Lección 8

Integrales de superficie

8.1. Área de una superficie

Sea W un recinto en el plano y $\Phi : W \to \mathbb{R}^3$ una parametrización de la superficie $S = \Phi(W)$, que escribimos en la forma

$$\Phi(u,v) = \big((x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big) \qquad \big((u,v) \in W\big) \tag{1}$$

En lo que sigue usaremos frecuentemente las derivadas parciales de la función Φ, esto es, las funciones Φ_u y Φ_v, de W en $\mathbb{R}^3$, definidas por

$$\Phi_u = \frac{\partial \Phi}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right) \quad \text{y} \quad \Phi_v = \frac{\partial \Phi}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right) \quad \text{en } W.$$

Puesto que Φ es de clase C^1 en W, sabemos que Φ_u y Φ_v son funciones continuas, por lo que también lo serán otras funciones construidas a partir de ellas, como la función $\Phi_u \times \Phi_v$, que viene dada por

$$\Phi_u \times \Phi_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial x/\partial u & \partial y/\partial u & \partial z/\partial u \\ \partial x/\partial v & \partial y/\partial v & \partial z/\partial v \end{vmatrix} = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\,\mathbf{i} + \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\,\mathbf{j} + \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,\mathbf{k} \tag{2}$$

En la lección anterior sólo hemos usado el valor de la función $\Phi_u \times \Phi_v$ en un punto concreto de W, a efectos de discutir la existencia de plano tangente y vector normal en el correspondiente punto de la superficie. La coincidencia de notación merece un comentario, pues para simplificar es costumbre denotar de la misma forma a la función $\Phi_u \times \Phi_v$ y a su valor en un punto genérico $(u,v) \in W$, valor que rigurosamente debería denotarse por $\Phi_u(u,v) \times \Phi_v(u,v)$. Este pequeño abuso de notación no debe causar confusión, en cada caso es fácil discernir si nos estamos refiriendo a la función o a su valor en un punto. Puesto que $\Phi_u \times \Phi_v$ toma valores en $\mathbb{R}^3$, tiene sentido considerar su norma, dada por la expresión

$$\|\Phi_u \times \Phi_v\| = \left[\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2\right]^{1/2} \tag{3}$$

que define una función continua en W con valores reales.

Pues bien, cuando la parametrización Φ es *simple*, la integral sobre el recinto W de esta última función nos da el área de la superficie S:

Si W es un recinto en el plano y $\Phi : W \to \mathbb{R}^3$ es una parametrización simple de la superficie $S = \Phi(W)$, el área de la superficie S viene dada por

$$\text{Área}(S) = \iint_W \|\Phi_u \times \Phi_v\| \, du \, dv$$

Demostrar la afirmación anterior está fuera de nuestro alcance, entre otras razones porque necesitaríamos definir rigurosamente el área de una superficie, lo que no es fácil. Nos limitamos a poner algunos ejemplos de cálculo de áreas. Empecemos con una superficie en forma explícita,

$$S = \{(x, y, h(x,y)) : (x,y) \in W\} \tag{4}$$

donde $h : W \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^1 en W. En este caso tenemos una parametrización simple de S dada por

$$\Phi(x,y) = (x, y, h(x,y)) \quad ((x,y) \in W) \tag{5}$$

Para las derivadas parciales de Φ tenemos

$$\Phi_x = \left(1, 0, \frac{\partial h}{\partial x}\right) ; \;\; \Phi_y = \left(0, 1, \frac{\partial h}{\partial y}\right) ; \;\; \Phi_x \times \Phi_y = \left(-\frac{\partial h}{\partial x}, -\frac{\partial h}{\partial y}, 1\right) \tag{6}$$

con lo que

$$\|\Phi_x \times \Phi_y\| = \left[\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2 + 1\right]^{1/2} \tag{7}$$

y concluimos que

$$\text{Área}(S) = \iint_W \|\Phi_x \times \Phi_y\| \, dx \, dy = \iint_W \left[(\partial h/\partial x)^2 + (\partial h/\partial y)^2 + 1\right]^{1/2} dx \, dy$$

Por ejemplo, si la función h es idénticamente nula, obtenemos una superficie S_0 que no es más que el propio recinto W, sólo que visto como subconjunto de $\mathbb{R}^3$, contenido en el plano de ecuación $z = 0$. Naturalmente el área de esta superficie no es otra que la del recinto:

$$\text{Área}(S_0) = \iint_W dx \, dy = \text{Área}(W).$$

Como ejemplo menos trivial, calculemos el área de una superficie S_1 ya manejada en la lección anterior, la parte del paraboloide $z = x^2 + y^2$ comprendida dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$. En este caso tenemos $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ y $h(x,y) = x^2 + y^2$ para $(x,y) \in W$, luego

$$\begin{aligned} \text{Área}(S_1) &= \iint_W \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \, dx \, dy = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 \rho \sqrt{1 + 4\rho^2} \, d\rho \, d\theta \\ &= 2\pi \int_0^1 \rho \sqrt{1 + 4\rho^2} \, d\rho = \frac{\pi}{6} \Big[\left(1 + 4\rho^2\right)^{3/2} \Big]_{\rho=0}^{\rho=1} = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1) \end{aligned}$$

donde hemos usado un cambio de variable a coordenadas polares.

Como último ejemplo calculamos el área de una esfera S_r de radio $r > 0$, para la que usamos la parametrización

$$\Phi(\theta,\varphi) = (r\cos\theta\cos\varphi,\, r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi,\, r\,\mathrm{sen}\,\varphi) \quad \big((\theta,\varphi)\in W\big) \tag{8}$$

definida en el rectángulo $W = [-\pi,\pi]\times[-\pi/2,\pi/2]$. Usando los cálculos de la lección anterior para un elipsoide, o repitiendo dichos cálculos en el caso particular de una esfera, tenemos

$$\Phi_\theta \times \Phi_\varphi = r^2\cos\varphi\,(\cos\theta\cos\varphi,\, \mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi,\, \mathrm{sen}\,\varphi) \tag{9}$$

de donde

$$\|\Phi_\theta \times \Phi_\varphi\| = r^2\cos\varphi \tag{10}$$

y deducimos un resultado bien conocido:

$$\text{Área}(S_r) = \iint_W r^2\cos\varphi\, d\varphi d\theta = r^2\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\varphi\, d\varphi d\theta = 4\pi r^2.$$

8.2. Integrales con respecto a una parametrización

Sea de nuevo W un recinto en el plano y $\Phi : W \to \mathbb{R}^3$ una parametrización de la superficie $S = \Phi(W)$. Si $f : S \to \mathbb{R}$ es una función continua, se define la **integral de superficie del campo escalar f con respecto a la parametrización Φ** mediante la igualdad

$$\iint_\Phi f\,ds = \iint_\Phi f(x,y,z)\,ds = \iint_W f\big(\Phi(u,v)\big)\,\|\Phi_u\times\Phi_v\|\,du\,dv$$

La existencia de la última integral está asegurada, puesto que el integrando es una función continua en el recinto W. De las dos notaciones para la integral de superficie que aparecen en la igualdad anterior, la primera es obviamente la más sencilla, la segunda tiene la ventaja de indicar directamente la definición del campo escalar que estamos considerando. Nótese que para la existencia de la integral sólo precisamos que el campo f esté definido y sea continuo sobre la superficie S, aunque habitualmente f tendrá propiedades de regularidad mucho mejores, siendo por ejemplo diferenciable en un abierto de $\mathbb{R}^3$ que contiene a la superficie S.

Para el cálculo práctico de la integral usamos las ecuaciones paramétricas de la superficie, más concretamente, escribimos la parametrización Φ como en (1). Usando entonces la expresión de la función $\|\Phi_u\times\Phi_v\|$ calculada en (3), la integral de superficie toma la forma:

$$\iint_W f\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big)\left[\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2\right]^{1/2} du\,dv$$

En particular, para una superficie en forma explícita, dada por la expresión (4) como la gráfica de una función h, la parametrización Φ viene dada por (5), y usando (7) tendremos

$$\iint_\Phi f(x,y,z)\,ds = \iint_W f\big(x,y,h(x,y)\big)\left[\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2+1\right]^{1/2} dx\,dy$$

Consideremos por ejemplo el campo escalar f definido en $\mathbb{R}^3$ por

$$f(x,y,z) = (x^2+y^2+1)^{1/2} \quad (x,y,z \in \mathbb{R})$$

y vamos a calcular su integral de superficie con respecto a la parametrización de una superficie helicoidal definida por

$$\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, \theta)$$

en el recinto $W = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant r \leqslant 1\,,\ -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi\}$. En este caso tenemos

$$\Phi_r = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0) \quad \text{y} \quad \Phi_\theta = (-r\operatorname{sen}\theta, r\cos\theta, 1)$$

de donde

$$\Phi_r \times \Phi_\theta = (\operatorname{sen}\theta, -\cos\theta, r) \quad \text{y} \quad \|\Phi_r \times \Phi_\theta\| = (1+r^2)^{1/2}$$

con lo que obtenemos:

$$\iint_\Phi f\,ds = \iint_W f\big(\Phi(r,\theta)\big)\,\|\Phi_r \times \Phi_\theta\|\,dr\,d\theta = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^1 (1+r^2)\,dr\,d\theta = \frac{8\pi}{3}$$

Pasemos ahora a las integrales de superficie de campos vectoriales. Sea otra vez W un recinto en el plano y $\Phi : W \to \mathbb{R}^3$ una parametrización de la superficie $S = \Phi(W)$. Si ahora $\mathbf{F} : S \to \mathbb{R}^3$ es una función continua, definimos la **integral de superficie del campo vectorial $\mathbf{F}$ con respecto a la parametrización** Φ mediante la igualdad:

$$\iint_\Phi \mathbf{F}\,.\,\mathbf{ds} = \iint_W \big\langle \mathbf{F}\big(\Phi(u,v)\big) \,\big|\, \Phi_u \times \Phi_v \big\rangle\,du\,dv$$

De nuevo la existencia de la última integral está asegurada por ser el integrando una función continua en W. Si escribimos como siempre la parametrización Φ en la forma (1), con lo que $\Phi_u \times \Phi_v$ toma la forma que aparece en (2), y consideramos las tres componentes del campo vectorial, es decir, $\mathbf{F} = (P,Q,R)$, la integral de superficie toma la forma

$$\begin{aligned}
\iint_\Phi \mathbf{F}\,.\,\mathbf{ds} = &\iint_W \Big[P\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big)\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\Big]\,du\,dv \\
&+ \iint_W \Big[Q\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big)\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\Big]\,du\,dv \\
&+ \iint_W \Big[R\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big)\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\Big]\,du\,dv
\end{aligned}$$

lo que justifica la notación clásica

$$\iint_\Phi P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy = \iint_\Phi Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

que se usa a menudo para representar la integral de superficie de un campo vectorial.

Para una superficie en forma explícita, usando (5) y (6) tenemos

$$\iint_\Phi \mathbf{F}\,.\,\mathbf{ds} = \iint_W \Big[-P\big(x,y,h(x,y)\big)\frac{\partial h}{\partial x} - Q\big(x,y,h(x,y)\big)\frac{\partial h}{\partial y} + R\big(x,y,h(x,y)\big)\Big]\,dx\,dy$$

Consideremos por ejemplo el campo vectorial definido por $\mathbf{F}(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ para cualesquiera $x,y,z \in \mathbb{R}$. Calculamos la integral de superficie

$$\iint_{\Phi} \mathbf{F}\,.\,\mathbf{ds} = \iint_{\Phi} x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy$$

donde Φ es la parametrización de la esfera de radio 1 centrada en el origen, definida por (8), con $r = 1$, sobre el recinto $W = [-\pi,\pi] \times [-\pi/2,\pi/2]$. Usando (9) tenemos fácilmente

$$\big\langle \mathbf{F}\big(\Phi(\theta,\varphi)\big) \,\big|\, \Phi_\theta \times \Phi_\varphi \big\rangle = \cos^2\theta\cos^3\varphi + \operatorname{sen}^2\theta\cos^3\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi\cos\varphi = \cos\varphi$$

con lo que obtenemos

$$\iint_{\Phi} \mathbf{F}\,.\,\mathbf{ds} = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi\, d\varphi\, d\theta = 4\pi$$

8.3. Independencia de la parametrización

Como ya se ha comentado, una misma superficie puede admitir diversas parametrizaciones y las integrales de superficie dependen esencialmente de la parametrización que se utiliza. Sin embargo, dada una parametrización concreta de una superficie, ciertos cambios de variable en el recinto, una simple traslación por ejemplo, deberían producir parametrizaciones equivalentes a la de partida, que deberían conducir al mismo valor de la integral de superficie para cualquier campo. Surge por tanto la pregunta de qué relación deben guardar dos parametrizaciones de una misma superficie para que podamos asegurar que las correspondientes integrales de superficie coinciden.

En primer lugar, es bastante obvio que debemos limitarnos a considerar parametrizaciones *simples*. Intuitivamente, si no imponemos esta restricción, podríamos usar parametrizaciones que "recorren varias veces" una superficie, conduciendo obviamente a distintos valores de las integrales de superficie. Si para dos parametrizaciones simples de una misma superficie intentamos probar que las integrales de superficie coinciden, aparece enseguida la otra condición a imponer, que no es tan intuitiva: las parametrizaciones deben ser *suaves*, en el sentido que vamos a explicar.

Si $W = D \cup \Gamma$ es un recinto en el plano, se dice que una parametrización $\Phi : W \to \mathbb{R}^3$ de la superficie $S = \Phi(W)$ es una **parametrización suave** cuando la función $\Phi_u \times \Phi_v$ no se anula en D. Naturalmente, la nomenclatura se justifica porque en tal caso sabemos que la superficie S es suave en cada punto $\mathbf{p} \in S$ que sea de la forma $\mathbf{p} = \Phi(u_0,v_0)$ con $(u_0,v_0) \in D$ y el valor en (u_0,v_0) de la función $\Phi_u \times \Phi_v$ es un vector normal a la superficie en el punto $\mathbf{p}$. Sin embargo, en general no podemos asegurar que la superficie sea suave en todos sus puntos, pues no tenemos información sobre los puntos de la forma $\Phi(u,v)$ con $(u,v) \in \Gamma$.

Por ejemplo, para la superficie en forma explícita dada por (4), la parametrización Φ que aparece en (5) es simple y suave. De hecho en este caso la función $\Phi_x \times \Phi_y$ no se anula en todo el recinto W y la superficie es suave en todos sus puntos. La parametrización local de una superficie en forma implícita siempre puede hacerse de forma que se obtengan parametrizaciones simples y suaves.

Como ejemplo más concreto, consideremos la parametrización de una esfera definida por la igualdad (8) en el rectángulo $W = \{(\theta, \varphi) : |\theta| \leqslant \pi, |\varphi| \leqslant \pi/2\}$. En vista de (10), la igualdad $\Phi_\theta \times \Phi_\varphi = 0$ implica $\cos\varphi = 0$, es decir, $|\varphi| = \pi/2$, con lo que el par (θ, φ) pertenece a la frontera del recinto W y no a su región interior D. Por tanto $\Phi_\theta \times \Phi_\varphi$ no se anula en D y Φ es una parametrización suave de la esfera, que también sabemos es una parametrización simple. De forma análoga se puede probar que cualquier elipsoide admite una parametrización simple y suave.

Pues bien, si sólo admitimos parametrizaciones simples y suaves, la integral de superficie de un campo escalar es independiente de la parametrización:

Sean $\Phi_1 : W_1 \to \mathbb{R}^3$ y $\Phi_2 : W_2 \to \mathbb{R}^3$ dos parametrizaciones simples y suaves de una misma superficie $S = \Phi_1(W_1) = \Phi_2(W_2)$. Entonces, para cualquier campo escalar continuo $f : S \to \mathbb{R}$ se verifica que

$$\iint_{\Phi_1} f\,ds = \iint_{\Phi_2} f\,ds$$

8.4. Integral de superficie de un campo escalar

Para la mayoría de las superficies, las que admiten parametrizaciones simples y suaves, el resultado recién comentado nos permite definir una integral de superficie de campos escalares que no depende de la parametrización concreta que usemos para calcularla:

Si una superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$ admite una parametrización simple y suave, para cada función continua $f : S \to \mathbb{R}$, la **integral de superficie del campo escalar f sobre la superficie** S se define mediante la igualdad

$$\iint_S f\,ds = \iint_\Phi f\,ds = \iint_W f\big(\Phi(u,v)\big)\,\|\Phi_u \times \Phi_v\|\,du\,dv$$

donde $\Phi : W \to \mathbb{R}^3$ es cualquier parametrización simple y suave de la superficie S.

Así pues, tiene sentido por ejemplo hablar de la integral de un campo escalar continuo sobre cualquier superficie en forma explícita, o sobre una esfera o elipsoide, no se produce ambigüedad alguna por el hecho de que no concretemos la parametrización que estamos considerando. Esta noción de integral de superficie, independiente de la parametrización, es la que tiene un significado intuitivo más claro y también la que admite una interpretación física, que pasamos a explicar.

Observemos que si el campo escalar f es constantemente igual a 1, la integral de superficie nos da precisamente el área de la superficie S o si se quiere, la masa de una lámina que tuviese la forma de la superficie y densidad superficial constantemente igual a 1. De manera más general, cuando el campo f no toma valores negativos podemos imaginar una distribución de masa sobre la superficie S pero con densidad variable, de forma que $f(x,y,z)$ sería la densidad superficial (masa por unidad de área) en cada punto $(x,y,z) \in S$. La integral de superficie nos daría entonces la masa total. En el caso general, admitiendo que f pueda tomar valores negativos, podemos pensar en una distribución sobre la superficie de una magnitud física que admita valores negativos, carga eléctrica por ejemplo.

8.5. Orientación de superficies

Para campos vectoriales, el problema de la independencia de la parametrización no admite un tratamiento tan sencillo y satisfactorio como el que se ha hecho para campos escalares. La razón estriba en que la integral de superficie de un campo vectorial con respecto a una parametrización Φ involucra la función $\Phi_u \times \Phi_v$ y no sólo su norma como ocurre con los campos escalares. Para comprender rápidamente la diferencia, basta pensar lo que sucede si intercambiamos simplemente los papeles de los parámetros u y v, con lo que sustituimos la función $\Phi_u \times \Phi_v$ por su opuesta $\Phi_v \times \Phi_u$. Qué duda cabe de que hemos cambiado la parametrización de nuestra superficie por otra completamente equivalente, pero la integral ha cambiado de signo. Para una amplia gama de superficies, veremos que al cambiar una parametrización simple y suave por otra, la integral de superficie de un campo vectorial se mantiene o cambia de signo, lo que nos sugiere claramente un problema de orientación. Vamos a definir con precisión qué se entiende por orientar una superficie para después aplicar esta idea a las integrales de campos vectoriales.

Una **orientación** de una superficie S es, por definición, una función continua $\mathbf{N} : S \to \mathbb{R}^3$ tal que, para cada $\mathbf{p} \in S$, $\mathbf{N}(\mathbf{p})$ es un vector unitario normal a la superficie S en el punto $\mathbf{p}$. Cuando existe una tal orientación, decimos lógicamente que la superficie S es **orientable**. Abundan, como vamos a ver, los ejemplos de superficies orientables.

Toda superficie en forma explícita es orientable. En efecto, si una superficie S viene dada por la expresión (4), como gráfica de una función h de clase C^1 en un recinto W, sabemos que, para cada $(x,y) \in W$, el vector no nulo que aparece en (6) es normal a la superficie en el punto $(x,y,h(x,y))$ y su norma viene dada por (7). Basta entonces definir

$$\mathbf{N}(x,y,z) = \left[\left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 + 1 \right]^{-1/2} \left(-\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)\,,\, -\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\,,\, 1 \right) \tag{11}$$

para todo punto $\big(x,y,z\big) = \big(x,y,h(x,y)\big) \in S$, para obtener una orientación de la superficie S.

Toda superficie en forma implícita es orientable. En efecto, consideremos la superficie

$$S = \{(x,y,z) \in \Omega \,:\, g(x,y,z) = 0\} \tag{12}$$

donde Ω es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^3$ y g es una función de clase C^1 en Ω que se anula en algún punto de Ω y cuyo gradiente no se anula en ningún punto de S. Sabemos entonces que, para cada punto $(x,y,z) \in S$, el vector $\nabla g(x,y,z)$ es normal a la superficie S en dicho punto, luego para obtener una orientación de la superficie basta definir

$$\mathbf{N}(x,y,z) = \frac{\nabla g(x,y,z)}{\|\nabla g(x,y,z)\|} \quad \forall\,(x,y,z) \in S. \tag{13}$$

Por ejemplo, para obtener una orientación de la esfera

$$S_r = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (x-a_0)^2 + (y-b_0)^2 + (z-c_0)^2 = r^2\right\} \tag{14}$$

basta definir

$$\mathbf{N}(x,y,z) = r^{-1}\big(x-a_0\,,\, y-b_0\,,\, z-c_0\big) \quad \forall (x,y,z) \in S_r \tag{15}$$

Pasando finalmente el caso general de una superficie en forma paramétrica, supongamos que $\Phi : W \to \mathbb{R}^3$ es una parametrización de la superficie $S = \Phi(W)$, tal que la función Φ es inyectiva en todo el recinto W y verifica que $\Phi_u \times \Phi_v \neq 0$ para todo $(u,v) \in W$. En particular Φ es una parametrización simple y suave, pero ahora estamos exigiendo mucho más. Cada punto $(x,y,z) \in S$ tiene la forma $\Phi(u,v)$ para un único par $(u,v) \in W$ y se puede demostrar que (u,v) depende de manera continua de (x,y,z), dicho de otra forma, Φ^{-1} es una función continua de S en W. Obtenemos entonces una orientación de la superficie S sin más que definir,

$$\mathbf{N}(x,y,z) = \frac{\Phi_u \times \Phi_v}{\|\Phi_u \times \Phi_v\|}\big[\Phi^{-1}(x,y,z)\big] \quad \forall\,(x,y,z) \in S$$

donde en el segundo miembro aparece entre corchetes el punto donde debe evaluarse la función indicada.

Como ocurre en los ejemplos anteriores, una superficie orientable ha de ser suave en todos sus puntos, para que dispongamos de vectores normales en todos ellos. El ejemplo más conocido de una superficie simple, que es suave en todos sus puntos pero no es orientable, es la llamada **cinta de Möbius**, que no vamos a estudiar aquí. Baste saber que tal ejemplo existe.

Es lógico preguntarse cuantas orientaciones admite una superficie orientable. De entrada al menos dos, puesto que si $\mathbf{N}$ es una orientación, $-\mathbf{N}$ es otra. A efectos de las integrales de superficie, lo importante es que las superficies que nos interesan, las que admiten una parametrización simple y suave, no pueden tener más de dos orientaciones. Esto es una fácil consecuencia del siguiente enunciado, que es el que realmente vamos a usar:

Sea $\mathbf{N}$ una orientación de la superficie $S = \Phi(W)$, donde Φ es una parametrización simple y suave, definida en un recinto W del plano. Se verifica entonces que

$$\Phi_u \times \Phi_v = \sigma\,\mathbf{N}\big(\Phi(u,v)\big)\,\|\Phi_u \times \Phi_v\| \tag{16}$$

para todo $(u,v) \in W$ donde σ es constante, pudiendo valer 1 o -1. Cuando $\sigma = 1$ decimos que la parametrización Φ determina la orientación $\mathbf{N}$ mientras que cuando $\sigma = -1$ decimos que Φ determina la orientación $-\mathbf{N}$.

La demostración del enunciado anterior puede resultar instructiva. Observamos en primer lugar que basta probar la igualdad (16) para $(u,v) \in D$ donde D es el interior del recinto W. Ello se debe a que los dos miembros de dicha igualdad son funciones continuas en el recinto W que, caso de coincidir en el dominio D habrán de coincidir en su cierre, que es W.

Para $(u,v) \in D$, por ser suave la parametrización Φ, sabemos que la función $\Phi_u \times \Phi_v$ toma un valor no nulo en el punto (u,v) que es un vector normal a la superficie S en el punto $\Phi(u,v)$. Por definición de orientación, lo mismo le ocurre al vector $\mathbf{N}\big(\Phi(u,v)\big)$, pero sabemos que el plano tangente a la superficie en el punto $\Phi(u,v)$ es único, luego esos vectores normales deberán ser cada uno múltiplo escalar del otro. Así pues, se deberá tener

$$\frac{\Phi_u \times \Phi_v}{\|\Phi_u \times \Phi_v\|} = \pm\mathbf{N}\big(\Phi(u,v)\big)$$

Considerando entonces la función $\lambda : D \to \mathbb{R}$ definida por

$$\lambda(u,v) = \left\| \frac{\Phi_u \times \Phi_v}{\|\Phi_u \times \Phi_v\|} - \mathbf{N}\big(\Phi(u,v)\big) \right\| \quad \big((u,v) \in D\big)$$

tenemos que λ sólo toma los valores 0 y 2. Pero λ es una función continua en el dominio D, con lo que vemos fácilmente que no puede tomar ambos valores sin tomar todos los intermedios. Por tanto, o bien λ es idénticamente nula en D, y se cumple (16) con $\sigma = 1$, o bien λ es constantemente igual a 2 en D, y se cumple (16) con $\sigma = -1$.

Veamos ahora por qué una superficie orientable que admita una parametrización simple y suave admite exactamente dos orientaciones. Con la notación usada en la demostración anterior, supongamos que $\mathbf{N_1}$ es otra orientación de la superficie y comprobaremos enseguida que se debe tener $\mathbf{N_1} = \mathbf{N}$ o $\mathbf{N_1} = -\mathbf{N}$. En efecto, la orientación $\mathbf{N_1}$ también verificará (16), es decir

$$\Phi_u \times \Phi_v = \sigma_1 \, \mathbf{N_1}\big(\Phi(u,v)\big) \, \|\Phi_u \times \Phi_v\|$$

para todo $(u,v) \in W$, con $\sigma_1 = \pm 1$. Por tanto

$$\sigma_1 \, \mathbf{N_1}\big(\Phi(u,v)\big) \, \|\Phi_u \times \Phi_v\| = \sigma \, \mathbf{N}\big(\Phi(u,v)\big) \, \|\Phi_u \times \Phi_v\| \quad \forall \, (u,v) \in W$$

Usando que $\Phi_u \times \Phi_v$ no se anula en D deducimos que

$$\mathbf{N_1}\big(\Phi(u,v)\big) = \tau \, \mathbf{N}\big(\Phi(u,v)\big) \quad \forall \, (u,v) \in D$$

donde también $\tau = \pm 1$. Finalmente, aprovechando como antes que W es el cierre de su región interior, concluimos que la igualdad anterior se verifica en todo el recinto W, lo que equivale a decir que $\mathbf{N_1} = \tau \, \mathbf{N}$, como queríamos.

Intuitivamente, las dos orientaciones de una superficie se corresponden con sus dos "caras", de forma que una orientación $\mathbf{N}$ correspondería a la cara de la superficie en la que debemos situarnos (se entiende con los pies en la superficie) de forma que, en cada punto $\mathbf{p}$, el vector normal unitario $\mathbf{N}(\mathbf{p})$ apunte hacia arriba. En términos igualmente intuitivos, una superficie es orientable cuando tiene dos caras. En la práctica suele ser fácil distinguir las dos orientaciones de una superficie, como vamos a ver con ejemplos.

Para una superficie en forma explícita, la orientación dada por (11) se caracteriza porque la tercera coordenada del vector normal $\mathbf{N}(x,y,z)$ es siempre positiva, podríamos decir que el vector normal apunta siempre hacia arriba. Intuitivamente esta orientación corresponde a la "cara superior" de la superficie.

Para una superficie en forma implícita, dada por la expresión (12), es frecuente que la función g esté definida en todo $\mathbb{R}^3$ y que la superficie sea la frontera de un dominio acotado G. Es decir, el conjunto $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g(x,y,z) < 0\}$ es un dominio acotado en $\mathbb{R}^3$ con $S = \partial G$. En este caso, si usamos la orientación definida en (13) decimos que la superficie S está orientada mediante la normal exterior. Como ejemplo concreto, en (15) tenemos la orientación mediante la normal exterior de la esfera dada por (14). La explicación de esta nomenclatura es fácil de adivinar, pero vamos a explicarla en una situación mucho más general.

Supongamos que la superficie S está contenida en la frontera de un dominio $G \subseteq \mathbb{R}^3$. Se dice que S está orientada mediante la **normal exterior** a G si su orientación $\mathbf{N}$ verifica la siguiente condición: para cada punto $\mathbf{p} \in S$, existe un $\varepsilon > 0$ tal que $\mathbf{p} + \alpha \mathbf{N}(\mathbf{p}) \notin G$ para $0 < \alpha < \varepsilon$. La explicación es la siguiente: intuitivamente el dominio G está "a un lado" de la superficie S, de forma que, vista desde dentro de G, la superficie tiene una cara interior (la que vemos) y otra exterior. La orientación $\mathbf{N}$ que estamos considerando corresponde a la cara exterior, porque al realizar un pequeño desplazamiento desde cualquier punto $\mathbf{p}$ de la superficie en el sentido del vector normal $\mathbf{N}(\mathbf{p})$ llegamos a un punto $\mathbf{p} + \alpha \mathbf{N}(\mathbf{p})$ que está fuera del dominio G.

8.6. Integral de superficie de un campo vectorial

Podemos ya analizar la independencia de la parametrización para integrales de superficie de campos vectoriales. El resultado irá en la misma línea que para campos escalares, sólo que debemos tener en cuenta la orientación y, en particular, la superficie deberá ser orientable.

Sea pues $\mathbf{N}$ una orientación de una superficie $S = \Phi(W)$ donde Φ es una parametrización simple y suave de la superficie, que suponemos determina la orientación $\mathbf{N}$, es decir, se tiene que

$$\Phi_u \times \Phi_v = \mathbf{N}\big(\Phi(u,v)\big)\, \|\Phi_u \times \Phi_v\| \qquad \big((u,v) \in W\big)$$

Entonces, dado un campo vectorial continuo $\mathbf{F} : S \to \mathbb{R}^3$ tendremos

$$\iint_\Phi \mathbf{F}\,.\,\mathbf{ds} = \iint_W \big\langle\, \mathbf{F}\big(\Phi(u,v)\big) \,\big|\, \mathbf{N}\big(\Phi(u,v)\big)\,\big\rangle\, \|\Phi_u \times \Phi_v\|\, du\,dv$$

y hemos llegado a la integral de superficie de un campo escalar. Más concretamente, si para $(x,y,z) \in S$ definimos

$$f(x,y,z) = \big\langle\, \mathbf{F}(x,y,z) \,\big|\, \mathbf{N}(x,y,z)\,\big\rangle \tag{17}$$

tenemos un campo escalar continuo $f : S \to \mathbb{R}$ que evidentemente verifica

$$\iint_\Phi f\,ds = \iint_\Phi \mathbf{F}\,.\,\mathbf{ds} \tag{18}$$

El razonamiento anterior tiene consecuencias importantes que ahora vamos a explicar. En primer lugar, si Ψ es otra parametrización simple y suave de la superficie S que también determine la orientación $\mathbf{N}$, podemos aplicar a Ψ el mismo razonamiento que a Φ y aprovechar la independencia de la parametrización que ya conocemos para campos escalares, obteniendo

$$\iint_\Psi \mathbf{F}\,.\,\mathbf{ds} = \iint_\Psi f\,ds = \iint_\Phi f\,ds = \iint_\Phi \mathbf{F}\,.\,\mathbf{ds}$$

Si, por el contrario Ψ determinase la orientación $-\mathbf{N}$, está claro que las integrales con respecto a las dos parametrizaciones serían opuestas. Hemos probado:

Sean $\Phi_1 : W_1 \to \mathbb{R}^3$ y $\Phi_2 : W_2 \to \mathbb{R}^3$ dos parametrizaciones simples y suaves de una misma superficie orientable $S = \Phi_1(W_1) = \Phi_2(W_2)$. Entonces, para todo campo vectorial continuo $\mathbf{F} : S \to \mathbb{R}^3$ se verifica que

$$\iint_{\Phi_1} \mathbf{F}\,.\,\mathbf{ds} = \tau \iint_{\Phi_2} \mathbf{F}\,.\,\mathbf{ds}$$

donde $\tau = 1$ si Φ_1 y Φ_2 determinan la misma orientación de la superficie S y $\tau = -1$ si determinan orientaciones opuestas.

A partir del resultado anterior podremos ya definir la integral de superficie de un campo vectorial sobre una superficie orientada. Conviene resaltar que esta integral va a coincidir siempre con la integral de superficie de un campo escalar, como ha quedado claramente de manifiesto en la igualdad (18). La definición formal es la siguiente:

Sea S una superficie orientable que admita una parametrización simple y suave, sea $\mathbf{N}$ una orientación de S y $\mathbf{F}: S \to \mathbb{R}^3$ una función continua. La **integral de superficie del campo vectorial F sobre la superficie S orientada mediante N** se define de la siguiente forma:

$$\iint_S \mathbf{F}\,.\,\mathbf{ds} = \iint_\Phi \mathbf{F}\,.\,\mathbf{ds} = \iint_W \big\langle \mathbf{F}\big(\Phi(u,v)\big) \,\big|\, \Phi_u \times \Phi_v \big\rangle \, du\, dv$$

donde $\Phi : W \to \mathbb{R}^3$ es cualquier parametrización simple y suave de la superficie S que determine la orientación $\mathbf{N}$.

Equivalentemente, según hemos visto, se tiene

$$\iint_S \mathbf{F}\,.\,\mathbf{ds} = \iint_S f\, ds$$

donde $f : S \to \mathbb{R}$ es el campo escalar definido por (17). Esta última igualdad puede muy bien resumirse escribiendo $f = \big\langle \mathbf{F} \,\big|\, \mathbf{N} \big\rangle$, con lo que aparece otra notación que se usa frecuentemente para la integral recién definida

$$\iint_S \mathbf{F}\,.\,\mathbf{ds} = \iint_S \langle \mathbf{F} | \mathbf{N} \rangle \, ds$$

Esta última notación tiene la ventaja de recordarnos que debemos fijar una orientación para que la integral quede unívocamente determinada.

Así pues tiene sentido, por ejemplo, hablar de la integral de un campo vectorial continuo sobre una superficie en forma explícita o sobre una esfera o elipsoide, siempre que fijemos una orientación. Por ejemplo podemos orientar una esfera mediante la normal exterior o trabajar con la cara superior de una superficie en forma explícita. Como ocurría con los campos escalares, no se produce ambigüedad alguna por el hecho de que no concretemos la parametrización que estamos considerando, salvo que dicha parametrización debe ser simple, suave y determinar la orientación elegida.

Una interpretación física interesante de la integral de superficie se obtiene pensando en el campo vectorial $\mathbf{F}$ como el campo de velocidades de un fluido en movimiento en una cierta región del espacio que contenga a la superficie S. La clave para ello consiste en interpretar correctamente el campo escalar $\big\langle \mathbf{F} \,\big|\, \mathbf{N} \big\rangle$, como vamos a ver.

De entrada, la función $\big\langle \mathbf{F} \,\big|\, \mathbf{N} \big\rangle$ mide en cada punto la componente de la velocidad del fluido en la dirección normal a la superficie y en el sentido determinado por la orientación $\mathbf{N}$. Si esta función fuese constante, al multiplicarla por el área de S nos daría el volumen total de fluido que atraviesa la superficie S por unidad de tiempo en el sentido indicado. Concluimos que la función $\big\langle \mathbf{F} \,\big|\, \mathbf{N} \big\rangle$ también mide, en cada punto, la cantidad de fluido que atraviesa la superficie en el sentido indicado, por unidad de área y por unidad de tiempo. Lógicamente esta cantidad es variable, precisamente porque la velocidad del fluido varía de un punto a otro de la superficie.

Usando ahora la interpretación que ya conocemos para campos escalares, concluimos que la integral de superficie de nuestro campo de velocidades nos da la cantidad total de fluido que atraviesa la superficie S por unidad de tiempo en el sentido de la orientación fijada.

Inspirándose en el ejemplo concreto que acabamos de sugerir, la integral de superficie de un campo vectorial suele denominarse **flujo** del campo a través de la superficie en el sentido determinado por la orientación. Por ejemplo hablamos de un flujo saliente a través de una esfera orientada mediante la normal exterior.

8.7. Propiedades de las integrales de superficie

Comentamos brevemente sólo dos propiedades, que son análogas a las que tenían las integrales de línea.

Linealidad. Sea Φ una parametrización de una superficie S, f, g dos campos escalares y $\mathbf{F}, \mathbf{G}$ dos campos vectoriales, todos ellos continuos en S, y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Se verifica entonces que

$$\iint_\Phi (\alpha f + \beta g)\, ds = \alpha \iint_\Phi f\, ds, + \beta \iint_\Phi g\, ds$$
$$\iint_\Phi (\alpha \mathbf{F} + \beta \mathbf{G}) \,.\, \mathbf{ds} = \alpha \iint_\Phi \mathbf{F} \,.\, \mathbf{ds} + \beta \iint_\Phi \mathbf{G} \,.\, \mathbf{ds}$$

En particular, si la superficie S admite una parametrización simple y suave se tendrá

$$\iint_S (\alpha f + \beta g)\, ds = \alpha \iint_S f\, ds, + \beta \iint_S g\, ds$$

y si además S es orientable, será también

$$\iint_S (\alpha \mathbf{F} + \beta \mathbf{G}) \,.\, \mathbf{ds} = \alpha \iint_S \mathbf{F} \,.\, \mathbf{ds} + \beta \iint_S \mathbf{G} \,.\, \mathbf{ds}$$

siempre que para las tres integrales usemos la misma orientación.

Continuidad. Supongamos ahora que $\Phi : W \to \mathbb{R}^3$ es una parametrización simple de la superficie $S = \Phi(W)$, sea $f : S \to \mathbb{R}$ un campo escalar continuo y tomemos una constante $M > 0$ de forma que $|f(x,y,z)| \leqslant M$ para todo punto $(x,y,z) \in S$. Es fácil ver que

$$\left| \iint_\Phi f\, ds \right| \leqslant M \iint_W \|\Phi_u \times \Phi_v\|\, du\, dv = M\, \text{Área}(S)$$

En particular, si S admite una parametrización simple y suave, se tendrá

$$\left| \iint_S f\, ds \right| \leqslant M\, \text{Área}(S)$$

Si ahora $\mathbf{F}$ es un campo vectorial continuo en S y $\|\mathbf{F}(x,y,z)\| \leqslant K$ para todo $(x,y,z) \in S$, usando la desigualdad de Cauchy-Schwartz se comprueba sin dificultad que

$$\left| \iint_\Phi \mathbf{F} \,.\, \mathbf{ds} \right| \leqslant K\, \text{Área}(S)$$

y en particular, cuando S sea orientable y admita una parametrización simple y suave, podremos escribir

$$\left| \iint_\Phi \mathbf{F} \,.\, \mathbf{ds} \right| \leqslant K\, \text{Área}(S)$$

cualquiera que sea la orientación que se considere.

En resumen, las desigualdades anteriores expresan la idea de que las integrales de superficie dependen de manera continua del campo, escalar o vectorial, que se integra.