Variable Compleja I

Examen del 4 de noviembre de 2016

Soluciones

1. Probar que la serie de funciones $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^{\,z} + n^{-z}}$ converge absolutamente en $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |\mathrm{Re}\, z| > 1\}$ y uniformemente en cada subconjunto compacto de Ω.

Solución

Para $z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$|n^z| = |e^{z\log n}| = e^{\mathrm{Re}\,(z\log n)} = e^{(\log n)\mathrm{Re}\,z} = n^{\mathrm{Re}\,z}$$

luego también $|n^{-z}| = n^{-\mathrm{Re}\,z}$, con lo que

$$|n^z + n^{-z}| \geq \Big|\, |n^z| - |n^{-z}| \,\Big| = \Big|\, n^{\mathrm{Re}\,z} - n^{-\mathrm{Re}\,z} \,\Big| = n^{|\mathrm{Re}\,z|} - n^{-|\mathrm{Re}\,z|} \geq n^{|\mathrm{Re}\,z|} - 1$$

donde se ha usado que la función $x \mapsto n^x$, de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, es creciente, ya que $n \geq 1$.

Sea ahora K compacto con $K \subset \Omega$ y sea $\rho = \min\big\{|\mathrm{Re}\,z| \,:\, z \in K\big\} > 1$. Para $z \in K$ y $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$ se tiene entonces:

$$|n^z + n^{-z}| \geq n^{|\mathrm{Re}\,z|} - 1 \geq n^\rho - 1 > 0\,, \quad \text{luego} \quad \left|\frac{1}{n^z + n^{-z}}\right| \leq \frac{1}{n^\rho - 1}$$

Por ser $\rho > 1$ la serie armónica $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^\rho}$ es convergente y es claro que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1/(n^\rho - 1)}{1/n^\rho} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^\rho}{n^\rho - 1} = 1$$

luego, por el criterio de comparación por paso al límite para series de términos positivos, la serie $\sum_{n\geq 2} \dfrac{1}{n^\rho - 1}$ también es convergente.

Así pues, el test de Weierstrass nos dice que la serie de funciones $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^{\,z} + n^{-z}}$ converge absoluta y uniformemente en K. Para tener la convergencia absoluta en cada punto $z \in \Omega$ basta aplicar lo anterior con $K = \{z\}$. ■

2. Probar que la función $f : D(0,1) \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) \;=\; \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{i-z}{i+z}\right) \qquad \forall\, z \in D(0,1)$$

es holomorfa en $D(0,1)$ y expresarla como suma de una serie de potencias centrada en el origen.

Solución

Tenemos $f = \operatorname{arc\,tg} \circ \varphi$ donde $\varphi(z) = \dfrac{i-z}{i+z}$ para todo $z \in D(0,1)$, que es una función holomorfa en $D(0,1)$ por ser una función racional.

Por otra parte, la función arco-tangente principal es holomorfa en el dominio $U = \mathbb{C} \setminus \{iy \,:\, y \in \mathbb{R}\,,\ |y| \geq 1\}$, con $\operatorname{arc\,tg}'(w) = \dfrac{1}{1+w^2}$ para todo $w \in U$.

Con el fin de usar la regla de la cadena, para $z \in D(0,1)$, comprobamos que $\varphi(z) \in U$. En efecto, si fuese $(i-z)/(i+z) = iy$ con $y \in \mathbb{R}$ se tendría $i-z = iy(i+z)$ de donde $i+y = (1+iy)z$. Como $|i+y| = |1+iy|$, deduciríamos que $|z| = 1$, lo cual es una contradicción. Por tanto, la regla de la cadena nos dice que f es holomorfa en $D(0,1)$ con

$$f'(z) \;=\; \operatorname{arc\,tg}'\big(\varphi(z)\big)\,\varphi'(z) \;=\; \frac{\varphi'(z)}{1+\varphi(z)^2} \qquad \forall\, z \in D(0,1)$$

Para $z \in D(0,1)$ se tiene

$$\varphi'(z) \;=\; \frac{-(i+z)-(i-z)}{(i+z)^2} \;=\; \frac{-2i}{(i+z)^2}$$

mientras que

$$1+\varphi(z)^2 \;=\; \frac{(i+z)^2+(i-z)^2}{(i+z)^2} \;=\; \frac{2z^2-2}{(i+z)^2}$$

Obtenemos por tanto:

$$f'(z) \;=\; \frac{-2i}{2z^2-2} \;=\; \frac{i}{1-z^2} \;=\; i\sum_{n=0}^{\infty} z^{2n} \quad \forall\, z \in D(0,1)$$

donde hemos usado la suma de la serie geométrica.

Definimos ahora $g : D(0,1) \to \mathbb{C}$ por

$$g(z) = i\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} \qquad \forall\, z \in D(0,1)$$

Vemos que g es suma de una serie de potencias con radio de convergencia 1, igual que su serie derivada. Por tanto, g es holomorfa en $D(0,1)$ y claramente verifica $g'(z) = f'(z)$ para todo $z \in D(0,1)$.

Puesto que $D(0,1)$ es un dominio, concluimos que $f - g$ es constante. Además, es claro que $g(0) = 0$ mientras que $f(0) = \operatorname{arc\,tg} 1 = \pi/4$. Tenemos por tanto

$$f(z) = \frac{\pi}{4} + g(z) = \frac{\pi}{4} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} \qquad \forall\, z \in D(0,1)$$

que es el desarrollo en serie pedido. ■

3. Estudiar la derivabilidad de las funciones $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definidas por

$$f(z) = \exp\left(\overline{z}\right) \quad \text{y} \quad g(z) = z \exp\left(\overline{z}\right) \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}$$

Solución

Como, para $x, y \in \mathbb{R}$, se tiene

$$f(x+iy) = e^{x-iy} = e^{x}(\cos y - i \operatorname{sen} y)$$

consideramos las funciones $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definidas, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, por

$$u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy) = e^{x} \cos y \quad \text{y} \quad v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy) = -e^{x} \operatorname{sen} y$$

Claramente u y v son diferenciables en $\mathbb{R}^2$ con

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u\,; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = v\,; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = v\,; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -u$$

Por tanto, para que se cumplan las ecuaciones de Cauchy-Riemann en un punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ se deberá tener

$$u(x,y) = -u(x,y) \quad \text{y} \quad v(x,y) = -v(x,y)\,, \quad \text{es decir,} \quad u(x,y) = v(x,y) = 0$$

Esto implicaría $\cos y = \operatorname{sen} y = 0$, que es imposible. Por tanto, las ecuaciones de Cauchy-Riemann no se verifican en ningún punto del plano, luego f no es derivable en ningún punto del plano.

La función g es claramente derivable en el origen con $g'(0) = 1$, ya que

$$\lim_{z \to 0} \frac{g(z) - g(0)}{z} = \lim_{z \to 0} e^{\overline{z}} = 1$$

Como $f(z) = g(z)\,/\,z$ para todo $z \in \mathbb{C}^*$, si g fuese derivable en un punto $z \in \mathbb{C}^*$, la restricción de f a $\mathbb{C}^*$ también lo sería y, por el carácter local del concepto de derivada, igual le ocurriría f, en contradicción con lo ya demostrado. En resumen, el origen es el único punto del plano en el que g es derivable. ■