}\mathbf{S}(2\psi)\left(u+\frac{1}{u}\right) = 0,$$

where $\mathbf{S}(\cdot) = \begin{cases} \sinh(\cdot) & \text{if } \kappa-4\tau^2>0, \\ \sin(\cdot) & \text{if } \kappa-4\tau^2<0. \end{cases}$

Agradecimientos

Research partially supported by MEC/FEDER grant no. MTM2007-61775 and Regional J. Andalucía Grant no. P06-FQM-01642.

Referencias

[1] U. Abresch and H. Rosenberg, A Hopf differential for constant mean curvature surfaces in $\mathbb{S}^2\times\mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^2\times\mathbb{R}$, *Acta Math.* **193(2)** (2004), 141–174.

[2] U. Abresch and H. Rosenberg, Generalized Hopf differentials, *Mat. Contemp.* **28** (2005), 1–28.

[3] B. Daniel, L. Hauswirth and P. Mira, *Constant mean curvature surfaces in homogeneous manifolds*, Korea Institute for Advanced Study, Seoul, 2009.

[4] J. M. Espinar and H. Rosenberg, Complete constant mean curvature surfaces in homogeneous spaces, to appear in Comment. Math. Helvet.

[5] L. Hauswirth, R. Sa Earp and E. Toubiana, Associate and conjugate minimal immersions in $M\times\mathbb{R}$, *Tohoku Math. J.* **60(2)** (2008), 267–286.

[6] M. Kilian and U. Schmidt, On the moduli of constant mean curvature cylinders of finite type in the 3-sphere, preprint, 2008, `arXiv:0712.0108`.

[7] U. Pinkall and I. Sterling, On the classification of constant mean curvature tori, *Ann. of Math.* **130** (1989), 407–451.

[8] M. Ritoré and A. Ros, Stable constant mean curvature tori and the isoperimetric problem in three space forms, *Comment. Math. Helvet.* **67** (1992), 293–305.

[9] R. Sa Earp and E. Toubiana, Screw motion surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, *Illinois J. Math.* **49(4)** (2005), 1323–1362.

[10] R. Schoen and S. T. Yau, *Lectures on harmonic maps*, International Press, 1997.

Florentino García Santos: In Memoriam
Universidad de Granada, 2011, págs. 157–170

Geometría Diferencial y sus Aplicaciones: algunos avances recientes del grupo de investigación

Alfonso Romero • Miguel Sánchez

Resumen Se expone una somera reseña de la actividad investigadora reciente del Grupo FQM-324, del que fue miembro el Profesor Florentino García Santos. Sirva este escrito de recuerdo y reconocimiento de todos sus miembros.

1. Introducción

El Grupo de Investigación en Geometría Diferencial y sus Aplicaciones, FQM-324, reúne desde hace una década un número importante de investigadores. Hasta hace un año, ha sido su responsable el Profesor Ceferino Ruiz, y desde entonces el primer autor del presente artículo. Actualmente, el grupo consta de 21 miembros:

Albujer Brotons, Alma L. (Prof. Ayudante Dr., Univ. Córdoba)
Barros Díaz, Manuel (CU, Univ. Granada)
Caballero Campos, Magdalena (Prof. Ayudante Dr., Univ. Córdoba)
Cañadas Pinedo, Mª Angustias (PTU, Univ. Málaga)
Blanco, Oihane F. (Becaria FPI, Univ. Granada)
Flores Dorado, José Luis (PTU, Univ. Málaga)
Gutiérrez López, Manuel (PTU, Univ. Málaga)
Haesen, Stefan L. (Dr., Simon Stevin Institute of Geometry, The Nederland)
Herrera Fernández, Jónatan (Dr. Univ. Málaga)
Javaloyes Victoria, Miguel Ángel (Prof. Contratado Doctor, Univ. Murcia)
Martín Serrano, Francisco (PTU, Univ. Granada)
Olea Andrades, Benjamín (Dr. Univ. Málaga)
Ortega Titos, Miguel (PTU, Univ. Granada)
Palomo Ruiz, Francisco José (Prof. Contratado Dr., Univ. Málaga)
Pérez Jiménez, Juan de Dios (PTU, Univ. Granada)
Romero Sarabia, Alfonso (CU, Univ. Granada)
Rubio Ruiz, Rafael María (Prof. Contratado Dr., Univ. Córdoba)
Ruiz Garrido, Ceferino (CU, Univ. Granada)
Sánchez Caja, Miguel (CU, Univ. Granada)
Sánchez Rodríguez, Ignacio (Prof. Contratado Dr., Univ. Granada)

Alfonso Romero, *aromero@ugr.es*
Miguel Sánchez, *sanchezm@ugr.es*
Dep. Geometría y Topología, Facultad de Ciencias, Universidad de Granada, 18071-Granada

Senovilla, José M.M. (CU, Univ. País Vasco)

El grupo está presente en cinco universidades españolas de tres comunidades autónomas, y en un centro extranjero. Su composición es interdisciplinar, con matemáticos de diversas áreas y físico-matemáticos. Aunque centrado en la investigación básica, el grupo también genera resultados de carácter aplicado. Especialmente, los últimos doctores integrados al grupo (A. Albujer, M.A. Javaloyes y F. Martín) han contribuido a renovar líneas de investigación e incluir nuevas [3, 4, 5, 28, 56, 57, 58, 59, 60, 65, 66]. En el seno del grupo se han formado continuamente nuevos doctores. El último ha sido J. Herrera, cuya tesis se defendió en abril de 2011; actualmente se halla en formación OF Blanco, bajo la codirección de M. Sánchez y J.M.M. Senovilla. En toda su trayectoria, el grupo ha estado abierto a la coordinación con otros grupos del PAIDI de la Junta de Andalucía; en particular, ha sido el impulsor de una serie de ocho *Encuentros Andaluces* con investigadores interesados en temas afines. Además de colaborar en la organización de otros eventos, fue pieza clave en la del congreso *International Seminar on Applied Geometry in Andalusia, Granada 2006*, uno de los satélites oficiales del congreso ICM Madrid 2006. Actualmente, colabora en la organización del *VI International Meeting on Lorentzian Geometry, Granada 2011,* `http://gigda.ugr.es/gelogra/`. Se reseñan a continuación algunas de las líneas investigadas recientemente dentro de él.

2. Causalidad y Relatividad Matemática

2.1. Causalidad clásica

La Teoría de la Causalidad es un rama especialmente relevante dentro de la Geometría de Lorentz global. En particular, los espaciotiempos globalmente hiperbólicos pressentan el mejor comportamiento causal, que permite plantear y resolver ecuaciones hiperbólicas desde unos datos iniciales sobre una *hipersuperficie de Cauchy*, así como determinarlos a partir de la ecuación de Einstein. Fue un resultado crucial de Geroch [38] el que aseguró que un espaciotiempo globalmente hiperbólico M admite una hipersuperficie de Cauchy *topológica* S, una función tiempo de Cauchy y, entonces, una descomposición topológica de M como un producto $\mathbb{R} \times S$.

Las aportaciones recientes más representativas han sido:

(1) La solución completa de los problemas de diferenciabilidad derivados del resultado topológico de Geroch y otros [80], obtenida por A.N. Bernal y M. Sánchez [16], [17].

(2) La sorprendente simplificación de la noción clásica de hiperbolicidad global: los espaciotiempos globalmente hiperbólicos se pueden definir como "causales" en lugar de "fuertemente causales", A.N. Bernal y M. Sánchez, [18].

(3) La siguiente versión Lorentziana del Teorema de Nash: un espaciotiempo se puede embeber isometricamente en un espaciotiempo de Lorentz-Minkowksi $\mathbb{L}^N$ si y sólo si admite una función tiempo *empinada* τ (i.e., $g(\nabla\tau, \nabla\tau) < -1$, en todo punto); en

particular, esto ocurre en espaciotiempos globalmente hiperbólicos (lo que evita los problemas de diferenciabilidad en [30]), O. Müller y M. Sánchez, [67].

2.2. Borde causal y espaciotiempos de tipo pp-waves

Los *bordes ideales* más relevantes en Relatividad Matemática son el borde conforme y el borde causal. El borde conforme es el más usado (diagramas de Penrose, borde en la correspondencia AdS/CFT,...) pero resulta extrínseco al espaciotiempo y no tiene una definición consistente general. Debido a esto, Geroch, Kronheimer y Penrose [39] sugirieron la construcción intrínseca de un *borde causal* general, asociado a la estructura conforme de una variedad lorentziana. Esta construcción tiene profundas implicaciones sobre conceptos como el de *agujero negro*, o sobre los problemas de frontera para la ecuación de Einstein. No obstante, y a pesar de los esfuerzos de múltiples autores posteriores, no existía una definición general del borde causal que estuviera libre de inconsistencias.

Las aportaciones recientes han sido:
(1) Obtención de fundamentos "universales" que limitan las posibles redefiniciones del borde causal, J.L. Flores, [31].
(2) Revisión crítica de todas las técnicas usadas previamente, M. Sánchez, [82].
(3) Existencia de una única redefinición consistente del borde causal, que coincide con la del borde conforme (en los casos en que éste puede definirse con naturalidad), J.L. Flores, J. Herrera y M. Sánchez, [33], [35].
(4) Tras algunos resultados pioneros en el caso de espaciotiempos productos $\mathbb{R} \times S$ por J.L. Flores y S.G. Harris [32], V. Alaña y J.L. Flores [1], se ha determinado la estructura del borde causal de una amplia clase de espaciotiempos que incluye a los estacionariso estándar, J.L. Flores, J. Herrera y M. Sánchez [34].
(5) Introducción de métodos variacionales nuevos para el estudio de la estructura del borde causal de ondas gravitatorias, J.L. Flores y M. Sánchez [37].
(6) Desarrollo de los otros bordes clásicos en Geometría Lorentziana, explorándose en particular la equivalencia entre el borde fibrado (*b-boundary*) y el borde singular de Cauchy en ciertos espaciotiempos, M. Gutiérrez, [41].

3. Modelos variacionales en Física Matemática

3.1. Modelos generales

Problemas no lineales descritos por densidades lagrangianas que involucran invariantes geométricos, en especial la geometría extrinseca, aparecen en campos como: *(a)* Geometría Differencial clásica: superficies minimales, superficies espaciales extremales, superficies de Willmore, etc. *(b)* Física: cuerdas bosónicas, σ-modelos, etc. *(c)* Otras ciencias: membranas químicas y biológicas, vesículas, etc. Es de remarcar que los mismos modelos geométricos pueden usarse para estudiar otro tipo de modelos, diferentes de los motivadores inicialmente.

Las aportaciones recientes han sido:
(1) Tratamiento variacional que conecta la teoría elástica clásica con el electromagnetismo (efecto Hall): las soluciones de la ecuación de la fuerza de Lorentz para un campo magnético de Killing se contemplan como varillas elásticas de Kirchhoff y viceversa M. Barros y A. Romero [12] (con J.L. Cabrerizo y M. Fernández) y [15].
(2) Estudio desde un punto de vista variacional conforme de hélices en la Naturaleza: principio de mínima acción, topología y cuantización, M. Barros y A. Ferrández [13].

3.2. Moduli de solitones con simetría rotacional para los σ-modelos no lineales con grupo de simetría $O_1(3)$

Los σ-modelos no lineales producen densidades lagrangianas para un campo escalar con dominio típico $\mathbb{R}^n, \mathbb{L}^n$ y codominio una variedad dotada de una métrica. Son relevantes en varios campos de investigación, especialmente la invarianza conforme contribuye a la renormalización en QFT. Recientemente, algunos autores (por ejemplo, C. Albertsson, U. Lindstrom y M. Zabzine, [2]) han desarrollado un nuevo punto de vista en el que las variables dinámicas del modelo se identifican con las aplicaciones de Gauss de inmersiones de superficies en el espacio Euclídeo.

Las aportaciones recientes han sido:
(1) Identificación del espacio moduli en terminos del funcional de Willmore y su caracterización explicita, M. Barros, M. Caballero y M. Ortega [11]. Como una etapa intermedia importante, es de destacar la clasificación completa de las superficies invariantes por rotaciones de $\mathbb{L}^3$.
(3) Clasificación de las superficies atrapadas y marginalmente atrapadas que son invariantes por grupos de simetrias (rotaciones/“boosts”/“screw”), S. Haesen y M. Ortega [49], [50], [51].

3.3. Modelos y técnicas asociadas a la congruencia luminosa

Una herramienta básica para obtener ciertas clasificaciones de variedades lorentzianas, es la variedad lorentziana “congruencia luminosa” que se asocia a un campo vectorial conforme temporal, M. Gutiérrez, F.J. Palomo y A. Romero [44], [45]. A partir de ella, estos autores obtuvieron una desigualdad integral de tipo Berger-Green en el caso compacto con notables consecuencias.

Las aportaciones recientes han sido:
(1) Construcción de espaciotiempos tipo congruencia lumninosa con una acción espacial de $\mathbb{S}^1$ y que sean físicamente realistas, a partir de espaciotiempos de Robertson-Walker, S. Haesen, F.J. Palomo y A. Romero [52], [53].

(2) Caracterización de los toros lorentzianos llanos como aquéllos que admiten un campo vectorial conforme temporal y no tienen puntos conjugados sobre sus geodésicas temporales y espaciales, F.J. Palomo y A. Romero, [69].
(3) Obtención de una sucesión de desigualdades integrales sobre cada variedad de Lorentz conformemente estacionaria sin puntos conjugados sobre sus geodésicas causales, de manera que si ocurre la igualdad para alguna de ellas, la variedad de Lorentz ha de ser llana [70].
(4) Estudio del fibrado de planos tangentes degenerados de una variedad de Lorentz y, en especial, la diferenciabilidad de la curvatura seccional luminosa [68].

4. Geodésicas en espaciotiempos estacionarios y geometría de Finsler

4.1. Conectividad geodésica de espaciotiempos estacionarios

En Geometría de Lorentz sólo las geodésicas causales presentan propiedades extremales análogas a las de las geodésicas en el caso riemanniano. Así, los puntos conjugados sobre las geodésicas espaciales pueden acumularse y no hay una técnica general de estudio en este caso. Sin embargo, a principio de los 90, varios analistas italianos (V. Benci, D. Fortunato, F. Giannoni,...) introdujeron algunas técnicas de Análisis Global en Variedades para el caso lorentziano. En particular, imponiendo condiciones restrictivas sobre los espaciotiempos, condiciones analíticas refinadas, como la de Palais-Smale, encuentran una aplicación al caso lorentziano.
(1) Interacción Palais-Smale/Causalidad: se obtiene una condición natural para asegurar la conectividad geodésica en una variedad de Lorentz estacionaria, concretamente, la existencia de un campo vectorial Killing completo y de una hipersuperficie de Cauchy espacial completa, A.M. Candela, J.L. Flores and M. Sánchez, [24].
(2) Revisión crítica de la teoría de geodésicas en el caso lorentziano, A.M. Candela y M. Sánchez, [25].
(3) En el caso estático y compacto se ha demostrado la conectividad geodésica y la existencia de una geodésica cerrada, usando propiedades invariantes conformes, M. Sánchez [81]. Más aún, en el caso estacionario y compacto se ha demostrado la existencia de una geodésica cerrada mediante un argumento muy sencillo, aunque no generalizable a a la clase conforme, J.L. Flores, M.A. Javaloyes y P. Piccione [36].
(4) Son de destacar asimismo los resultados de estructura de los espaciotiempos estacionarios en sí mismos. Estos incluyen la existencia de una descomposición estándar por M.A. Javaloyes y M. Sánchez [60], y la unicidad de la descomposición en el caso conformente estático por M. Sánchez y J.M.M. Senovilla [83], y por M. Gutiérrez y B. Olea [43], [42].

4.2. Relación con la Geometría de Finsler

Recientemente, autores como V. Perlick han mostrado su interés por métricas Finsler-Lorentz que no provienen de una métrica lorentziana. En particular, la relación entre espaciotiempos conformemente estacionarios y métricas de Randers ha merecido la atención de varios investigadores, G.W. Gibbons et al. [40].

Dentro del grupo se ha desarrollado una correspondencia que relaciona la estructura conforme de un espaciotiempo estacionario estándar $M = \mathbb{R} \times S$ y las métricas de Randers sobre S. En consecuencia, se han obtenido resultados tanto en la geometría de Lorentz como la de Finsler, E. Caponio, M.A. Javaloyes y M. Sánchez [28], que abren un nuevo campo de estudio. Grosso modo, dada una estructura estacionaria estándar:

$$M = \mathbb{R} \times S, \quad g = -dt^2 + \pi^*\omega \otimes dt + dt \otimes \pi^*\omega + \pi^* g_0, \quad \pi : M \times \mathbb{R} \to S$$

se define la métrica de Finsler de tipo Randers, o *métrica de Fermat*, que está asociada a M *y a su descomposición previa* es

$$R = \sqrt{h} + \omega, \qquad \text{donde} \quad h = g_0 + \omega \otimes \omega,$$

la clase de cohomología asociada a M

$$R_f = R + df = \sqrt{h} + \omega_f, \qquad |df|_R < 1.$$

Las geodésicas luminosas hacia el futuro (resp. pasado) en M se corresponden con geodésicas hacia delante (resp. atrás) de la métrica de Finsler.
(1) S es una hipersuperficie de Cauchy si y sólo si R_f es completa tanto hacia delante como hacia atrás, y M es globalmente hiperbólica si y sólo si las bolas simetrizadas cerradas son compactas. Más aún la clase de cohomología de la métrica de Randers R admite un representante geodésicamente completo si y sólo si las bolas simetrizadas cerradas son compactas [28].
(2) El borde causal de un espaciotiempo estacionario induce un *borde de Busemann* para la correspondiente métrica de Fermat, que resulta extensible a toda variedad finsleriana, y comparable con otros bordes como el de Gromov o Cauchy, J.L. Flores, J. Herrera, M. Sánchez [34].

5. Hipersuperficies y geometría extrínseca

5.1. Hipersuperficies espaciales de curvatura media constante en espaciotiempos con simetrías

El estudio de hipersuperficies espaciales de curvatura media constante (CMC) en ambientes lorentzianos resulta de gran interés, tanto geométrico como físico. El punto de partida es el clásico resultado de S.Y. Cheng y S.T. Yau [29] donde se caracterizan las hipersuperficies espaciales cerradas de curvatura media nula (maximales) en $\mathbb{L}^{n+1}$, extendiendo un resultado previo de E. Calabi válido solo para $n \leqslant 4$, [23].

Las hipersuperficies espaciales de CMC se estudiaron ampliamente en espaciotiempos de Robertson-Walker generalizados (GRW) espacialmente cerrados, así como en otros espacios que presentan cierto tipo de simetrías por L.J. Alías, A. Romero y M. Sánchez [8], [9], [10].

Las aportaciones recientes han sido:

(1) Reemplazando compacidad por completitud en el caso de las superficies espaciales, se caracterizan las superficies espaciales completas de CMC comprendidas entre dos *slices* de un espaciotiempo GRW con fibra llana, A. Romero y R.M. Rubio [77].
(2) Se estudian las superficies maximales completas en espaciotiempos de tipo GRW, dando también nuevos resultados de tipo Calabi-Bernstein (en el caso no compacto), M. Caballero, A. Romero y R.M. Rubio [19].
(3) Se caracterizan las superficies espaciales completas de CMC comprendidas entre dos slices de un espaciotiempo GRW con fibra muy general, M. Caballero, A. Romero y R.M. Rubio [20],
(4) Nuevos resultados de unicidad para superficies espaciales completas de CMC cuya función ángulo hiperbólico está acotada, M. Caballero, A. Romero y R.M. Rubio [21].
(5) Finalmente, todas las soluciones enteras de una inecuación diferencial que generaliza, entre otras, a la ecuación de superficies maximales, han sido encontradas, A. Romero y R.M. Rubio [79]

5.2. Superficies espaciales con segunda forma fundamental no degenerada

Para una superficie espacial con segunda forma fundamental no degenerada en $\mathbb{S}^3_1$, se obtuvo una fórmula que relaciona su curvatura media y de Gauss con la curvatura de la segunda forma fundamental. Así, se demostró que las esferas totalmente umbilicales son las únicas superficies espaciales compactas con segunda forma fundamental no degenerada y con curvatura de Gauss constante, J.A. Aledo y A. Romero [6].

La aportación más reciente ha sido una amplia extensión del estudio anterior al caso de espaciotiempos trimensionales generales, J.A. Aledo, S. Haesen y A. Romero [7].

5.3. Hipersuperficies reales en variedades kählerianas

La variedad de Grassmann de planos complejos de $\mathbb{C}^n$ es el único espacio simétrico conocido que está dotado tanto de una estructura kähleriana como de una estructura kähleriana cuaterniónica. El estudio de hipersuperficies reales en esta variedad de Grassmann es de un especial interés. Una herramienta adecuada es el operador de Jacobi definido como

$$R_X(Y) = R(Y, X)X,$$

donde $X := -JN$, N es un campo normal unitario y J es la estructura Kähleriana.

Las aportaciones recientes han sido diversas clasificaciones de hipersuperficies reales cuyo operador de Jacobi satisface ciertas condiciones más débiles que el paralelismo, como ser recurrente o de Codazzi. Estas aportaciones se han llevado a cabo por J.D. Pérez y sus colaboradores, [61, 64, 75, 76], muy especialmente el Profesor Florentino García Santos [62, 63, 71, 72, 74].

Agradecimientos

Parcialmente financiado por el Grupo de Investigación FQM-324 de la Junta de Andalucía, el proyecto nacional MEC-FEDER MTM2010-18099 y y proyecto andaluz de excelencia P09-FQM-4496 con fondos FEDER.

Referencias

[1] V. Alaña and J.L. Flores, The causal boundary of product spacetimes, *Gen. Rel. Gravitation*, **39** (2007), 1697–1718.

[2] C. Albertsson, U. Lindström and M. Zabzine, $N = 1$ supersymmetric sigma model with boundaries I., *Comm. Math. Phys.*, **233** (2003), 403–421.

[3] A.L.. Albujer and S. Haesen, A geometrical interpretation of the null sectional curvature, *J. Geom. Phys.*, **60** (2010), 471–476.

[4] A.L.. Albujer, F. Camargo and H. de Lima, Complete spacelike hypersurfaces with constant mean curvature in $-\mathbb{R} \times \mathbb{H}^n$, *J. Math. Anal. Appl.*, **368** (2010), 650–657.

[5] A.L.. Albujer and L.J. Alías, Calabi-Bernstein results for maiximal surfaces in Lorentzian product spaces, *J. Geom. Phys.*, **59** (2009), 620–631.

[6] J.A. Aledo and A. Romero, Compact spacelike surfaces in the 3-dimensional de Sitter space with non-degenerate second fundamental form, *Diff. Geom. Appl.*, **19** (2003), 97–111.

[7] J.A. Aledo, S. Haesen and A. Romero, Spacelike surfaces with positive definite second fundamental form in 3D spacetimes, *J. Geom. Phys.*, **57** (2007), 913–923.

[8] L.J. Alías, A. Romero and M. Sánchez, Uniqueness of complete spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in Generalized Robertson-Walker spacetimes, *General Relativity Grav.* **27** (1995), 71–84.

[9] L.J. Alías, A. Romero and M. Sánchez, Spacelike hypersurfaces of constant mean curvature and Calabi-Bernstein type problems, *Tôhoku Math J.*, **49** (1997), 337–345.

[10] L.J. Alías, A. Romero and M. Sánchez, Spacelike hypersurfaces of constant mean curvature in certain spacetimes, *Nonlinear Analysis TMA*, **30** (1997), 655–661.

[11] M. Barros, M. Caballero and M. Ortega, Rotational surfaces in $\mathbb{L}^3$ and solutions in the non-linear sigma model, *Comm. Math. Phys.* **290** (2009), 437–477.

[12] M. Barros, J.L. Cabrerizo, M. Ferrández and A. Romero, Magnetic Vortex Filament Flows, *J. Math. Phys.*, **48** (2007), 082904(1-27).

[13] M. Barros and A. Ferrández, A conformal variational approach to helices in nature, *J. Math. Phys.*, **50** (2009), 1-1 hasta 1-20

[14] M. Barros and A. Ferrández, Epicycloids generating Hamiltonian minimal surfaces in the complex quadric, *J. Geom. Phys.*, **60** (2010), 68–73.

[15] M. Barros and A. Romero, Magnetic Vortices, Europhysics Letters, **77** (2007), 34002(1–5).

[16] A.N. Bernal and M. Sánchez, On Smooth Cauchy Hypersurfaces and Geroch's Splitting Theorem, *Commun. Math. Phys.*, **243** (2003), 461–470.

[17] A.N. Bernal and M. Sánchez, Smoothness of time functions and the metric splitting of globally hyperbolic spacetimes, *Comm. Math. Phys.*, **257** (2005), 43–50

[18] A.N. Bernal and M. Sánchez, Globally hyperbolic spacetimes can be defined as "causal" instead of "strongly causal", *Class. Quant. Grav.*, **24** (2007), 745–750.

[19] M. Caballero, A. Romero and R.M. Rubio, Uniqueness of maximal surfaces in Generalized Robertson-Walker spacetimes and Calabi-Bernstein type problems, *J. Geom. Phys.*, **60** (2010), 394–402.

[20] M. Caballero, A. Romero and R.M. Rubio, Constant mean curvature spacelike surfaces in 3-dimensional Generalized Robertson-Walker, *Letters in Math. Phys.*, **83** (2010), 85–105.

[21] M. Caballero, A. Romero and R.M. Rubio, Complete CMC spacelike surfaces with bounded hyperbolic angle in Generalized Robertson- Walker spacetimes, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, **7** (2010), 1–18.

[22] J.L. Cabrerizo, M. Fernández and M. Ortega, Massless particles in 3-dimensional Lorentzian warped products, *J. Math. Phys.*, **48** (2007), 012901(1–12).

[23] E. Calabi, Examples of Bernstein problems for some non-linear equations, *Proc. Sympos. Pure Math.* **15** (1970), 223–230.

[24] A.M. Candela, J.L. Flores and M. Sánchez, Global hyperbolicity and Palais-Smale condition for action functionals in stationary spacetimes, *Adv. Math.*, **218** (2008) 515–536.

[25] A.M. Candela and M. Sánchez, Geodesics in semi-Riemannian manifolds: geometric properties and variational tools, *Recent developments in pseudo-Riemannian geometry, ESI Lect. Math. Phys., Eur. Math. Soc., Zürich*, (2008), 359–418.

[26] A.M. Cañadas-Pinedo and C. Ruiz, C. First classification of Pfaffian systems in dimension five, *Internat. J. Math.* **18** (2007), 1151-1168.

[27] A.M. Cañadas-Pinedo, A. Díaz, M. Gutiérrez and B. Olea, Curvature and conjugate points in Lorentz symmetric spaces, *Ann. Glob. Anal. Geom.*, **37** (2010), 91–101.

[28] E. Caponio, M.A. Javaloyes and M. Sńchez, On the interplay between Lorentzian Causality and Finsler metrics of Randers type, *Rev. Matem. Iberoam.*, en prensa.

[29] S.Y. Cheng and S.T. Yau, Maximal space-like hypersurfaces in the Lorentz-Minkowski spaces, *Ann. of Math.*, **104** (1976), 407–419.

[30] C.J.S. Clarke, On the global isometric embedding of pseudo-Riemannian manifolds, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **314** (1970) 417–428.

[31] J.L. Flores, The Causal Boundary of spacetimes revisited, *Comm. Math. Phys.*, **276** (2007), 611–643.

[32] J.L. Flores and S.G. Harris, Topology of the causal boundary for standard static spacetimes, *Class. Quant. Grav.*, **24** (2007), 1211–1260.

[33] J.L. Flores, J. Herrera and M. Sánchez, On the final definition of the causal boundary and its relation with the conformal boundary, *Adv. Theor. Math. Phys.*, en prensa.

[34] J.L. Flores, J. Herrera and M. Sánchez, Gromov, Cauchy and causal boundaries for Riemannian, Finslerian and Lorentzian manifolds, arXiv:1011.1154.

[35] J.L. Flores, J. Herrera and M. Sánchez, Isocausal spacetimes may have non-equivalent causal boundaries, *Class. Quant. Grav.*, provisionalmente aceptado.

[36] J.L. Flores, M.A. Javaloyes and P. Piccione, Periodic geodesics and geometry of compact Lorentzian manifolds with a Killing vector field, *Math. Z.* (2011), en prensa.

[37] J.L. Flores and M. Sánchez, The causal boundary of wave-type spacetimes, *J. High Energy Phys.*, **3** (2008), 0361-03143.

[38] R. Geroch, Domain of dependence, *J. Math. Phys.*, **11** (1970) 437–449.

[39] R. Geroch, E.H. Kronheimer and R. Penrose, Ideal point in space-time, *Proc. R. Soc. Lond. A*, **327** (1972), 545–567.

[40] G.W. Gibbons, C.A.R. Herdeiro, C.M. Warnick, and M.C. Werner, Stationary metrics and optical Zermelo-Randers-Finsler geometry, *Phys. Rev. D*, **79** (2009), 044022, 21 pp.

[41] M. Gutiérrez, Equivalence of Cauchy singular boundary and b-boundary in O(3)-reducible space-times, *J. Geom. Physics* **59** (2009), 1196-1198

[42] M. Gutiérrez and B. Olea, Global decomposition of a Lorentzian manifold as a generalized Robertson-Walker space, *Diff. Geom. App.*, **27** (2009), 146–156.

[43] M. Gutiérrez and B. Olea, Uniqueness of static decompositions, *Ann. Glob. Anal. Geom.*, **39** (2011), 13–26.

[44] M. Gutiérrez, F.J. Palomo and A. Romero, A Berger-Green type inequality for compact Lorentzian manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **354** (2002), 4505–4523.

[45] M. Gutiérrez, F.J. Palomo and A. Romero, Lorentzian Manifolds with no null conjugate points, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **137** (2004), 363–375.

[46] S. Haesen, Some characterizations of totally umbilical surfaces in three-dimensional warped product spaces, *Mon. Math.* **152** (2007), 303–314.

[47] S. Haesen, Spacelike surfaces in static multiply warped product spacetimes, *Acta Physica Polonica B*, **39** (2008), 569–585.

[48] S. Haesen, B. Jahanara, M. Petrovic-Torgasev and L. Verstraelen, On the Weyl curvature of Deszcz, *Publ. Math-Debrecen*, **74** (2009), 417–431.

[49] S. Haesen and M. Ortega, Boost invariant marginally trapped surfaces in Minkowski 4-space, *Class. Quant. Grav.*, **24** (2007), 5441–5452.

[50] S. Haesen and M. Ortega, Screw invariant marginally trapped surfaces in Minkowski 4-space, *J. Math. Anal. Appl.*, **355** (2009), 639–648;

[51] S. Haesen and M. Ortega, Marginally trapped surfaces in Minkowski 4-space invariant under a rotation subgroup of the Lorentz group, *Gen. Rel. Grav.*, **41** (2009), 1819–1834.

[52] S. Haesen, F.J. Palomo and A. Romero, Null congruence spacetimes constructed from 3-dimensional Robertson-Walker spaces, *Diff. Geom. Appl.*, **27** (2009), 240–249.

[53] S. Haesen, F.J. Palomo and A. Romero, A new method to construct 4-dimensional spacetimes with a spacelike circle action, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, **6** (2009), 667–681.

[54] S. Haesen, S. Verpoort and L. Verstraelen, The mean curvature of the second fundamental form, *Houston J. Math.*, **34** (2008), 703–720.

[55] S. Haesen and L. Verstraelen, Pseudosymmetry collineations, *J. Math. Phys.*, **48** (2007), 10250(1–11).

[56] M.A. Javaloyes and P. Piccione, Spectral flow and iteration of closed semi-Riemannian geodesics, *Cal. Var. Partial Diff. Equat.*, **33** (2008), 439–462.

[57] M.A. Javaloyes and P. Piccione, Comparison results for conjugate and focal points in semi-Riemannian geometry via Maslov index, *Pacific J. Math.*, **243** (2009), 43–56.

[58] M.A. Javaloyes, P. Piccione and L. Biliotti, Genericity of nondegenerate critical points and Morse geodesisc functional, *Indiana Univ. Math. J.*, **58** (2009), 1797–1830.

[59] M.A. Javaloyes, P. Piccione and L.L. de Lima, Iteration of closed geodesics in stationary Lorentzian manifolds, *Math. Z.*, **260** (2008), 277–303.

[60] M.A. Javaloyes and M. Sánchez, A note on the existence of standard splittings for conformally stationary spacetimes, *Class. Quant. Grav.*, **25** (2008), 16800(1–7).

[61] H.J. Jin, J.D. Pérez, Y.J. Suh and H.Y. Yang, Real hypersurfaces in complex two plane Grassmannians with $\mathcal{D}^{\perp}$-parallel Lie derivatives, *Houston J. Math.*, **36** (2010), 711–726.

[62] U-H.Ki, J.D. Pérez, F.G. Santos and Y.J. Suh, Real hypersurfaces in complex space forms with ξ-parallel Ricci tensor and structure Jacobi operator, *J. Korean Math. Soc.*, **44** (2007), 307–326.

[63] H.J. Lee, J.D. Pérez, F.G. Santos and Y.J. Suh, On the structure Jacobi operator of a real hypersurface in complex projective space, *Monatsh. Math.*, **158** (2009), 187–194.

[64] S.M. Lyu, J.D. Pérez and Y.J. Suh, Real hypersurfaces in complex space forms concerned with the local symmetry, *Czech. Math. J.*, **57**(132) (2007), 885–905.

[65] F. Martin, M. Umehara and K. Yamada, Complete bounded holomorphic curves immersed in $\mathbb{C}^3$ with arbitrary genus, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **137** (2009), 3437–3450.

[66] F. Martin, M. Umehara and K. Yamada, Complete bounded null curves immersed in $\mathbb{C}^3$ and $\mathrm{Sl}(2,\mathbb{C})$, *Calc. Var. Partial Diff. Equations*, **36** (2009), 119–139.

[67] O. Müller and M. Sánchez, Lorentzian manifolds isometrically embeddable in $\mathbb{L}^N$ *Trans Amer. Math. Soc.*, en prensa.

[68] F.J. Palomo, The fibre bundle of degenerate tangent planes of a Lorentzian manifold and the smoothness of the null sectional curvature, *Diff. Geom. App.*, **25** (2007), 667–673.

[69] F.J. Palomo and A. Romero, Conformally Stationary Lorentzian tori with no conjugate points are flat, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **137** (2009), 2403–2406;

[70] F.J. Palomo and A. Romero, Compact conformally stationary Lorentzian manifolds with no causal conjugate points, *Ann. Glob. Anal. Geom.*, **38** (2010), 135–144.

[71] J.D. Pérez and F.G. Santos, Real hypersurfaces in complex projective space with recurrent structure Jacobi operator, *Diff. Geom. Appl.*, **26** (2008), 218–223.

[72] J.D. Pérez and F.G. Santos, Real hypersurfaces in complex projective space whose structure Jacobi operator satisfies $\mathcal{L}_\xi R_\xi = \nabla_\xi R_\xi$, *Rocky Mount. J. Math.*, **39** (2009), 1293–1301.

[73] J.D. Pérez, F.G. Santos, Y.J. Suh, Real hypersurfaces in nonflat complex space forms with commuting structure Jacobi operator, *Houston J. Math.*, **33** (2007), 1005-1009;

[74] J.D. Pérez, F.G. Santos and Y.J. Suh, Real hypersurfaces in complex projective space whose structure Jacobi operator is of Codazzi type, *Canad. Math. Bull.*, **50** (2007), 347–355.

[75] J.D. Pérez and Y.J. Suh, The Ricci tensor of real hypersurfaces in complex two plane Grassmannians, *J. Korean Math. Soc.*, **44** (2007), 211–235.

[76] J.D. Pérez and Y.J. Suh, Two conditions on the structure Jacobi operator for real hypersurfaces in complex projective space, *Canad. Math. Bull.*, **50** (2007), 347–355.

[77] A. Romero and R.M. Rubio, On the mean curvature of spacelike surfaces in certain three-dimensional Robertson-Walker spacetimes and Calabi-Bernstein's type problems, *Ann. Glob. Anal. Geom.*, **37** (2010), 21–31.

[78] A. Romero and R.M. Rubio, New proof of the Calabi-Bernstein theorem, *Geom. Dedicata*, **147** (2010), 173–176.

[79] A. Romero and R.M. Rubio, A nonlinear inequality arising in geometry and Calabi-Bernstein type problems, *J. Inequalities Appl.*, (2010), Art. ID 950380, 10 pp.

[80] R.K. Sachs and H. Wu, General relativity and cosmology, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **83** (1977), 1101–1164.

[81] M. Sánchez, On causality and closed geodesics of compact Lorentzian manifolds and static spacetimes, *Differential Geom. Appl.*, **24** (2006), 21–32.

[82] M. Sánchez, Causal boundaries and holography on wave type spacetimes, *Nonlinear Anal. TMA*, **71** (2009), E1744–E1764.

[83] M. Sánchez and J.M.M. Senovilla, A note on the uniqueness of global static decompositions, *Class. Quant. Grav.*, **24** (2007), 6121–6126.

[84] J.M.M. Senovilla, Symmetric hyperbolic systems for a large class of fields in arbitrary dimension, *Gen. Rel. Gravitation*, **39** (2007), 361–386.

[85] J.M.M. Senovilla, Second-order symmetric Lorentzian manifolds: I Characterizations and general results, *Class. Quant. Grav.*, **25** (2008), 245011(1–25).

Florentino García Santos: In Memoriam
Universidad de Granada, 2011, págs. 171–176

Superficies mínimas

Antonio Ros

Puede obtenerse fácilmente una colección de superficies mínimas (superficies de curvatura media nula) mediante curvas cerradas de alambre y películas de jabón. Gracias a estos sencillos experimentos podemos familiarizarnos con sus propiedades básicas, proponer algunas conjeturas de esta teoría e incluso, en casos muy especiales, sugerir cuales podrían ser las demostraciones matemáticas.

En esta nota presentamos algunas propiedades globales de la teoría clásica de superficies mínimas. Consideramos superficies sin autointersecciones y propias en el espacio Euclídeo usual $\mathbb{R}^3$. El hecho de ser propia significa que no tiene frontera ni puntos límite o en otras palabras que interseca cada bola cerrada del espacio en una pieza compacta.

Algunos ejemplos son conocidos desde hace tiempo y muchos otros han sido construidos recientemente tanto por geómetras como por investigadores en áreas aplicadas como Ciencia de Superficies o Cristalografía. Sería muy útil disponer de listas completas de superficies mínimas siguiendo diferentes criterios naturales. Por ejemplo nos gustaría poder clasificar las superficies mínimas en función de su topología, la geometría de sus finales, es decir el comportamiento de la superficie en el infinito, y sus simetrías. Por el momento estamos aún lejos de un resultado completo aunque se conocen bastantes resultados parciales en esta dirección.

1. Superficies mínimas de género cero

Una superficie tiene género cero si es homeomorfa a un abierto del plano. En la Figura 7 podemos ver los ejemplos básicos de la teoría clásica: el Helicoide y la Catenoide. Aunque estas superficies pueden parecer simples, algunos de los principales progresos de los últimos años en este campo están relacionados con estos ejemplos.

El Helicoide es una superficie reglada y tiene la topología de un plano. Es el tornillo de Arquímedes. Lejos de su eje vertical, el Helicoide es prácticamente plano. Además tiene un gran número de simetrías y en particular es invariante por una traslación vertical. Esta propiedad es común a los ejemplos clásicos y a muchos de los modernos. De hecho es bastante complicado construir superficies mínimas globales sin autointersecciones y sin simetrías, ver Traizet [12]. También tenemos a

Antonio Ros, *aros@ugr.es*
Dep. Geometría y Topología, Facultad de Ciencias, Universidad de Granada, 18071-Granada

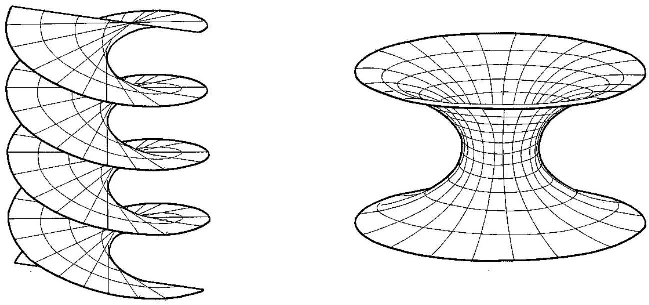

Figura 7: El Helicoide y la Catenoide

la derecha a la Catenoide, la única superficie mínima de revolución. Estas superficies se pueden caracterizar únicamente en términos de su topología.

Teorema 1.1. *El plano, el Helicoide y la Catenoide son las únicas superficies mínimas propias y sin autointersecciones con topología finita y homeomorfas a un abierto del plano.*

En el caso simplemente conexo este resultado ha sido demostrado por Meeks y Rosenberg [5]. Una de las herramientas utilizadas por estos autores es el estudio de laminaciones y límites de superficies mínimas obtenidos por Colding y Minicozzi [1]. Si la topología es no trivial, el resultado se sigue de los trabajos de Collin [2] y López y Ros [6], véase también [7] .

Los *Ejemplos de Riemann*, Figura 8, son otras superficies que juegan un papel importante en la teoría. Vienen caracterizados (junto con el Helicoide y la Catenoide) por la propiedad de que sus secciones horizontales son rectas o circunferencias. Mediante dicha propiedad Riemann descubrió estas superficies y encontró una parametrización de las mismas en términos de funciones elípticas. Los ejemplos tienen infinitos finales y cada uno de estos finales es asintótico a un plano horizontal. Forman una familia uniparamétrica (puede tomarse como parámetro la inclinación de la superficie) que conecta la Catenoide y el Helicoide. El grupo de simetrías de estas superficies es infinito y contiene traslaciones (no verticales). El siguiente resultado completa la clasificación de las superficies mínimas de género cero en el espacio.

Teorema 1.2. *Si una superficie mínima propia sin autointersecciones tiene topología infinita y es homeomorfa a un abierto del plano, entonces es uno de los Ejemplos de Riemann.*

El teorema ha sido obtenido recientemente por Meeks, Pérez y Ros [4]. En su demostración utilizan, entre otras, técnicas que conectan las superficies mínimas con la

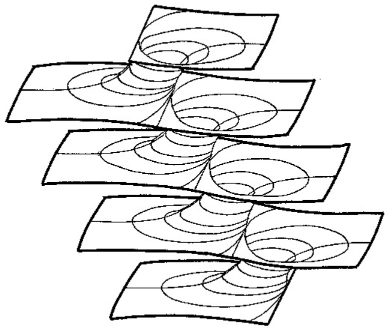

Figura 8: El ejemplo de Riemann

ecuación de KdV (*Korteweg - de Vries*, una de las más estudiadas entre las ecuaciones integrables).

2. Superficies triplemente periódicas

Hay varios ejemplos clásicos que presentan una simetría más complicada que la de los ejemplos anteriores. Entre ellos tenemos las superficies mínimas triplemente periódicas P y D construidas por Hermann Schwarz, en el siglo XIX. La superficie P puede ser vista como una superficie sin autointersecciones en $\mathbb{R}^3$ obtenida repitiendo hasta el infinito (empaquetamiento del cubo) la pieza básica a la izquierda de la Figura 9 o como una superficie cerrada en el 3-toro cúbico simple (sc, el toro generado por las aristas del cubo) obtenido mediante la identificación de las caras opuestas del cubo. La superficie obtenida de esta forma es topológicamente una esfera con tres asas (género 3).

La superficie D presenta una situación parecida. En la Figura 9 (derecha) tenemos una pieza fundamental de la superficie en un dodecaedro rómbico (otro poliedro cuyo empaquetamiento rellena el espacio). Identificando las caras opuestas del dodecaedro se obtiene una superficie con la misma topología que la superficie P, pero ahora en el toro fcc generado por las diagonales de las caras del cubo.

Tanto P como la superficie D son las superficies mínimas más simples y naturales en los 3-toros cúbicos sc (simple cubic) y fcc (face centered cubic) y sucede que el toro cúbico restante bcc (body centered cubic), generado por las diagonales del cubo, contiene también un ejemplo fundamental con simetría cúbica y con la misma topología: El Giroide G descubierto por Alan Schoen en el 1970, Figura 10. Al comparar las imágenes de las superficies P y G, vemos que la segunda es una versión

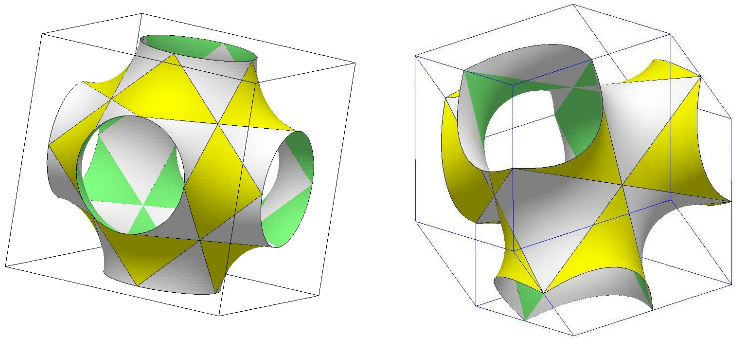

Figura 9: Superficies triplemente periódicas P y D de Schwarz.

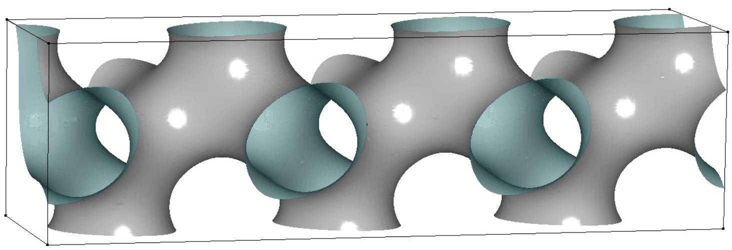

Figura 10: El Giroide de Alan Schoen.

distorsionada de la primera en la que los ejes de rotación de orden 4 de la primera se transforman en ejes helicoidales de la segunda. Estos tres ejemplos y muchos otros juegan un papel importante en Geometría y en Cristalografía Matemática.

El *problema isoperimétrico periódico* estudia las superficies triplemente periódicas de área mínima (en una celda fundamental) entre todas las que dividen el espacio en dos regiones con fracción de volumen prefijada. Aunque disponemos de bastantes resultados acerca de esta cuestión, véase por ejemplo [3, 9, 8], éste sigue siendo esencialmente un problema abierto. Marty Ross [11] demostró la siguiente propiedad fundamental de las superficies anteriores.

Teorema 2.1. *Las superficies P y D de Schwarz y la superficie G de Schoen son mínimos locales del problema isoperimétrico periódico.*

En este contexto, la topología de los mínimos locales está completamente determinada, Ros [10].

Teorema 2.2. *Un mínimo local triplemente periódico del problema isoperimétrico en un* 3*-toro tiene género* 3*.*

Agradecimientos

Financiado parcialmente por el proyecto MCyT-FEDER MTM2007-61775 del Ministerio de Ciencia y Tecnología y el proyecto de excelencia de la Junta de Andalucía P06-FQM-01642.

Referencias

[1] H. T. Colding y W. P. II Minicozzi, Shapes of embedded minimal surfaces, *Proc. National Academy of Sciences,* **103** (2006), 11106–11111.

[2] P. Collin, Topologie et courbure des surfaces minimales proprement plongées de $\mathbb{R}^3$, *Ann. of Math.* **145** (1997), 1–31.

[3] L. Hauswirth, J. Pérez, P. Romon y A. Ros, The periodic isoperimetric problem, *Trans. Amer. Math. Soc.* **356** (2003), 2025–2047.

[4] W. H. III. Meeks, J. Pérez y A. Ros, Properly embedded minimal planar domains, pendiente de publicación.

[5] W. H. III. Meeks y H. Rosenberg, The uniqueness of the Helicoid, *Ann. of Math.* **161** (2005), 723–754.

[6] F. J. López y A. Ros, On embedded complete minimal surfaces of genus zero, *J. Differential Geom.* **33** (1991), 293–300.

[7] J. Pérez y A. Ros, Some uniqueness and nonexistence theorems for embedded minimal surfaces, *Math. Ann.* **295** (1993), 513–525.

[8] A. Ros, Isoperimetric inequalities in crystallography, *J. Amer. Math. Soc.* **17** (2004), 373–388.

[9] —, The isoperimetric Problem,, en: *Global theory of minimal surfaces*, Clay Math. Proc. 2, Amer. Math. Soc. 2005, 175–209.

[10] —, Stable periodic constant mean curvature surfaces and mesoscopic phase separation, *Interfaces Free Bound.* **9** (2007), 355–365.

[11] M. Ross, Schwarz' P and D surfaces are stable, *Differential Geom. Appl.* **2** (1992), 179–195.

[12] M. Traizet, An embedded minimal surface with no symmetries, *J. Differential Geom.* **60** (2002), 103–153.

Florentino García Santos: In Memoriam
Universidad de Granada, 2011, págs. 177–184

Algunas técnicas de estimación en áreas pequeñas para variables cualitativas

M. Mar Rueda • Agustín Santiago • Antonio Arcos

Resumen En este trabajo describiremos un ejemplo de cómo producir estimadores de una proporción poblacional en áreas pequeñas, si nuestra variable de interés es un atributo y también lo es, la información auxiliar disponible. Se introducen diferentes estimadores basados en el diseño usando la técnica de razón y se construyen los correspondientes estimadores combinados y los estimadores de sus varianzas.

1. Introducción a la estimación en áreas pequeñas

Las grandes encuestas realizadas por los organismos oficiales de estadística están diseñadas para proporcionar estimaciones de un número pequeño de parámetros (medias, totales, proporciones) con una precisión alta, sin tener en cuenta más que el diseño muestral. Aunque se pueden obtener estimaciones directas (sin información auxiliar) de las variables a nivel nacional, regional o provincial, generalmente no es posible lograr estimaciones directas para ciertas agrupaciones geográficas de interés o áreas pequeñas (por ejemplo comarcas, municipios, localidades, etc.) ya que el tamaño de las muestras correspondientes a esas áreas no es suficiente para que aquellas sean representativas, es decir, el tamaño adoptado para la muestra nacional es insuficiente para realizar estimaciones para los dominios o áreas pequeñas. Del mismo modo, el nivel de clasificación utilizado para el diseño de las muestras nacionales no es adecuado para las áreas pequeñas. Sin embargo, los directores de programas y los encargados de la formulación de políticas han manifestado interés en la estimación de indicadores para las áreas pequeñas a fin de definir objetivos, asignar recursos y supervisar el funcionamiento de los programas sociales, económicos, de salud, educacionales, etc. La realización de encuestas nacionales que también sean representativas de las áreas geográficas de nivel inferior es posible, pero puede no ser viable desde el punto de vista de los costes.

M. Mar Rueda, *mrueda@ugr.es*
Dep. Estadística e I. O., Facultad de Ciencias, Universidad de Granada, 18071-Granada
Agustín Santiago, *santmag@correo.ugr.es*
U. A. de Matemáticas, UAG. Carlos E. Adame No. 54, Acapulco, Gro., México. CP. 39650
Antonio Arcos, *arcos@ugr.es*
Dep. Estadística e I. O., Facultad de Farmacia, Universidad de Granada, 18071-Granada

Un ejemplo lo tenemos en la encuesta PISA, de la cual recientemente ha tenido lugar la publicación de los resultados del último informe correspondiente al año 2009. Esta encuesta ha sido concebida como un recurso para ofrecer información abundante y detallada, que permita a los países miembros adoptar las decisiones y políticas públicas necesarias para mejorar los niveles educativos y pueda servir de base para la investigación y análisis destinados a mejores políticas en el campo de la educación. El tamaño de la muestra de esta encuesta es moderado (25887 alumnos para España) y los estimadores dados permiten realizar inferencias válidas del país en su totalidad y de algunas comunidades autónomas que han ampliado la muestra (como Andalucía con 1416 alumnos encuestados), pero no permiten inferencias fiables por regiones, provincias y áreas pequeñas de interés. Los procedimientos para la asignación de pesos en PISA reflejan los estándares de las buenas prácticas de las encuestas, si bien no usan la información auxiliar disponible en la fase de estimación, debido, fundamentalmente, a la enorme variedad de tal información auxiliar según país, región, comunidad, comarca, provincia, etc. Sin embargo, usando técnicas indirectas avanzadas, es posible obtener estimadores complejos que usen la información auxiliar disponible de centros, familias, localidades y alumnos, mediante la formulación de modelos adecuados en el área considerada.

Toda vez que la demanda de estudios en áreas pequeñas ha crecido notablemente en la última década, especialistas en el área han propuesto muchas aproximaciones para producir estimadores de áreas pequeñas, entre las que se incluyen los métodos demográficos, los estimadores sintéticos, compuestos y los basados en el modelo. Un magnífico compendio de ellos se puede ver en el texto de Rao (2003).

La mayoría de métodos propuestos hasta ahora para estimar en pequeñas áreas, funcionan muy bien para variables continuas, incluyendo los métodos de estimación basados en modelos, que hacen uso de información auxiliar disponible a partir de censos, registros administrativos o encuestas anteriores. La inserción de esta información auxiliar disponible en la formulación de los estimadores mediante distintas técnicas (como regresión, calibración, regresión no paramétrica o verosimilitud empírica), normalmente produce un aumento considerable en la precisión de los estimadores de la media o el total poblacional.

Conceptualmente, es difícil justificar el uso de estimadores de regresión para estimar proporciones, aunque existe un importante esfuerzo en ese sentido, por lo que se ha recurrido a otros métodos como Empirical Best Prediction (EBP) o Hierarchical Bayes (HB) para hacer inferencia, usando modelos de regresión logística o modelos lineales generalizados (ver por ejemplo, Chandra et al. 2009, Farrell, MacGibbon y Tomberlin 1997, Malec et al. 1997, Rao 2003, González-Manteiga et al. 2007, Farrel 2000, Larsen, M.D. 2003, Liu 2009, Xie, D. et al. 2009, ...).

En todos estos trabajos se asume que la información auxiliar está disponible para cada persona en el área. Este supuesto no es muy común en la práctica, siendo más plausible que los datos asociados a las variables auxiliares se obtengan de censos y ficheros administrativos que proporcionan diferentes parámetros de estas variables auxiliares. Así, es común disponer de diversas medidas de posición (medias, medianas, momentos, etc.) pero es difícil tener acceso a los datos originales de cada individuo, fundamentalmente por motivos de privacidad. Por ejemplo en la encuesta PISA se puede obtener de los censos cuál es la proporción de estudiantes cuyos padres tienen estudios superiores, pero no se tiene esta información disponible para cada alumno.

En el presente trabajo vamos a considerar la incorporación de la información auxiliar, proveniente de una variable binaria, en el problema de la estimación puntual de una proporción poblacional en áreas pequeñas. La estimación de la proporción poblacional de individuos que presentan una característica, es muy común en una gran variedad de situaciones prácticas (por ejemplo ensayos clínicos, experimentos farmaceúticos, estadística médica, investigación de mercados, etc.). Consideraremos la situación en la que sólo se tiene disponible la proporción de individuos que presentan una o varias características relacionadas con la variable objeto de estudio. Entonces determinaremos cómo esa información disponible a nivel de toda la población o a nivel del área puede incorporase en la estimación de la proporción de la variable objeto de estudio en el área de interés.

2. Estimadores tipo razón basados en el diseño

Consideremos una población finita $U = \{1, \cdots, N\}$ que incluye N elementos distintos, particionada en D subconjuntos (áreas pequeñas) U_d con tamaños N_d, $d = 1, \cdots, D$, donde $N = \sum_{d=1}^{D} N_d$. Denotemos por A un atributo de interés cuyos valores serán $A_1, \cdots, A_N$, donde $A_i = 1$ si la i-ésima unidad posee el atributo A y $A_i = 0$ en caso contrario. Denotemos por B un atributo auxiliar asociado con A con valores $B_1, \cdots, B_N$, donde $B_i = 1$ si la i-ésima unidad posee el atributo B y $B_i = 0$ en otro caso. Seleccionemos una muestra $s \subset U$, de tamaño $n < N$, de la población U de acuerdo a un diseño de muestreo general m. Denominemos por $s_d = s \cap U_d$ el conjunto de unidades muestrales extraídas del área d, con tamaños de muestra $n_d,\ d = 1, \cdots, D$, donde $n = \sum_{d=1}^{D} n_d$. El objetivo es estimar la proporción poblacional de individuos que poseen el atributo A, dentro del dominio d, es decir, $P_{A_d} = N_d^{-1} \sum_{i=1}^{N_d} A_{di}$, para lo cual definimos el atributo A de la siguiente manera:

$$A_{di} = \begin{cases} A_i, & \text{si} \quad i \in U_d; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{59}$$

y

$$X_{d_i} = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad i \in U_d; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{60}$$

Aplicando la estimación de Horvitz-Thompson, un estimador que no usa información auxiliar viene dado por:

$$\widehat{P}_{A_d} = \frac{\sum_s A_{di}/\pi_i}{\sum_s X_{di}/\pi_i} = \frac{\sum_{s_d} A_i/\pi_i}{\sum_{s_d} 1/\pi_i} = \frac{\sum_{s_d} A_i/\pi_i}{\widehat{N}_d}, \tag{61}$$

siendo π_i la probabilidad de inclusión de primer orden de la unidad i bajo el diseño considerado m. Este estimador se dice directo dado que no utiliza la información proporcionada por la variable auxiliar.

A continuación vamos a proponer una serie de estimadores de razón de la proporción de individuos P_{A_d} que poseen el atributo A, a nivel de dominio utilizando la información disponible del atributo B.

Caso 1. P_B conocida

Asumiendo conocida la proporción poblacional de individuos que poseen el atributo B (P_B), se puede estimar P_A usando un estimador de razón de la forma

$$\widehat{P}^{(1)}_{rA_d} = \widehat{R}_d P_B, \tag{62}$$

donde $\widehat{P}_{B_d} = \widehat{N}_d^{-1} \sum_{i \in s_d} B_i$ y $\widehat{R}_d = \widehat{P}_{A_d}/\widehat{P}_{B_d}$ es el estimador de la razón a nivel de dominio, $R_d = P_{A_d}/P_{B_d}$.

La varianza asintótica de $\widehat{P}^{(1)}_{rA_d}$ será,

$$AV(\widehat{P}^{(1)}_{rA_d}) = V(\widehat{P}_{A_d}) + R_d^2 V(\widehat{P}_{B_d}) - 2R_d cov(\widehat{P}_{A_d}, \widehat{P}_{B_d}). \tag{63}$$

Para un diseño $MAS(N, n)$ es fácil deducir un estimador insesgado de la varianza dada por (63); dicho estimador será

$$\widehat{AV}(\widehat{P}^{(1)}_{rA_d}) = \frac{1-f}{n_d}\frac{n}{n-1}\left[\widehat{P}_{A_d}\widehat{Q}_{A_d} + \widehat{R}_d^2 \widehat{P}_{B_d}\widehat{Q}_{B_d} - 2\widehat{R}_d\widehat{\phi}_d\sqrt{\widehat{P}_{A_d}\widehat{Q}_{A_d}\widehat{P}_{B_d}\widehat{Q}_{B_d}}\right] \tag{64}$$

donde $\widehat{Q}_{A_d} = 1 - \widehat{P}_{A_d}$, $\widehat{Q}_{B_d} = 1 - \widehat{P}_{B_d}$, $f = n/N$ y $\widehat{\phi}_d$, es el coeficiente V de Cramer basado en una tabla de doble entrada, formada por los datos de los atributos A y B en la muestra s_d.

Caso 2. P_{B_d} conocida

Ahora asumamos conocido $P_B^{U_d} = P_{B_d}$, que es la proporción del atributo B a nivel de dominio. Bajo este supuesto el estimador de razón para P_{A_d} estará dado por

$$\widehat{P}^{(2)}_{rA_d} = \widehat{R}_d P_{B_d} = \frac{\widehat{P}_{A_d}}{\widehat{P}_{B_d}} P_{B_d}. \tag{65}$$

Se deduce fácilmente que éste estimador tiene la misma varianza asintótica que el estimador anterior.

Caso 3. Estimador sintético

Si se asume información auxiliar a nivel de dominio (es decir, si se conoce P_{B_d}) podemos utilizar el estimador de razón $\widehat{R} = \frac{\widehat{P}_A}{\widehat{P}_B}$, válido para la población, para estimar la proporción P_{A_d} correspondiente al dominio d. El estimador sintético resultante es

$$\widehat{P}_{rA_d}^{(3)} = \widehat{R} P_{B_d} = \frac{\widehat{P}_A}{\widehat{P}_B} P_{B_d} \tag{66}$$

donde $R = \frac{P_A}{P_B}$, $\widehat{P}_A = n^{-1} \sum_{i=1}^n A_i$, $\widehat{P}_B = n^{-1} \sum_{i=1}^n B_i$ y $P_{B_d} = N_d^{-1} \sum_{i \in U_d} B_i$. Para un diseño $MAS(N, n)$, un estimador de la varianza será

$$\widehat{AV}(\widehat{P}_{rA_d}^{(3)}) = \frac{1-f}{n-1} \left[\widehat{P}_A \widehat{Q}_A + \widehat{R}^2 \widehat{P}_B \widehat{Q}_B - 2\widehat{R}\widehat{\phi} \sqrt{\widehat{P}_A \widehat{Q}_A \widehat{P}_B \widehat{Q}_B} \right], \tag{67}$$

donde $Q_A = 1 - P_A$, $Q_B = 1 - P_B$ y $\widehat{\phi}$, es el coeficiente V de Cramer basado en una tabla de doble entrada, formada por los datos de los atributos A y B en la muestra s.

3. Estimadores compuestos

Una manera natural de balancear el sesgo potencial de un estimador sintético (es insesgado de la proporción P_A que normalmente será distinta de la proporción P_{A_d} en el dominio) frente a la inestabilidad de un estimador directo o de razón basado sólo en los datos de la muestra en el dominio (que son insesgados pero cuyo tamaño es pequeño) se realiza tomando un promedio ponderado de los estimadores anteriores.

Así a partir de los resultados previos, proponemos cinco estimadores compuestos que se derivan de los estimadores $\widehat{P}_{A_d}$, $\widehat{P}_{rA_d}^{(1)}$, $\widehat{P}_{rA_d}^{(2)}$ y $\widehat{P}_{rA_d}^{(3)}$.

Estos estimadores son

$$\widehat{P}_{A_d}^{(c_1)} = \alpha \widehat{P}_{A_d} + (1-\alpha) \widehat{P}_{rA_d}^{(1)}, \tag{68}$$

$$\widehat{P}_{A_d}^{(c_2)} = \alpha \widehat{P}_{A_d} + (1-\alpha) \widehat{P}_{rA_d}^{(2)}, \tag{69}$$

$$\widehat{P}_{A_d}^{(c_3)} = \alpha \widehat{P}_{A_d} + (1-\alpha) \widehat{P}_{rA_d}^{(3)}, \tag{70}$$

$$\widehat{p}_{A_d}^{(c_4)} = \alpha \widehat{P}_{rA_d}^{(1)} + (1-\alpha) \widehat{P}_{rA_d}^{(3)} \tag{71}$$

y

$$\widehat{P}_{A_d}^{(c_5)} = \alpha \widehat{P}_{rA_d}^{(2)} + (1-\alpha) \widehat{P}_{rA_d}^{(3)}, \tag{72}$$

donde $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

El valor para α se obtiene minimizando el error cuadrático medio dentro de la clase de estimadores de $\widehat{P}_{A_d}^{(c_i)}$, $i = 1, \cdots, 5$. Los valores óptimos de α dependen de valores desconocidos pero, al sustituirlos por sus estimaciones podemos definir los estimadores para $\widehat{P}_{A_d}^{(c_i opt)}$, en (68), (69) y (70), como

$$\widehat{P}_{A_d}^{(c_i)} = \widehat{\alpha}_{opt}\widehat{P}_{A_d} + (1 - \widehat{\alpha}_{opt})\widehat{P}_{rA_d}^{(i)}, \tag{73}$$

donde

$$\widehat{\alpha}_{opt} = \frac{\widehat{V}(\widehat{P}_{rA_d}^{(i)}) - \widehat{cov}(\widehat{P}_{A_d}, \widehat{P}_{rA_d}^{(i)})}{\widehat{V}(\widehat{P}_{A_d}) + \widehat{V}(\widehat{P}_{rA_d}^{(i)}) - 2\widehat{cov}(\widehat{P}_{A_d}, \widehat{P}_{rA_d}^{(i)})}, \tag{74}$$

para $i = 1, 2, 3$, y

$$\widehat{P}_{A_d}^{(c_{4,5})} = \widehat{\alpha}_{opt}\widehat{P}_{rA_d}^{(i)} + (1 - \widehat{\alpha}_{opt})\widehat{P}_{rA_d}^{(3)}, \tag{75}$$

donde

$$\widehat{\alpha}_{opt} = \frac{\widehat{V}(\widehat{P}_{rA_d}^{(3)}) - \widehat{cov}(\widehat{P}_{rA_d}^{(i)}, \widehat{P}_{rA_d}^{(3)})}{\widehat{V}(\widehat{P}_{rA_d}^{(i)}) + \widehat{V}(\widehat{P}_{rA_d}^{(3)}) - 2\widehat{cov}(\widehat{P}_{rA_d}^{(i)}, \widehat{P}_{rA_d}^{(3)})}, \tag{76}$$

para $i = 1, 2$, en (71) y (72).

Un estimador de la varianza del estimador óptimo puede escribirse como

$$\widehat{AV}(\widehat{P}_{A_d}^{(c_i)}) = \frac{\widehat{V}(\widehat{t}_1)(\widehat{t}_2) - \widehat{cov}^2(\widehat{t}_1, \widehat{t}_2)}{\widehat{V}(\widehat{t}_1) + \widehat{V}(\widehat{t}_2) - 2\widehat{cov}(\widehat{t}_1, \widehat{t}_2)}, \tag{77}$$

para cada par de estimadores $\widehat{t}_1$ y $\widehat{t}_2$ de la proporción, y denotando por $\widehat{V}$ y $\widehat{cov}$ estimadores de las varianzas y covarianzas respectivamente.

Este procedimiento da un peso para los coeficientes ($\widehat{\alpha}_{opt}$) distinto para cada dominio. Otra aproximación para la estimación compuesta es usar un peso común, y entonces minimizar el error cuadrático medio total (la suma de los ECM para cada estimador en todos los dominios) con respecto a α (Purcell y Kish, 1979). Esto garantizará una buena estimación para el grupo de áreas pequeñas en conjunto pero no necesariamente para cada una de las áreas pequeñas en el grupo. El estimador compuesto resultante es similar al conocido estimador de James-Stein (Efron y Morris, 1973, 1975, Fay y Herriot, 1979, Brandwein y Strawderman, 1990, Rao, 2003) que ha atraído mucho la atención en la literatura estadística en estimación en áreas pequeñas.

Agradecimientos

Esta investigación está financiada parcialmente por el Ministerio de Educación y Ciencia, proyecto MTM2009-10055.

Referencias

[1] A.C. Brandwein, W.E. Strawderman (1990). Stein-Estimation: The Spherically Symmetric Case. *Statistical Science* **5**, 356-369.

[2] H. Chandra,R. Chambers, N. Salvati. Small Area Estimation of Proportions in Business Surveys, *Centre for Statistical and Survey Methodology*, University of Wollongong, Working Paper 15-09, 2009, 22p.

[3] B. Efron, C.E. Morris. Stein's Estimation Rule and Its Competitors – An Empirical Bayes Approach, *Journal of the American Statistical Association* **68** (1973), 117-130.

[4] B. Efron, C.E. Morris. Data Analysis Using Stein's Estimate and Its Generalizations, *Journal of the American Statistical Association* **70** (1975), 311-319.

[5] P.J. Farrel, B. MacGibbon, T.J. Tomberlin. Empirical Bayes estimators of small area proportions in multistage designs. *Statistica Sinica* **7** (1997), 1065-1083.

[6] P. J. Farrel. Bayesian inference for small area proportions, *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics* **62** (2000), 402-416.

[7] R. E. Fay, R.A. Herriot. Estimation of Income from Small Places: An Application of James-Stein Procedures to Census Data, *Journal of the American Statistical Association* **74** (1979), 269-277.

[8] W. González-Manteiga, M.J. Lombardía, I. Molina, D. Morales, L. Santamaría. Estimation of the mean squared error of predictors of small area linear parameters under a logistic mixed model. *Computational Statistics & Data Analysis* **51** (2007), 2720-2733.

[9] M.D. Larsen. Estimation of small-area proportions using covariates and survey data. *Journal of Statistical Planning and Inference* **112** (2003), 89-98.

[10] B. Liu. Adaptive Hierarchical Bayes Estimation of Small-Area Proportions. *Social Statistics*. Section-JSM 2009.

[11] D. Malec, J. Sedransk, C.L. Moriarty, F.B. Leclere. Small Area Inference for Binary Variables in National Health Interview Survey, *Journal of the American Statistical Association* **92** (1997), 815-826.

[12] N.J. Purcell, L. Kish, Estimates for Small Domain, *Biométrics* **35** (1979), 365-384.

[13] J.N.K. Rao, *Small Area Estimation*, John Wiley and Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2003.

[14] D. Xie, T.E. Raghunathan, J.M. Lepkowski. Estimation of the proportion of overweight individuals in small areas - a robust extension of the Fay-Herriot model. *Statistics in Medicine* 26 (2007), 2699-2715.

Florentino García Santos: In Memoriam
Universidad de Granada, 2011, págs. 185–189

Una nueva demostración de la clasificación de las superficies estables con curvatura media constante de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{S}^3$

Francisco Urbano

Resumen En [2] y [3], Barbosa, Do Carmo y Eschenburg probaron que cualquier hipersuperficie compacta con curvatura media constante y estable de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{S}^n$ es totalmente umbilical. En este articulo, se da una nueva demostración de este resultado cuando $n = 3$. La ventaja de esta nueva prueba es que no solo permite redemostrar también la clasificación de las superficies con curvatura media constante estables de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ obtenida por Souam en [6], sino que puede extenderse a otras variedades de dimensión tres como $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ y las esferas de Berger (ver [7] y [8]).

1. Introducción

El estudio de las superficies de curvatura media constante del espacio Euclídeo $\mathbb{R}^3$ es uno de los problemas más interesantes en geometría diferencial clásica. Los primeros ejemplos conocidos eran las de revolución, esto es esferas redondas, cilindros circulares rectos y las superficies de Delaunay (ver [4]). En 1951, Hopf demostró un primer resuldo de estructura en dicha familia, probando que las únicas superficies compactas de género cero con curvatura media constante de $\mathbb{R}^3$ son las esferas totalmente umbilicales (ver [5]). En 1956, Alexandrov probó otro resultado global en dicha familia de una trascendencia importantísima no sólo por el resultado en sí mismo sino por el método de su demostración. Él probó que las esferas totalmente umbilicales de $\mathbb{R}^3$ son las únicas superficies compactas de curvatura media constante que no tienen autointersecciones (ver [1]). Pero las superficies de curvatura media constante también son soluciones a un problema variacional que describimos a continuación.

Las superficies compactas de curvatura media constante de una variedad Riemanniana $(M^3, \langle,\rangle)$, aparecen como puntos críticos del funcional área para variaciones que preservan el volumen. Si $\Phi : \Sigma \to (M^3, \langle,\rangle)$ es una immersión de una superficie compacta Σ y N un normal unitario a la superficie, las variaciones que preservan el volumen son aquellas en las que el campo variacional fN cumple $\int_\Sigma f\, dA = 0$.

Una immersión $\Phi : \Sigma \to (M^3, \langle,\rangle)$ de curvatura media constante H se dice

Francisco Urbano, *furbano@ugr.es*
Dep. Geometría y Topología, Facultad de Ciencias, Universidad de Granada, 18071-Granada

estable si es un mínimo local del área para variaciones que preservan el volumen, esto es, la segunda derivada del área es no negativa para cualquier variación que preserve el volumen. Si fN es el correspondiente campo de la variación, la estabilidad se traduce en que la forma cuadrática $Q : C^\infty(\Sigma) \to \mathbb{R}$ definida por

$$Q(f) = -\int_\Sigma \{f\Delta f + (|\sigma|^2 + Ric(N))f^2\}\, dA$$

es semidefinida positiva para variaciones que preserven el volumen, esto es

$$\Phi \text{ es estable} \Leftrightarrow Q(f) \geqslant 0, \quad \forall f \in C^\infty(\Sigma), \quad \int_\Sigma f\, dA = 0. \tag{78}$$

En la expresiones anteriores, Δ es el Laplaciano de la métrica inducida en Σ, σ es la segunda forma fundamental de Φ y Ric es la curvatura de Ricci de $(M^3, \langle,\rangle)$.

Si consideramos como variedad ambiente $\mathbb{R}^3$ y la esfera de radio r como superficie (que tiene curvatura media constante $1/r$), entonces la condición de estabilidad significa que

$$-\int_{\mathbb{S}^2(r)} f\Delta f\, dA = \int_{\mathbb{S}^2(r)} |\nabla f|^2\, dA \geqslant (2/r^2)\int_{\mathbb{S}^2(r)} f^2\, dA,$$

para cualquier f con $\int f\, dA = 0$. Pero el primer valor propio no nulo de Δ en $\mathbb{S}^2(r)$ es $2/r^2$. Por tanto la anterior desigualdad se cumple siempre, y así $\mathbb{S}^2(r)$ es una superficie estable de curvatura media constante en $\mathbb{R}^3$.

De forma similar, si consideramos como variedad ambiente la esfera $\mathbb{S}^3$ de radio uno y como superficie compacta Σ una esfera umbilical de radio r, $0 < r \leqslant 1$, entonces Σ tiene curvatura media constante $H = \sqrt{1-r^2}/r$ y $|\sigma|^2 = 2(1-r^2)/r^2$. La condición de estabilidad significa que

$$-\int_{\mathbb{S}^2(r)} f\Delta f\, dA = \int_{\mathbb{S}^2(r)} |\nabla f|^2\, dA \geqslant (2/r^2)\int_{\mathbb{S}^2(r)} f^2\, dA,$$

para cualquier f con $\int f\, dA = 0$. Pero Σ es una esfera de radio r con su métrica canónica, y así el primer valor propio no nulo de Δ es $2/r^2$. Por tanto la anterior desigualdad se cumple siempre, y Σ es una superficie estable de curvatura media constante en $\mathbb{S}^3$.

En el siguiente resultado se probará una tercera caracterización global de las esferas totalmente umbilicales, viendo que son las únicas superficies *estables* de curvatura media constante de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{S}^3$.

Teorema 1.1. *Sea $\Phi : \Sigma \to (M^3, \langle,\rangle)$ una inmersión con curvatura media constante de una superficie compacta y orientable Σ, donde $M^3 = \mathbb{R}^3$ o $\mathbb{S}^3$. Si Φ es estable, entonces $\Phi(\Sigma)$ es una esfera totalmente umbilical de $\mathbb{R}^3$ o $\mathbb{S}^3$.*

Observación. Cuando la curvatura media $H \neq 0$, la hipótesis de orientabilidad no es necesaria, pues la superficie ha de ser necesariamente orientable, pero en el caso $H = 0$, hay ejemplos de superficies compactas y no orientables en $\mathbb{S}^3$.

2. Demostración del teorema

Sea g el género de la superficie Σ. Consideremos el espacio vectorial de las 1-formas armónicas sobre Σ: $\mathcal{H}(\Sigma)$, cuya dimensión es $2g$. Usando la identificación entre 1-formas y campos sobre Σ, diremos que un campo X en Σ es armónico si su 1-forma asociada es armónica. Como una 1-forma es armónica si es cerrada y cocerrada, es fácil comprobar que un campo X sobre Σ es armónico si cumple las condiciones

$$\operatorname{div}(X) = 0, \quad (\nabla X)(V, W) := \langle \nabla_V X, W \rangle \text{ es simétrico,}$$

siendo div el operador divergencia y ∇ la conexión en Σ.

Es interesante observar que si J es la estructura compleja de la superficie de Riemann Σ y X es un campo armónico, entonces $X^* = JX$ es también un campo armónico, que obviamente cumple $\langle X, X^* \rangle = 0$ y $|X^*|^2 = |X|^2$.

Otra propiedad interesante de los campos armónicos, que se usará mas adelante, es que si

$$\Delta^\Sigma = \nabla_{e_i} \nabla_{e_i} - \nabla_{\nabla_{e_i} e_i}, \quad \{e_1, e_2\} \text{ una referencia ortonormal en } \Sigma,$$

es el Laplaciano rudo de Σ, entonces todo campo armónico X cumple

$$\Delta^\Sigma X = KX, \quad \text{K = curvatura de Gauss de } \Sigma. \tag{79}$$

A partir de ahora consideramos $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$, y así nuestra superficie estará contenida o en $\mathbb{R}^3$ o en $\mathbb{R}^4$. En cualquier caso, dado un campo armónico X sobre Σ, se tiene que para cada $a \in \mathbb{R}^3$ (o cada $a \in \mathbb{R}^4$)

$$\operatorname{div}(\langle \Phi, a \rangle X) = \langle X, a \rangle,$$

y usando el teorema de la divergencia, se tiene que

$$\int_\Sigma \langle X, a \rangle \, dA = 0, \quad \forall\, X \text{ campo armónico, } \forall a \in \mathbb{R}^3(\mathbb{R}^4).$$

Usando estas funciones de media cero como funciones test en la definición de la estabilidad dada en (1), obtenemos que

$$Q(\langle X, a \rangle) \geqslant 0, \quad \forall\, X \text{ campo armónico, } \forall a \in \mathbb{R}^3(\mathbb{R}^4).$$

Ahora se calculará $\Delta\langle X, a\rangle$. Usando que $\mathbb{S}^3$ es una hipersuperficie totalmente umbilical de $\mathbb{R}^4$, y que X es armónico, se tiene que el gradiente de las funciones $\langle X, a\rangle$ viene dado por

$$\langle\nabla\langle X, a\rangle, V\rangle = \langle\nabla_V X, a\rangle + \langle\sigma(X, V), a\rangle - \epsilon\langle X, V\rangle\langle\Phi, a\rangle,$$

donde V es cualquier campo tangente a Σ y ϵ es cero o uno dependiendo de que $M^3 = \mathbb{R}^3$ o $M^3 = \mathbb{S}^3$. Ahora derivando de nuevo y teniendo en cuenta la definición de campo armónico y (2), obtenemos que

$$\Delta\langle X, a\rangle = K\langle X, a\rangle + 2\langle\sigma(e_i, \nabla_{e_i} X), a\rangle - \langle A^2 X, a\rangle - \epsilon\langle X, a\rangle,$$

donde $\{e_1, e_2\}$ es una referencia ortonormal sobre Σ y A es el endomorfismo de Weingarten asociado a N.

Si $\{a_1, \ldots, a_n\}$, con $n = 3$ o 4 dependiendo de que $M^3 = \mathbb{R}^3$ o $\mathbb{S}^3$, es una base de $\mathbb{R}^3$ o $\mathbb{R}^4$ se tiene que

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{n} Q(\langle X, a_i\rangle) = \int_\Sigma \{-(\epsilon + K + |\sigma|^2)|X|^2 + \langle A^2 X, X\rangle\}\, dA.$$

Ahora, usando el campo armónico $X^* = JX$ y teniendo en cuenta la ecuación de Gauss de Σ, $K = \epsilon + 2H^2 - |\sigma|^2/2$, se obtiene que

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \sum_{i=1}^{n} \{Q(\langle X, a_i\rangle) + Q(\langle X^*, a_i\rangle)\} = -\int_\Sigma (2\epsilon + 2K + |\sigma|^2)|X|^2\, dA \\ &= -4(\epsilon + H^2)\int_\Sigma |X|^2\, dA. \end{aligned}$$

En la anterior desigualdad, $\epsilon + H^2 > 0$ ya que $\mathbb{R}^3$ no admite superficies mínimas (H=0) compactas. Así la anterior desigualdad nos dice que cualquier campo armónico en Σ ha de ser el trivial, o lo que es lo mismo, el género de la superficie es $g = 0$. El clásico resultado de Hopf ([5]) nos dice que dicha superficie ha de ser una esfera totalmente umbilical, y la demostración concluye.

Agradecimientos

Financiado por el proyecto de investigación del Ministerio de Ciencia y Tecnología MTM2007-61775 y el grupo de excelencia de la Junta de Andalucía P06-FQM-01642.

Referencias

[1] A.D. Alexandrov, Uniqueness theorems for surfaces in the large I, *Vestnik Leningrad. Univ.* **11** (1956), 5–17.

[2] J.L. Barbosa, M. do Carmo, Stability of hypersurfaces with constant mean curvature, *Math. Z.* **185** (1984), 339–353.

[3] J.L. Barbosa, M. do Carmo, J. Eschenburg, Stability of hypersurfaces of constant mean curvature in Riemannian manifolds, *Math. Z.* **197** (1988), 123–138.

[4] C. Delaunay, Sur la surface de revolution dont la courbure moyenne est constante, *J. Math. Pure et App.* **16** (1841), 309–321.

[5] H. Hopf, *Differential geometry in the large*, volumen 1000 de *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[6] R. Souam, On stable constant mean curvature surfaces in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, *Trans. Amer. Math. Soc.* **362** (2010), 2845–2857.

[7] F. Torralbo, F. Urbano, Compact stable constant mean curvature surfaces in the Berger spheres, prepublicación, `arXiv:0906.1439v1[math.DG]`.

[8] F. Torralbo, *Superficies de curvatura media paralela en* $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ *y* $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ *y superficies de curvatura media constante en espacios homogéneos*, Tesis doctoral, Universidad de Granada, 2010.

Florentino García Santos: In Memoriam
Universidad de Granada, 2011, págs. 191–200

Extensiones de la Soft Computing con "Rough Sets"

José L. Verdegay

Resumen A partir de la definición de Soft Computing, de la descripción del contexto teórico y aplicado que abarca, y con la base de una amplia y extensa bibliografía, se presenta una prometedora extensión teórica, como es la que proporciona la hibridación de los algoritmos metaheurísticos con soporte, más que en el concepto de "fuzzy set", en los denominados "rough sets".

1. Introducción

Dos años después de que en 1965 el Profesor Lotfi A. Zadeh, doctor "honoris causa" por la Universidad de Granada, diera la definición de conjunto fuzzy [1], en España la teoría de conjuntos se explicaba a partir del siguiente postulado:

"Los conceptos de unidad y conjunto son conceptos primarios al espíritu humano: no se pueden descomponer en otros más sencillos. No se pueden, por tanto, definir." (C. Marcos y J. Martinez: Matemáticas, Quinto Curso. Ediciones S.M., 1967).

Desde entonces, sin embargo, las aplicaciones y desarrollos teoricos y prácticos basados en el intuitivo concepto de conjunto fuzzy han evolucionado de tal modo, que es prácticamente imposible calcular el volumen de negocio que generan en todo el mundo, pudiendo encontrar Sistemas Inteligentes cuyo funcionamiento está directamente basado en dicha noción, y que van desde los más cotidianos controladores, hasta los más sofisticados modelos para la identificación de sistemas. Pero, si bien la traza histórica de los conjuntos y los sistemas fuzzy es bien conocida [2], no pasa lo mismo con la de la Soft Computing, a pesar de su actual popularidad.

Tiene por tanto perfecto sentido prestarle atención a establecer el origen y la definición de la Soft Computing, puesto que hay mucha controversia sobre su ámbito, y diferentes formas de entenderla tanto en extensión como en comprensión. De ese simple ejercicio esperamos obtener como resultado poder mostrar todo el potencial aplicativo que tiene la Soft Computing, para conocer cómo enfocar correctamente con dicha metodología la resolución de distintos problemas de diferente naturaleza, que permitan el posterior diseño, producción y desarrollo de nuevos Sistemas Inteligentes Sostenibles, es decir, que por sus características no estén abocados a quedarse en el dominio de lo teórico, sino más bien todo lo contrario: que por estar equipados con

José L. Verdegay, *verdegay@ugr.es*
Dep. Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial, Grupo de Modelos de Decisión y Optimización (MODO), Facultad de Ciencias, Universidad de Granada, 18071-Granada

suficientes argumentos y recursos, estén destinados a ser transferidos sin riesgos al sector productivo [3].

Por consiguiente, en la siguiente sección, plantearemos el contexto en el que se desarrolla la Soft Computing, y a partir de ahí, en la tercera sección, nos concentraremos en una de las posibles vías de extensión de la Soft Computing, como es la de los Rough Sets.

2. El contexto de la Soft Computing

Hasta que en 1994 L.A. Zadeh [4] dio la primera definición de Soft Computing, la referencia a los conceptos que actualmente ésta maneja solía hacerse de forma atómica, es decir, se hablaba de manera aislada de cada uno de ellos con indicación del empleo de metodologías fuzzy. Aunque la idea de establecer el área de SC se remonta a 1990 [5], como se ha dicho fue en [4] donde Zadeh propuso la definición de Soft Computing, estableciéndola en los siguientes términos:

"Básicamente, Soft Computing no es un cuerpo homogéneo de conceptos y técnicas. Más bien es una mezcla de distintos métodos que, de una forma u otra, cooperan desde sus fundamentos. En este sentido, el principal objetivo de la Soft Computing es aprovechar la tolerancia que conllevan la imprecisión y la incertidumbre, para conseguir manejabilidad, robustez y soluciones de bajo costo. Los principales ingredientes de la Soft Computing son la Lógica Fuzzy, la Neuro-computación y el Razonamiento Probabilístico, incluyendo este último a los Algoritmos Genéticos, las Redes de Creencia, los Sistemas Caóticos y algunas partes de la Teoría de Aprendizaje. En esa asociación de Lógica Fuzzy, Neurocomputación y Razonamiento Probabilístico, la Lógica Fuzzy se ocupa principalmente de la imprecisión y el Razonamiento Aproximado; la Neurocomputación del aprendizaje, y el Razonamiento Probabilístico de la incertidumbre y la propagación de las creencias."

Así, hay que entender la Soft Computing como un conjunto de metodologías y técnicas que, actuando en conjunto, no de forma aislada, facilitan nuevas formas de abordar escenarios prácticos reales. El valor añadido del uso de la Lógica Fuzzy está en que permite encontrar soluciones a los problemas de manera más eficiente (cuando no más económica) que los métodos clásicos, y además de forma muy similar a como las personas lo harían en contextos que son imprecisos, inciertos y difíciles de categorizar. Sin embargo, como es evidente, esa definición de Soft Computing está en función de las componentes que la integran, lo que tiene el inconveniente de que en el dinámico contexto científico-tecnológico en el que nos movemos, el paso del tiempo pueda justificar la incorporación de alguna nueva o la eliminación de alguna de las originales. Por eso ha habido cierta controversia en los últimos años orientada a dar una definición más robusta de Soft Computing, si bien parece que finalmente se ha suavizado [6].

Consiguientemente, el punto de vista que aquí consideramos, y que adoptamos en lo que sigue, implica otra forma de definir Soft Computing, considerándola como antítesis de la “Hard Computing”, de manera que la entendemos como un conjunto de técnicas y métodos que permiten tratar las situaciones prácticas reales de la misma forma que suelen hacerlo los seres humanos, es decir, en base a hibridaciones, sentido común, consideración de analogías y aproximaciones. En concreto el concepto de Soft Computing que consideramos, como no podía ser de otra forma, es paralelo al de L.A. Zadeh, pero actualizado:

“SC es el resultado de la colaboración, la asociación y la complementariedad de las diferentes metodologías que la integran, y que, de una forma u otra, cooperan desde sus fundamentos. Su principal objetivo es aprovechar la tolerancia inherente de la imprecisión y la incertidumbre, para conseguir manejabilidad, robustez y soluciones de bajo costo. Sus principales componentes son la Lógica Fuzzy, las Redes Neuronales Artificiales, el Razonamiento Probabilístico y las Metaheurísticas. En las diferentes asociaciones que se pueden producir a partir de esas cuatro componentes, la Lógica Fuzzy es un ingrediente esencial y se ocupa principalmente de la imprecisión y el Razonamiento Aproximado; las Redes Neuronales Artificiales del aprendizaje, el Razonamiento Probabilístico de la incertidumbre y la propagación de las creencias, y las Metaheurísticas de los métodos de búsqueda y optimización. La alta dimensión de los problemas que se consideran recomienda a su vez el uso de técnicas de Minería de Datos.”

El papel que puede jugar la Minería de Datos (MD) es crítico, ya que uno de los efectos de la “Sociedad de la Información” es que el volumen y variedad de información que proviene de las distintas áreas del sector productivo, ha crecido espectacularmente en las últimas décadas. El conocimiento más valioso suele aparecer oculto entre los datos recogidos, en forma de patrones o reglas que relacionan entre sí otras partes más superficiales de la información. Esto ha producido que surja la necesidad de una nueva generación de herramientas y técnicas para soportar la extracción de conocimiento útil desde la información disponible. La disciplina que se encarga de la obtención de este conocimiento a partir de datos es el “Análisis Inteligente de Datos”, que se define como “el proceso no trivial de identificar patrones válidos, novedosos, potencialmente útiles y, en última instancia, comprensibles a partir de los datos” [13]. La fase de MD es la más característica del Análisis Inteligente de Datos (en adelante usaremos MD como sinónimo de Análisis Inteligente de Datos). El objetivo de la MD es producir nuevo conocimiento que pueda utilizar el usuario. Esto se realiza construyendo un modelo basado en los datos recopilados para este efecto. El modelo es una descripción de los patrones y relaciones entre los datos que pueden usarse para hacer predicciones en el área del sector productivo del que provienen los datos, para entender mejor esa área, mejorar su rendimiento o para explicar situaciones pasadas. Suelen distinguirse dos tipos de conocimiento: conocimiento a priori y conocimiento dinámico.

La hibridación de técnicas de Soft Computing con MD es un campo que está cobrando cada vez mayor relevancia. Distintos estudios han mostrado que estas hibridaciones producen metodologías muy adecuadas para resolver y modelar distintos problemas en campos muy diversos, obteniendo resultados buenos (excelentes a veces) y representando de manera muy adecuada la información y conocimiento de dichos problemas. Entre esos estudios nos encontramos con técnicas de MD a las que se les han integrado las de Soft Computing para aumentar su flexibilidad y robustez. Entre ellas destacan las propuestas en [7, 8, 9, 14, 15]. Y con técnicas de Soft Computing como, por ejemplo, las Metaheurísticas, a las que se les han integrado la MD para producir estrategias más robustas, y con mejor rendimiento. Entre estas últimas destacamos las propuestas en [10, 11, 12].Ahora bien, a partir de estas premisas ¿debemos seguir analizando y profundizando en los temas de investigación tradicionales, o sin abandonarlos del todo, convendría que ensancháramos la perspectiva para abordar la aplicabilidad de la Soft Computing en áreas aún poco exploradas, como pueden ser la Prospectiva Tecnológica, la Evaluación de la Calidad de los Servicios, la Logística, las Energías Renovables, la Biología de Sistemas o las posibles extensiones teóricas?. El camino parece claro, puesto que estudiar la aplicabilidad de la Soft Computing en esos entornos, desde el punto de vista de su sostenibilidad, es decir, considerando su ventaja competitiva de cara a conocer la posibilidad real de desarrollar nuevos Sistemas Inteligentes transferibles al sector productivo y comercial, y no sólo como pretexto para incrementar una producción científica de dudoso impacto, facilitará la labor investigadora a la comunidad científica interesada en el tema. Por cuestiones de espacio no podemos describir en su totalidad todas las perspectivas que se pueden tener, y por eso nos concentraremos en una de las vertientes: la extensión de Metaheuristicas por medio de los Rough Sets, porque presenta unas interesantes posibilidades de cara al logro de nuevos algoritmos.

3. Soft Computing y Rough Sets

En 1982, Z. Pawlak [16] definió los conjuntos aproximados (Rough Sets en lo que sigue) abriendo una nueva dirección en el desarrollo de teorías sobre la información incompleta. Desde entonces la Teoría de los Rough Sets (TRS) ha evolucionado hasta convertirse en una metodología para afrontar una amplia variedad de problemáticas, entre ellas la incertidumbre presente en la información. La filosofía de los Rough Sets supone que alguna información está asociada con cada objeto del universo de discurso y se adapta perfectamente a situaciones asociadas a análisis de datos.

Como se sabe, el punto de partida del análisis de datos basado en Rough Sets es el Sistema de Información [17]. Cuando la información se representa mediante una tabla donde cada fila representa un objeto y cada columna representa un rasgo, esa tabla se llama Sistema de Información. Más formalmente, es un par $S = (U, A)$, donde U es un conjunto finito no vacío de objetos llamado Universo, y A es un conjunto finito no vacío de atributos. Un Sistema de Decisión es cualquier Sistema de Información de la forma $DS = (U, A \cup \{d\})$, donde $d \notin A$ es el atributo de decisión. Empleando este Sistema de Información (o Sistema de Decisión) y una relación de inseparabilidad, se pueden establecer los conceptos básicos de la TRS, la aproximación inferior y superior de un concepto. La definición clásica de aproximación inferior y superior fue originalmente introducida con referencia a una relación de inseparabilidad, que es una relación de equivalencia.

Sea $DS = (U, A \cup \{d\})$ un Sistema de Decisión y $B \subseteq A$ y $X \subseteq U$. B define una relación de equivalencia y el subconjunto X es un concepto en el universo U. X se puede aproximar usando sólo la información contenida en B mediante la construcción de las aproximaciones B-inferior y B-superior, notadas por $B_*(X)$ y $B^*(X)$ respectivamente, y definidas por

$$B_*(X) = \{x \in U : [x]_B \subseteq X\} \tag{80}$$

$$B^*(X) = \{x \in U : [x]_B \cap X \neq \emptyset\} \tag{81}$$

donde $[x]_B$ nota el conjunto de objetos inseparables de x (clase de equivalencia) de acuerdo a la relación de inseparabilidad B. Los objetos en $B_*(X)$ son con certeza miembros de X, mientras los objetos en $B^*(X)$ son posiblemente miembros de X. A partir de estas aproximaciones se definen la región positiva ($POS(X) = B_*(X)$), la región negativa ($U - B^*(X)$) y la región limite ($B^*(X) - B_*(X)$) de un conjunto. Finalmente, a la tupla $(B_*(X), B^*(X))$ compuesta por la aproximación inferior y superior se le llama rough set. Por tanto un rough set se compone de dos conjuntos convencionales, uno que representa una version inferior del universo de discurso X, y otro representando una versión superior de dicho universo.

A partir de aquí se puede lograr la combinación de los Rough Sets con las metaheurísticas al menos de las formas siguientes:

- Cada componente (Rough Sets y metaheurísticas) soporta una parte del modelo computacional diseñado para resolver algún tipo de problema.
- Los Rough Sets se utilizan para mejorar el desempeño de la metaheurística.
- Las metaheurísticas se utilizan para implementar alguna de las componentes de la TSR.

En el primer caso, un problema clásico que ha sido abordado con esta hibridación ha sido el de la selección de rasgos. Dado un sistema de información (U, A) se desea seleccionar un subconjunto de rasgos B, ($B \subseteq A$), eliminando rasgos que sean irrelevantes en el sistema de información. El problema de la selección de rasgos es una de las tareas más importantes en el proceso de descubrimiento de conocimiento. El concepto de reducto de la TRS está directament ligado a este problema; un reducto es un conjunto mínimo de rasgos B que preserva la partición del universo. Los métodos de selección de rasgos incluyen dos componentes, una función de evaluación de los subconjuntos y un procedimiento para la generación de subconjuntos. Como el problema de la selección de rasgos es de alto costo computacional, dados N rasgos hay $2^N - 1$ subconjuntos posibles, usualmente el procedimiento de generación de subconjuntos se basa en un método de búsqueda heurístico.

Existen diferentes medidas para realizar la evaluación de subconjuntos, entre ellas está la medida de calidad de la clasificación. Construir un reducto no tiene un alto costo computacional, pero tratar de encontrar un reducto con la cantidad menor de rasgos posible si tiene un alto costo. De hecho, encontrar todos los reductos es un problema NP-duro. Entre los trabajos que muestran la combinación de los Rough Sets y las metaheurísticas, como los Algoritmos Genéticos, la Optimización basada en Partículas o la Optimización basada en Colonias de Hormigas para resolver el problema de la selección de rasgos (la construcción de reductos) están [18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25]; una amplia revisión sobre métodos de selección de rasgos híbridos que combinan las componentes de la Soft Computing se muestra en [26].

Otros ejemplos de combinación de los Rough Sets y las metaheurísticas para resolver problemas de aprendizaje automático son los siguientes. En [27] se presenta un sistema hibrido que integra Rough Sets y Algoritmos Geneticos para extraer reglas a partir de un sistema de información, técnicas basadas en Rough Sets extraen reglas que son ajustadas por un Algoritmo Genetico para lograr una mayor precisión. Por otro lado en [28] se presenta una metodología para integrar cuatro componentes de la Soft Computing (Redes Neuronales, Fuzzy Sets, Algoritmos Geneticos y Rough Sets) para diseñar una red basada en el conocimiento para la clasificación de patrones y la generación de reglas, los Algoritmos Geneticos permiten refinar los módulos basados en el conocimiento. También en [29], se propone un método de discretización de datos continuos basado en Algoritmos Geneticos en el que la evaluación de los individuos se realiza usando una medida de calidad basada en Rough Sets; otros ejemplos de hibridación de Rough Sets con búsqueda heurística para el problema de discretizar rasgos continuos se presentan en [30, 31].

En [32] se muestra la hibridación de los Rough Sets con Algoritmos Evolutivos multi-objetivo para resolver problemas de descomposición de señales. El objetivo de la optimización multi-objetivo es encontrar un conjunto de soluciones tal que ninguna otra solución del espacio de búsqueda es superior a ella cuando se consideran todos los objetivos (esto se conoce como conjunto Pareto optimal o conjunto de soluciones no dominadas). Los Rough Sets permiten realizar la reducción de la información basada en el concepto de reducto. Otro trabajo en el cual se combinan los Rough Sets con Algoritmos Evolutivos multi-objetivo es [33], en este caso para resolver problemas de agrupamiento en el ambiente de la web. En la segunda alternativa antes planteada, se trata de mejorar la eficiencia o eficacia de la meta heurística usando el enfoque de los Rough Sets. En el trabajo presentado en [34], se propone un método para resolver problemas de optimización multi-objetivo que combina la metaheurística denominada Evolución Diferencial [35], una de las más efectivas para resolver esta clase de problema, con búsqueda local para mejorar su desempeño; la búsqueda local se basa en Rough Sets, se calcula la aproximación del frente de Pareto y según el resultado obtenido este se modifica para mejorar su calidad antes de seguir la aplicación de Evolución Diferencial.

Otro aspecto donde la Teoría de Rough Sets puede ser efectiva para mejorar el desempeño de los métodos de búsqueda heurísticos es en el estudio de la diversificación que se logra en las metaheurísticas poblacionales. Es conocido que el control de la diversificación de una población permite una mayor exploración del espacio de búsqueda, y con ello existe más posibilidad de escapar de extremos locales. En este contexto, las posibilidades que ofrecen los Rough Sets de crear grupos de objetos similares y las medidas de la Teoría de Rough Sets pueden ser usadas para evaluar la diversidad de la población en cada etapa del proceso de búsqueda.

Por ultimo, las metaheurísticas se pueden usar para ayudar en la implementación de métodos basados en Rough Sets. En cierto sentido el cálculo de los reductos podría ser representativo de esta alternativa, ya que la relación de separabilidad puede entenderse como una relación de equivalencia. Usar una relación de equivalencia es muy restrictivo en muchos casos, ya que ligeras diferencias entre los valores pueden no ser significativas para provocar su separación en clases de equivalencias diferentes; por ejemplo, en un rasgo con dominio continuo dos valores cercanos pueden ser considerados como prácticamente iguales a los efectos de una inferencia. Una generalización del enfoque clásico se obtiene remplazando la relación de equivalencia por una relación binaria más débil; con lo que se logra que objetos no idénticos pero semejantes sean localizados en el mismo grupo. Algunas extensiones de la TRS se presentan en [36, 37, 38].

Mientras que construir una relación de equivalencia no es problemático, construir la relación de similaridad adecuada para un problema puede ser una tarea más compleja; por ejemplo, en [39] se muestra un método para construir la relación de similaridad a partir de un cubrimiento. Un ejemplo del empleo de una metaheurística para construir una relación de similaridad en la Teoría de Rough Sets extendida se presenta en [40], allí se propone un método que incluye la metaheurística de Optimización basada en Enjambres de Particulas, pero otras metaheurísticas, como los Algoritmos Geneticos podrian ser empleadas de forma similar. En ese trabajo se propone una nueva medida para el caso de sistemas de decisión con rasgos continuos, esa medida se utiliza como función heurística para evaluar las partículas, y mediante el proceso de búsqueda desarrollado por la Optimización basada en Enjambres de Particulas encontrar el conjunto de pesos W necesarios para construir la función de semejanza dada por la siguiente expresión:

$$F(x,y) = \sum_{i=1}^{n} w_i * \partial_i(x_i, y_i) \tag{82}$$

donde ∂_i nota la función de comparación para el rasgo i.

A su vez, (82) sirve para definir la relación de similaridad R entre objetos descritos mediante rasgos con dominio continuo por

$$xRy \text{ si y sólo si } F(x,y) \geqslant 1 \tag{83}$$

Es evidente que la hibridación de las Metaheurísticas con los Rough Sets, para complementarse y mejorarse mutuamente como componentes de la Soft Computing, es una de las temáticas donde más posibilidades quedan por estudiar.

Conclusión

Se han comentado diferentes áreas en las que se puede estudiar la aplicabilidad de la Soft Computing de cara a producir nuevas aplicaciones, así como posibles extensiones de la Soft Computing mediante los Rough Sets.

Epílogo

Desde finales de los 70 tuve el privilegio de tener como amigo a Florentino García Santos, a Floro. Pasamos la vida juntos... Nunca lo podré olvidar.

Referencias

[1] Zadeh, L.A., Fuzzy sets, *Information and control* **8** (1965), 338–353.

[2] Zimmermann, H.J., Fuzzy set theory, *Wiley Interdisciplinary Reviews* **2** (2010), 317–332.

[3] Espinosa, A., Walker, J., *A Complexity Approach to Sustainability*, Series on Complexity Science, Imperial College Press, 2010.

[4] Zadeh, L.A., Soft computing and fuzzy logic, *IEEE Software* **11:6** (1965), 48–56.

[5] Zadeh, L.A., Foreword, *Applied Soft Computing* **1** (2001), 1–2.

[6] Verdegay, J.L., Yager, R.R., Bonissone, P.P., On heuristics as a fundamental constituent of soft computing, *Fuzzy Sets and Systems* **159** (2008), 846–855.

[7] Alcalá-Fdez, J., R. Alcalá, M.J. Gacto, F. Herrera, Learning the membership function contexts for mining fuzzy association rules by using genetic algorithms, *Fuzzy Sets and Systems* **160** (2009), 905–921.

[8] Bonissone, P.P., Díaz, R.A., Cadenas, J.M., Garrido, M.C., Fundamentals for design and construction of a fuzzy random forest, *Studies in Fuzziness and Soft Computing* **249** (2010), 23–42.

[9] Bonissone, P.P., Cadenas, J.M., Garrido, M.C., Díaz-Valladares, R.A., A fuzzy random forest, *Int'l J. of Approximate Reasoning* **51:7** (2010), 729–747.

[10] Cadenas, J.M., Garrido, M.C., Muñoz, E., Impact of Fuzzy Logic in the Cooperation of Metaheuristics, en: *New Challenges in Applied Intelligence Technologies*, Studies in Computational Intelligence, 134, Springer Berlin / Heidelberg, 2008, 225–234.

[11] Cadenas, J.M., Verdegay, J.L., Towards a new strategy for solving fuzzy optimization problems, *Fuzzy Optimization and Decision Making* **8** (2009), 231–244.

[12] Cadenas, J.M., Garrido, M.C., Muñoz, E., Using machine learning in a cooperative hybrid parallel strategy of metaheuristics, *Information Sciences* **179** (2009), 3255–3267.

[13] Fayyad, U.M., Piatetsky-Shapiro, G., and Smyth, P., From data mining to knowledge discovery: an overview, en: *Advances In Knowledge Discovery And Data Mining*, The MIT Press, 1996, 1–34.

[14] Garrido, M.C., J.M. Cadenas, P.P. Bonissone: Soft Computing 14(11), 1165–1185, 2010.

[15] Martínez-Bejar, R., J.M. Cadenas, H. Shirazi, P. Compton: Experts Systems with Applications 36(2), 1940–1960, 2009.

[16] Pawlak, Z.: International Journal of Information & Computer Sciences 11, 341-356 (1982).

[17] Pawlak, Z.: European Journal of Operational Research 136, 181-189 (2002)

[18] Zhong, N. et al.: Journal of Intelligent Information Systems, 16, 199-214 (2001)

[19] Zhai, L.-Y., Khoo, L.-P., Fok, S.-C.: Computers & Industrial Engineering 43, 661–676 (2002)

[20] Jensen, R. y Sshen. Q.: Procs. of UK Workshop on Computational Intelligence,15-22 (2003)

[21] Bello, P.R. et al.: WSEAS Trans. on Information Science and Applications5, 2, 512-517 (2005).

[22] Jensen, J. y Shen, Q.: Fuzzy Sets and Systems 149(1): 5-20 (2005)

[23] Wang, X. et al.: Computer methods and programs in biomedicine 83, 147-156 (2006).

[24] Wang, X. et al.: Pattern Recognition Letters 28, 459-471 (2007)

[25] Bello, P.R. et al.: Lecture Notes on Computer Science, 348-355 (2008)

[26] Thangavel, K. y Pethalakshmi, A.: Applied Soft Computing 9 ,1–12 (2009)

[27] Hang, X., y Dai, H.: En: Grieser et al (Eds.) LNCS (LNAI), vol. 2843, 153–165 (2003).

[28] Mitra, S. et al.: Neurocomputing 36, 45–66 (2001)

[29] Li, Y., y Jiang, J.-P.: Procs of the American Control Conference, 25–27. IEEE Computer Soc. Press, Los Alamitos (2001)

[30] Chen, S. y Yuan, X.: Lectures Notes on Artificial Intelligence 5227, 300–307 (2008)

[31] Jun, Z. y Ying-Hua, Z.: The Journal of China Universities of Posts and Telecommunications 16(6): 113–120 (2009)

[32] Smolinski, T.G. et al.: Lectures Notes on Bioinformatics, vol 4146, 174–183 (2006)

[33] Ozyer, T. et al.: Lectures Notes on Artificial Intelligence 3066, 567–572 (2004)

[34] Santana, L.V. et al.: Computers & Operations Research 37, 470-480 (2009)

[35] Price KV, Storn RM, y Lampinen, JA.: Differential evolution: a practical approach to global optimization. Springer (2005)

[36] Greco, S. et al.: European Journal of Operational Research 129, 1-47 (2001)

[37] Slowinski, R. y Vanderpooten, D.: IEEE Trans. on Data and Knowledge Engineering 12 (2) 331-336 (2000).

[38] Yao, Y.Y: Lectures Notes on Artificial Intelligence 2639, 44–51 (2003)

[39] Bianucci, D.: Fundamenta Informaticae 77: 77–105 (2007)

[40] Filiberto, Y., Bello, R., Caballero, Y.: Procs. de ISDA 2010, Egipto, (2010)