Tema 10

Teorema de la aplicación abierta

Vamos a presentar cuatro versiones equivalentes de un mismo resultado, el tercero de los principios fundamentales del Análisis Funcional. Para ello, empezaremos analizando la noción de homomorfismo entre espacios normados, en coherencia con la noción de isomorfismo que sí hemos manejado a menudo. En el contexto de los espacios de Banach, probaremos entonces un teorema principal, que nos da tres caracterizaciones de los homomorfismos entre espacios de Banach, conocidas como *teorema de la aplicación abierta, teorema de los isomorfismos de Banach* y *teorema del homomorfismo de Banach*. Son tres resultados claramente equivalentes, que sólo difieren en el tipo de operador para el que se enuncian. Finalmente, el *teorema de la gráfica cerrada*, equivalente a los tres anteriores, nos dará una muy útil caracterización de la continuidad de un operador lineal entre espacios de Banach. El lema de categoría de Baire seguirá siendo un instrumento clave para obtener todos estos resultados.

10.1. Homomorfismos de espacios normados

En contexto algebraico, dos espacios vectoriales se identifican cuando existe una biyección lineal entre ellos, es decir, las biyecciones lineales son isomorfismos de espacios vectoriales. Como consecuencia, podemos decir que todas las aplicaciones lineales son homomorfismos de espacios vectoriales, pues de esa forma, los homomorfismos biyectivos son isomorfismos. La factorización canónica de una aplicación lineal nos da entonces el primer teorema de isomorfía para espacios vectoriales. Concretamente, si X e Y son espacios vectoriales y $T : X \to Y$ una aplicación lineal, se tiene $T = I \circ S \circ q$, donde la aplicación cociente $q : X \to X/\ker T$ es lineal y sobreyectiva, la inclusión natural $I : T(X) \to Y$ es lineal e inyectiva, y $S : X/\ker T \to T(X)$ es una biyección lineal. Por tanto, *todo homomorfismo de espacios vectoriales factoriza como composición de un epimorfismo con un isomorfismo y un monomorfismo.*

Para dar contenido topológico a la discusión anterior, en principio se podría pensar en llamar homomorfismos de espacios normados a los operadores lineales y continuos. Pero entonces, los homomorfismos biyectivos podrían no ser isomorfismos, pues para un operador lineal, continuo y biyectivo, el operador inverso ciertamente es lineal, pero puede no ser continuo, como vamos a comprobar con un ejemplo conocido.

Recordemos que, para $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$, se tiene la inclusión de conjuntos $l_p \subset l_q$, y la topología de l_p contiene estrictamente a la inducida por l_q. Por tanto, si T es el operador identidad, de l_p con su norma $\|\cdot\|_p$, en l_p con la norma inducida por l_q, vemos que T es lineal continuo y biyectivo, pero no es un isomorfismo, es decir, T^{-1} no es continuo.

En vista del ejemplo anterior, se hace necesario buscar una noción de homomorfismo que sea coherente con la noción de isomorfismo que ya tenemos. Para encontrarla, vamos a revisar la factorización canónica de un operador lineal y continuo $T \in L(X,Y)$ donde X e Y son ahora espacios normados. Como $\ker T$ es un subespacio cerrado de X, usamos el espacio normado cociente $X/\ker T$, y la aplicación cociente $q : X \to X/\ker T$ es continua. En $T(X)$ tenemos la norma inducida por Y, así que la inclusión natural $I : T(X) \to Y$ es isométrica, luego continua. Finalmente $T = I \circ S \circ q$ donde $S : X/\ker T \to T(X)$ es un operador lineal biyectivo, y al estudiar el cociente, vimos que S es continuo si, y sólo si, lo es $S \circ q$. Como I es isométrico, la continuidad de $S \circ q$ equivale a la de $I \circ S \circ q = T$, luego S también es continuo.

Pues bien, si queremos tener un primer teorema de isomorfía para espacios normados, como el obtenido para espacios vectoriales, no basta que S sea continuo, necesitamos que S sea un isomorfismo, es decir, que S^{-1} también sea continuo, o lo que es lo mismo, que S sea una aplicación abierta. Como q siempre es abierta, esto implica que $S \circ q$ sea abierta. Pero recíprocamente, si $S \circ q$ es abierta, dado un abierto $G \subset X/\ker T$, la continuidad de q nos asegura que $q^{-1}(G)$ es abierto en X, luego $\big[S \circ q\big]\big(q^{-1}(G)\big) = S(G)$ es abierto en $T(X)$, y vemos que S es una aplicación abierta. Así pues, S es un isomorfismo si, y sólo si, $S \circ q$ es una aplicación abierta. Observando ahora que $S \circ q$ no es más que el propio operador T, pero visto como aplicación de X en $T(X)$, llegamos a la siguiente definición.

Si X e Y son espacios normados y $T : X \to Y$ un operador lineal, decimos que T es un homomorfismo de espacios normados, o simplemente un **homomorfismo**, cuando T es una aplicación continua y abierta de X sobre $T(X)$. Esto significa que $T^{-1}(V)$ es abierto en X para todo abierto $V \subset T(X)$ y que $T(U)$ es abierto en $T(X)$ para todo abierto $U \subset X$.

Es claro que los isomorfismos de espacios normados no son más que los homomorfismos biyectivos. Como es natural, a los homomorfismos sobreyectivos les llamamos **epimorfismos**, mientras que los homomorfismos inyectivos son los **monomorfismos**.

Pasamos ahora a comprobar que, con la noción de homomorfismo recién introducida, se verifica el primer teorema de isomorfía para espacios normados.

Recordemos que, si M es un subespacio cerrado de un espacio normado X, la aplicación cociente $q : X \to X/M$ es continua y abierta, luego es un epimorfismo. Por otra parte, si Z es un subespacio de un espacio normado Y, la inclusión natural $I : Z \to Y$ es un monomorfismo, pues vista como aplicación de Z en $I(Z) = Z$, no es más que la identidad en Z.

En particular, si X e Y son espacios normados y $T : X \to Y$ es un homomorfismo, al hacer la factorización canónica $T = I \circ S \circ q$, sabemos que $S : X/\ker T \to T(X)$ es un isomorfismo, pero acabamos de ver que $q : X \to X/\ker T$ es un epimorfismo, mientras que $I : T(X) \to Y$ es un monomorfismo. Por tanto, *todo homomorfismo de espacios normados factoriza como composición de un epimorfismo con un isomorfismo y un monomorfismo.*

Los resultados de este tema nos harán ver que la noción de homomorfismo se maneja con mucha más comodidad cuando trabajamos con espacios de Banach.

10.2. Tres resultados equivalentes

De acuerdo con la discusión anterior, si X e Y son espacios normados y $T \in L(X,Y)$ verifica que $T(X) = Y$, entonces T es un epimorfismo si, y sólo si, T es una aplicación abierta. Pues bien, esta última condición es automática cuando X e Y son espacios de Banach. Este es el contenido del siguiente resultado, también conocido como *teorema de Banach-Schauder:*

Teorema de la aplicación abierta de Banach. *Sean X e Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ un operador lineal, continuo y sobreyectivo. Entonces T es una aplicación abierta.*

Como caso particular del resultado anterior, cuando el operador T es biyectivo, obtenemos:

Teorema de los isomorfismos de Banach. *Sean X e Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ un operador lineal, continuo y biyectivo. Entonces T^{-1} es continuo.*

Este teorema nos dará a su vez una caracterización de los homomorfismos entre espacios de Banach. Sean X e Y espacios de Banach, y para $T \in L(X,Y)$ consideremos la factorización canónica $T = I \circ S \circ q$. Si T es un homomorfismo, sabemos que S es un isomorfismo, y en particular $T(X)$ es isomorfo al cociente $X/\ker T$, que es completo por serlo X, así que $T(X)$ es completo, luego es cerrado en Y. Vemos por tanto que, para que T sea un homomorfismo, es condición necesaria que $T(X)$ sea cerrado en Y. Pues bien, del teorema anterior se deduce que dicha condición también es suficiente: si $T(X)$ es cerrado en Y, entonces S es un operador lineal continuo y biyectivo entre los espacios de Banach $X/\ker T$ y $T(X)$, luego S es un isomorfismo, y T es un homomorfismo. Enunciemos esta consecuencia del resultado anterior:

Teorema del homomorfismo de Banach. *Sean X e Y espacios de Banach, y $T : X \to Y$ un operador lineal y continuo. Si $T(X)$ es un subespacio cerrado de Y, entonces T es un homomorfismo.*

Aunque hemos destacado solamente la implicación que se deduce del teorema previo, no conviene olvidar que en realidad tenemos una equivalencia: la imagen de un homomorfismo de espacios de Banach siempre es un subespacio cerrado del espacio de llegada.

Del último enunciado se deduce ahora el teorema de la aplicación abierta, pues si X e Y son espacios de Banach y $T \in L(X,Y)$ verifica que $T(X) = Y$, es obvio que $T(X)$ es cerrado en Y, luego T es un homomorfismo y en particular es una aplicación abierta.

Aclarado que los tres teoremas anteriores son equivalentes, abordamos a partir de ahora la demostración del primero de ellos, que vamos a dividir en dos etapas, dosificando las hipótesis, para que quede claro lo que se consigue en cada paso.

10.2.1. Primera etapa: aplicaciones casi-abiertas

Empezamos la demostración con una observación muy sencilla:

- *Sean X e Y espacios normados y B la bola unidad de X. Una aplicación lineal $T : X \to Y$ es abierta si, y sólo si, $T(B)$ es entorno de cero en Y.*

Vemos que $0 \in T(U) \subset T(B)$ donde U es la bola abierta unidad de X. Si T es abierta, se tiene que $T(U)$ es un abierto de Y, luego $T(B)$ es entorno de cero en Y. Recíprocamente, supongamos que $T(B)$ es entorno de cero en Y, y dado un abierto $G \subset X$, veamos que $T(G)$ es abierto en Y. Para $y \in T(G)$ escribimos $y = T(x)$ con $x \in G$, y tenemos $r \in \mathbb{R}^+$ con $x + rB \subset G$, de donde $y + rT(B) \subset T(G)$. Como las homotecias y traslaciones son homeomorfismos de Y, al ser $T(B)$ un entorno de cero, deducimos que $y + rT(B)$ es un entorno de y, luego $T(G)$ también lo es. Por tanto, $T(G)$ es entorno de todos sus puntos, es decir, es abierto. ■

Usando argumentos de categoría, con hipótesis muy poco restrictivas, vamos a conseguir que un operador lineal tenga que verificar una propiedad ligeramente más débil que la de ser una aplicación abierta, a la que merece la pena dar un nombre. Si X e Y son espacios normados, se dice que una aplicación lineal $T : X \to Y$ es **casi-abierta**, cuando $\overline{T(B)}$ es entorno de cero en Y, donde B es la bola unidad de X. Enunciamos ya el primer paso hacia el teorema de la aplicación abierta:

Lema 1. *Sean X e Y espacios normados y $T : X \to Y$ un operador lineal. Si $T(X)$ es un conjunto de segunda categoría en Y, entonces T es una aplicación casi-abierta.*

Demostración. Si B es la bola unidad de X, tenemos claramente $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} nB$, de donde

$$T(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} nT(B) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} n\overline{T(B)}$$

Como las homotecias son homeomorfismos, vemos que $n\overline{T(B)}$ es un conjunto cerrado en Y para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, ha de existir un $m \in \mathbb{N}$ tal que $m\overline{T(B)}$ tenga interior no vacío, pues en otro caso $T(X)$ sería de primera categoría en Y, contradiciendo la hipótesis del lema. Usando de nuevo una homotecia, deducimos que $\overline{T(B)}$ tiene interior no vacío, es decir, podemos encontrar $y_0 \in Y$ y $r \in \mathbb{R}^+$ tales que

$$y \in Y, \quad \|y - y_0\| < r \quad \Longrightarrow \quad y \in \overline{T(B)} \tag{1}$$

Si ahora $z \in Y$ verifica que $\|z\| < r$, podemos usar (1) con $y = y_0 \pm z$, obteniendo dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ de puntos de B, tales que $\{T(a_n)\} \to y + z$ y $\{T(b_n)\} \to y - z$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomamos $x_n = (a_n - b_n)/2$, con lo que $\{x_n\}$ es otra sucesión de puntos de B, que claramente verifica $\{T(x_n)\} \to z$, luego $z \in \overline{T(B)}$. Por tanto $\overline{T(B)}$ contiene una bola abierta de centro cero, luego $\overline{T(B)}$ es entorno de cero en Y, como queríamos demostrar. ■

10.2.2. Segunda etapa: Aproximaciones sucesivas

Pensando en el teorema de la aplicación abierta, la forma en que podemos sacar partido del lema anterior es fácil de adivinar: si Y es un espacio de Banach y el operador lineal T es sobreyectivo, el lema de Baire nos dice que $T(X) = Y$ es de segunda categoría en Y, luego T es una aplicación casi-abierta. Para llegar a que T es abierta usaremos el resto de las hipótesis conforme se vayan necesitando.

Expliquemos intuitivamente el tipo de razonamiento que vamos a hacer, denotando de nuevo por B a la bola unidad de X. Para $y \in Y$ con norma suficientemente pequeña, nos gustaría probar que $y \in T(B)$, es decir, que la ecuación $T(x) = y$ tiene solución $x \in B$. Sabiendo ya que T es casi-abierta, la misma hipótesis sobre y nos permite tener $y \in \overline{T(B)}$, y conseguimos $x \in B$ tal que $T(x)$ está tan cerca de y como se quiera. Por tanto, tenemos soluciones "aproximadas" para ecuaciones del tipo $T(x) = y$, pero queremos conseguir soluciones "exactas".

Para ello usaremos un *método de aproximaciones sucesivas,* es decir, vamos a construir de manera iterativa una sucesión de soluciones aproximadas cada vez mejores, que convergerá a la solución exacta que buscamos. La complitud de X nos permitirá conseguir la convergencia de la sucesión de soluciones aproximadas, mientras que la continuidad de T hará que su límite sea una solución exacta. El método sugerido nos llevará por tanto al siguiente resultado:

Lema 2. *Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $T : X \to Y$ un operador lineal y continuo. Si T es una aplicación casi-abierta, entonces T es una aplicación abierta y, como consecuencia, T es sobreyectiva e Y es completo.*

Demostración. Si B es la bola unidad de X, como T es una aplicación casi-abierta, $\overline{T(B)}$ contiene una bola abierta de centro 0 y radio $\delta \in \mathbb{R}^+$. Fijados $m \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$, si $z \in Y$ verifica que $\|z\| < \delta/2^m$, tendremos $\|2^m z\| < \delta$, luego existe $u \in B$ tal que $\|2^m z - T(u)\| < 2^m \varepsilon$. Tomando entonces $x = u/2^m$ tenemos $x \in X$ verificando que $\|x\| \leqslant 1/2^m$ y $\|z - T(x)\| < \varepsilon$. Destaquemos esta información, que es la que vamos a usar iterativamente:

$$m \in \mathbb{N}, \ \ \varepsilon > 0, \ \ z \in Y, \ \ \|z\| < \frac{\delta}{2^m} \quad \Longrightarrow \quad \exists\, x \in X \ : \ \|x\| \leqslant \frac{1}{2^m}, \ \ \|z - T(x)\| < \varepsilon \qquad (2)$$

Empezamos nuestro proceso iterativo fijando $y \in Y$ con $\|y\| < \delta/2$ y, en un primer paso usamos (2), con $m = 1$, $\varepsilon = \delta/4$ y $z = y$, obteniendo $x_1 \in X$ que verifica:

$$\|x_1\| \leqslant \frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad \|y - T(x_1)\| < \frac{\delta}{4} \qquad (3.1)$$

Aunque no es necesario, demos un segundo paso para entender mejor el proceso. La última desigualdad de (3.1) nos permite usar de nuevo (2), con $m = 2$, $\varepsilon = \delta/8$ y $z = y - T(x_1)$. De esta forma obtenemos $x_2 \in X$ que verifica:

$$\|x_2\| \leqslant \frac{1}{4} \qquad \text{y} \qquad \|y - T(x_1) - T(x_2)\| < \frac{\delta}{8} \qquad (3.2)$$

Está ya muy claro cuál debe ser nuestra hipótesis de inducción. Dado $n \in \mathbb{N}$, suponemos que ya hemos encontrado vectores $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ verificando que

$$\|x_n\| \leqslant \frac{1}{2^n} \qquad \text{y} \qquad \left\| y - \sum_{k=1}^{n} T(x_k) \right\| < \frac{\delta}{2^{n+1}} \qquad (3.n)$$

La última desigualdad nos dice entonces que podemos usar (2), con $m = n+1$, $\varepsilon = \delta/2^{n+2}$ y tomando $z = y - \sum_{k=1}^{n} x_k$, para obtener $x_{n+1} \in X$ que verifica

$$\|x_{n+1}\| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}} \qquad \text{y} \qquad \left\| y - \sum_{k=1}^{n+1} T(x_k) \right\| < \frac{\delta}{2^{n+2}} \qquad (3.n+1)$$

Por inducción, hemos construido una sucesión $\{x_n\}$ de vectores de X que verifica $(3.n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. El resto de la demostración es fácil de adivinar.

La serie $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ es absolutamente convergente, ya que: $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$. Como X es completo, dicha serie es convergente, con lo que podemos escribir

$$x \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} x_n \qquad \text{con} \qquad \|x\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \leqslant 1$$

Además, como T es lineal y continuo, tenemos

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} T(x_k) = y$$

donde la última igualdad se deduce claramente de $(3.n)$.

Hemos visto que $y \in T(B)$, pero esto es cierto para todo $y \in Y$ que verifique $\|y\| < \delta/2$, luego $T(B)$ es un entorno de cero en Y, es decir, T es una aplicación abierta.

Por ser $T(B)$ un entorno de cero, tenemos $Y = \mathbb{R}^+ T(B) = T(\mathbb{R}^+ B) = T(X)$, luego T es sobreyectivo. Así pues, T es un epimorfismo, cuya factorización canónica nos dice que Y es isomorfo a $X/\ker T$. Como dicho cociente es completo por serlo X, deducimos que también Y es un espacio de Banach, como queríamos demostrar. ■

10.2.3. Fin de la demostración

Encadenando los dos lemas anteriores obtenemos un resultado, del que se deduce fácilmente el teorema de la aplicación abierta, pero que nos da información adicional.

Teorema principal. *Sean X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $T : X \to Y$ un operador lineal y continuo. Supongamos que $T(X)$ es de segunda categoría en Y. Entonces T es una aplicación abierta y, como consecuencia, T es sobreyectiva e Y es completo.*

Demostración. El lema 1 nos dice que T es una aplicación casi-abierta, con lo que basta aplicar el lema 2. ■

Para deducir el teorema de la aplicación abierta basta observar que, si X e Y son espacios de Banach y $T \in L(X,Y)$ es sobreyectivo, el lema de categoría de Baire nos dice que $T(X) = Y$ es de segunda categoría en Y, con lo que el teorema anterior nos permite concluir que T es una aplicación abierta, como se quería.

Nótese que en el teorema anterior, dos de las hipótesis del teorema de la aplicación abierta, la sobreyectividad de T y la complitud de Y, se obtienen como tesis, aunque a cambio suponemos que $T(X)$ es de segunda categoría en Y. En la práctica, esta hipótesis no es fácil de comprobar, por lo que es el teorema de la aplicación abierta, y no este resultado más fuerte, el que se usa con más frecuencia.

Sin embargo, cuando razonamos por la negativa, el que hemos llamado teorema principal nos da más información. Concretamente, supongamos que X e Y son espacios de Banach y que, para un operador $T \in L(X,Y)$, sabemos que T no es una aplicación abierta. Entonces, el teorema de la aplicación abierta nos dice que T no es sobreyectivo, es decir, $Y \setminus T(X) \neq \emptyset$. En cambio, el teorema principal nos dice que $T(X)$ es de primera categoría en Y, luego $Y \setminus T(X)$ es un conjunto de segunda categoría en Y.

10.3. Dos consecuencias relevantes

En ocasiones, en vez del teorema principal, es más cómodo usar directamente el lema 2, porque se trabaja con un operador cuya imagen en principio no conocemos, pero sabemos que es una aplicación casi-abierta. Esto es lo que ocurrirá en la primera consecuencia de los resultados anteriores que vamos a obtener.

10.3.1. Proyectividad de l_1

Si X es un espacio normado separable y M un subespacio cerrado de X, está claro que el espacio normado cociente X/M es separable. Basta pensar que, si E es un conjunto numerable, denso en X, y $q : X \to X/M$ la aplicación cociente, entonces $q(E)$ es un conjunto numerable, denso en X/M. En particular, todo cociente de l_1 por un subespacio cerrado es un espacio de Banach separable. Por sorprendente que pueda parecer, los resultados anteriores nos van a permitir probar el recíproco:

- **Proyectividad de l_1.** *Todo espacio de Banach separable es isométricamente isomorfo al cociente de l_1 por un subespacio cerrado.*

Sea Y un espacio de Banach separable, con lo que su bola unidad también es separable, luego existe un conjunto numerable $E = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ que es denso en la bola unidad de Y. Para cada $x \in l_1$ vemos que la serie $\sum_{n \geqslant 1} x(n)\, y_n$ es absolutamente convergente, puesto que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| x(n)\, y_n \| = \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|\, \| y_n \| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)| = \| x \|_1 \tag{4}$$

Como por hipótesis Y es completo, dicha serie es convergente, lo que nos permite definir una aplicación $T : l_1 \to Y$ escribiendo

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)\, y_n \qquad \forall x \in l_1$$

Obviamente T es un operador lineal, pero de (4) deducimos que

$$\| T(x) \| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \| x(n)\, y_n \| \leqslant \| x \|_1 \qquad \forall x \in l_1$$

luego T es continuo con $\| T \| \leqslant 1$.

Si B es la bola unidad de l_1, y denotamos por B_Y a la bola unidad de Y, al ser $\|T\| \leqslant 1$ tenemos que $T(B) \subset B_Y$, de donde $\overline{T(B)} \subset B_Y$. Ahora bien, para cada $n \in \mathbb{N}$ vemos claramente que $y_n = T(e_n)$ donde e_n es el n-ésimo vector unidad. Por tanto $E \subset T(B)$, y como E es denso en B_Y, concluimos que $B_Y \subset \overline{T(B)}$. En resumen, hemos visto que $\overline{T(B)} = B_Y$, luego T es una aplicación casi-abierta.

El lema 2 nos dice que T es una aplicación abierta, y en particular $T(l_1) = Y$. Así pues, T es un epimorfismo, cuya factorización canónica nos da un isomorfismo $S : l_1/\ker T \to Y$, que verifica $T = S \circ q$, donde $q : l_1 \to l_1/\ker T$ es la aplicación cociente. Sólo queda comprobar que S es isométrico.

Fijado $w \in l_1/\ker T$, para todo $x \in l_1$ que verifique $w = q(x)$ se tiene claramente

$$\|S(w)\| = \|S\big(q(x)\big)\| = \|T(x)\| \leqslant \|x\|_1$$

y la definición de la norma cociente nos dice que $\|S(w)\| \leqslant \|w\|$.

Para la otra desigualdad, sea $r = \|S(w)\|$, y pongamos $S(w) = ry$ con $y \in B_Y$. Tenemos entonces $y \in \overline{T(B)}$, luego existe una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de B tal que $\{T(x_n)\} \to y$, de donde obtenemos que $\big\{S\big(q(rx_n)\big)\big\} = \{T(rx_n)\} \to ry = S(w)$. Como S es un isomorfismo, deducimos que $\{q(rx_n)\} \to w$, pero está claro que $\|q(rx_n)\| \leqslant \|rx_n\| \leqslant r\|x_n\|_1 \leqslant r$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $\|w\| \leqslant r = \|S(w)\|$ como queríamos demostrar. ■

El nombre del resultado anterior alude a la noción general de objeto proyectivo, que tiene sentido para los espacios de Banach, igual que para otras estructuras algebraicas o topológicas. Si $\mathcal{X}$ es una clase de espacios de Banach, se dice que un espacio de Banach X es **proyectivo** para $\mathcal{X}$, cuando todo elemento de $\mathcal{X}$ es isomorfo al cociente de X por un subespacio cerrado. Si de hecho se tiene que todo $Y \in \mathcal{X}$ es isométricamente isomorfo a un cociente de X, suele decirse que X es **isométricamente proyectivo** para la clase $\mathcal{X}$. Por tanto, acabamos de probar que l_1 *es isométricamente proyectivo para la clase de todos los espacios de Banach separables.* La utilidad de este resultado no está a la altura de su espectacularidad: más que darnos una representación provechosa para trabajar con cualquier espacio de Banach separable, nos informa de cuán variados pueden ser los cocientes de l_1.

10.3.2. Sumas directas en espacios de Banach

Como casi todos los teoremas importantes estudiados hasta ahora, el de la aplicación abierta también da información sobre sumas topológico-directas, probablemente la más general y útil. Para motivarla, recordemos una condición obviamente necesaria para que una suma directa de dos subespacios, sea topológico-directa. Supongamos que un espacio normado X es suma directa de dos subespacios: $X = M \oplus Z$. Si la suma es topológico-directa, está claro que M y Z han de ser cerrados en X, pues cada uno de ellos es el núcleo de la proyección sobre el otro, que es continua. Pues bien, el teorema de la aplicación abierta nos va a permitir probar fácilmente que, cuando X es completo, dicha condición obviamente necesaria, también es suficiente.

- **Sumas directas en espacios de Banach.** *Sea X un espacio de Banach, descompuesto como suma directa de dos subespacios: $X = M \oplus Z$. Si M y Z son cerrados en X, entonces dicha suma es topológico-directa.*

Como M y Z son espacios de Banach, el producto $M \times Z$ también lo es. Ahora bien, por ser $X = M \oplus Z$, tenemos una biyección lineal $\Phi : M \times Z \to X$, dada por $\Phi(y,z) = y + z$ para todo $(y,z) \in M \times Z$. Además Φ es continua, como restricción a $M \times Z$ de la suma de X, que es continua en $X \times X$. Por tanto Φ es un operador lineal continuo y biyectivo entre dos espacios de Banach. Por el teorema de los isomorfismos de Banach, tenemos que Φ es un isomorfismo, pero esta es una de las formas de decir que X es suma topológico-directa de M y Z. ■

10.4. Teorema de la gráfica cerrada

Vamos a obtener otro resultado equivalente a los tres estudiados anteriormente, pero que tiene un planteamiento bastante diferente, por lo que también se usa con otra finalidad. Mientras el teorema de la aplicación abierta, y los dos enunciados equivalentes al mismo, partían siempre de un operador lineal y continuo entre espacios de Banach, ahora vamos a obtener un criterio muy útil, precisamente para comprobar la continuidad de un operador lineal.

Recordemos que la **gráfica** de una función $f : X \to Y$, donde X e Y pueden ser conjuntos cualesquiera, viene dada por

$$\operatorname{Gr} f = \big\{ \big(x, f(x)\big) \, : \, x \in X \big\} \subset X \times Y$$

Cuando X e Y tienen alguna estructura adicional, es frecuente que ciertas propiedades de la función f puedan caracterizarse en términos de su gráfica. Por ejemplo, si X e Y son espacios vectoriales, es fácil ver que f es lineal si, y sólo si, $\operatorname{Gr} f$ es un subespacio de $X \times Y$.

Como es natural, si X e Y son espacios topológicos, decimos que una función $f : X \to Y$ **tiene gráfica cerrada**, cuando $\operatorname{Gr} f$ es un subconjunto cerrado de $X \times Y$, con la topología producto. Es fácil establecer la siguiente relación con la continuidad.

- *Sean X e Y espacios topológicos y supongamos que Y es un espacio de Hausdorff. Entonces toda función continua $f : X \to Y$ tiene gráfica cerrada.*

Probaremos que el conjunto $E = \big(X \times Y\big) \setminus \operatorname{Gr} f$ es abierto. Si $(x,y) \in E$, se tiene $y \neq f(x)$, luego al ser Y de Hausdorff, existen abiertos $V, W \subset Y$, tales que $f(x) \in V$, $y \in W$ y $V \cap W = \emptyset$. Como f es continua, el conjunto $U = f^{-1}(V)$ es un abierto de X con $x \in U$, luego $U \times W$ es entorno de (x,y), con lo que bastará ver que $U \times W \subset E$. En efecto, dado $(u,w) \in U \times W$, se tiene $f(u) \in V$ y $w \in W$, luego $f(u) \neq w$, es decir, $(u,w) \in E$. ■

Ejemplos sencillos, incluso en el caso $X = Y = \mathbb{R}$, muestran que el recíproco del resultado anterior no es cierto. Por ejemplo, fijado $\alpha \in \mathbb{R}$ podemos definir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ escribiendo

$$f(t) = \frac{1}{t} \quad \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \text{y} \quad f(0) = \alpha$$

Se tiene claramente $\operatorname{Gr} f = \big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, xy = 1 \big\} \cup \{(0,\alpha)\}$, luego f tiene gráfica cerrada, pero no es continua.

En la práctica, la hipótesis de que Y sea un espacio de Hausdorff siempre está presente, luego debemos pensar que, para una función entre espacios topológicos, tener gráfica cerrada es una propiedad bastante más débil que la continuidad. Se comprende ahora el interés del siguiente resultado:

Teorema de la gráfica cerrada de Banach. *Si X e Y son espacios de Banach y $T : X \to Y$ es un operador lineal que tiene gráfica cerrada, entonces T es continuo.*

Demostración. El producto $X \times Y$ es un espacio de Banach y $\operatorname{Gr} T$ es un subespacio cerrado de $X \times Y$, luego $\operatorname{Gr} T$ también es un espacio de Banach. La proyección en primera coordenada, es decir, la aplicación $(x,y) \mapsto x$, es un operador lineal continuo de $X \times Y$ en X, luego también lo será su restricción a la gráfica de T, que es el operador $\Phi : \operatorname{Gr} T \to X$ definido por:

$$\Phi\big(x\,,\,T(x)\big) = x \qquad \forall x \in X$$

Es evidente que Φ es biyectivo, luego el teorema de los isomorfismos de Banach nos dice que Φ^{-1} es continuo, pero es también evidente que

$$\Phi^{-1}(x) = \big(x\,,\,T(x)\big) \qquad \forall x \in X$$

Como ocurre con cualquier función que toma valores en un producto de espacios topológicos, la continuidad de Φ^{-1} equivale a la de sus dos componentes, pero su segunda componente es precisamente el operador T, así que T es continuo, como queríamos demostrar. ■

Ha quedado claro que el teorema anterior es una consecuencia casi inmediata del teorema de los isomorfismos de Banach, pero recíprocamente, admitiendo el teorema de la gráfica cerrada, vamos a ver que el de los isomorfismos de Banach resulta casi evidente.

En efecto, si X e Y son espacios de Banach y $T : X \to Y$ es un operador lineal continuo y biyectivo, observamos la clara relación entre las gráficas de T y T^{-1}:

$$\operatorname{Gr} T^{-1} = \big\{\, \big(y\,,\,T^{-1}(y)\big) \;:\; y \in Y \,\big\} = \big\{\, \big(T(x)\,,\,x\big) \;:\; x \in X \,\big\}$$

Vemos que $\operatorname{Gr} T^{-1}$ es la imagen de $\operatorname{Gr} T$ por la aplicación $(x,y) \mapsto (y,x)$, que obviamente es un homeomorfismo de $X \times Y$ sobre $Y \times X$. Como T es continuo, y por supuesto Y es un espacio de Hausdorff, sabemos que T tiene gráfica cerrada, luego T^{-1} también tiene gráfica cerrada. El teorema de la gráfica cerrada nos asegura que T^{-1} es continuo, como queríamos.

10.5. Consecuencias del teorema de la gráfica cerrada

La linealidad de un operador hace que sea muy cómodo averiguar si su gráfica es cerrada. De hecho, comprobamos fácilmente el siguiente criterio, que casi siempre se usa:

- *Si X e Y son espacios normados, un operador lineal $T : X \to Y$ tiene gráfica cerrada si, y sólo si, verifica la siguiente condición:*

$$x_n \in X \;\; \forall n \in \mathbb{N}\,, \quad \{x_n\} \to 0\,, \quad \{T(x_n)\} \to y \in Y \qquad \Longrightarrow \qquad y = 0 \tag{5}$$

Si T tiene gráfica cerrada y tomamos una sucesión $\{x_n\}$ como en (5), en el producto $X \times Y$ se tiene $\{(x_n, T(x_n))\} \to (0,y)$, luego $(0,y) \in \operatorname{Gr} T$, es decir, $y = T(0) = 0$. Recíprocamente, supongamos (5) para probar que T tiene gráfica cerrada. Si $\{(z_n, T(z_n))\}$ es una sucesión de puntos de $\operatorname{Gr} T$, que converge a $(z,w) \in X \times Y$, debemos ver que $w = T(z)$. Si $x_n = z_n - z$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos $\{x_n\} \to 0$ y $\{T(x_n)\} = \{T(z_n) - T(z)\} \to w - T(z) \in Y$, luego (5) nos dice que $w - T(z) = 0$. ■

Para entender la utilidad de la condición (5), basta compararla con la continuidad de T, que equivale a la continuidad en 0, por lo que puede expresarse como sigue:

$$x_n \in X \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \{x_n\} \to 0 \quad \Longrightarrow \quad \{Tx_n\} \to 0 \tag{6}$$

Nótese la sutil pero importante diferencia entre (5) y (6): en ambos casos se parte de una sucesión $\{x_n\}$ convergente a cero en X, pero en (6) hay que probar que $\{Tx_n\}$ converge a cero en Y, mientras que en (5) se supone que $\{Tx_n\}$ es convergente y sólo se debe probar que su límite es cero. Cualquiera que tenga experiencia con la convergencia de sucesiones, sabe que lo segundo suele ser más fácil que lo primero: calcular el límite de una sucesión, sabiendo de antemano que la sucesión converge, es mucho más fácil que probar directamente la convergencia de la sucesión. Al obtener algunas consecuencias del teorema de la gráfica cerrada, comprobaremos que efectivamente (6) es mucho más fácil de comprobar que (5), de ahí la gran utilidad del teorema.

Como ejemplo que sirve de motivación, trabajemos en el espacio de Banach $C[0,1]$ de todas las funciones continuas en el intervalo $[0,1]$.

- *Sea $T : C[0,1] \to C[0,1]$ un operador lineal que verifique la siguiente condición: para toda sucesión $\{f_n\}$ en $C[0,1]$ que converja uniformemente a cero en $[0,1]$, se tiene que la sucesión $\{T(f_n)\}$ converge puntualmente a cero en $[0,1]$. Entonces T es continuo.*

Nótese que, para probar directamente la continuidad de T, dada una sucesión $\{f_n\}$ como la del enunciado, deberíamos ver que $\{T(f_n)\}$ converge uniformemente a cero en $[0,1]$, pero la hipótesis sólo nos da la convergencia puntual. Sin embargo, como $C[0,1]$ es un espacio de Banach, basta probar que T tiene gráfica cerrada.

Así pues, tomamos una sucesión $\{f_n\}$ como en el enunciado, pero suponemos que $\{T(f_n)\}$ converge uniformemente en $[0,1]$ a una función $g \in C[0,1]$. Vemos entonces que $\{T(f_n)\}$ converge puntualmente en $[0,1]$ a cero, pero también a g, luego $g(t) = 0$ para todo $t \in [0,1]$, y hemos probado que T tiene gráfica cerrada, como queríamos. ■

Como principal consecuencia del teorema de la gráfica cerrada, probaremos una versión abstracta, y mucho más general, del resultado anterior.

- *Sean X e Y espacios de Banach, y E un subconjunto de Y^* que separe los puntos de Y, es decir, tal que*
$$y \in Y, \quad y^*(y) = 0 \ \ \forall\, y^* \in E \quad \Longrightarrow \quad y = 0$$
Todo operador lineal $T : X \to Y$, tal que $y^* \circ T \in X^*$ para todo $y^* \in E$, es continuo.

Para $\{x_n\} \to 0$ en X, supongamos que $\{T(x_n)\} \to y \in Y$. Fijado un $y^* \in E$, se tiene entonces que $\{y^*(T(x_n))\} \to y^*(y)$, pero de $\{x_n\} \to 0$ se deduce que $\{y^*(T(x_n))\} \to 0$, ya que $y^* \circ T$ es continuo. Por tanto, $y^*(y) = 0$, lo cual es válido para todo $y^* \in E$. Como E separa los puntos de Y, concluimos que $y = 0$. Esto prueba que T tiene gráfica cerrada, luego es continuo. ■

El resultado probado previamente en $C[0,1]$ es caso particular de este. Para verlo usamos, para cada $t \in [0,1]$, el funcional de Dirac δ_t dado por $\delta_t(f) = f(t)$ para toda $f \in C[0,1]$. Sabemos que $E = \{\delta_t : t \in [0,1]\} \subset C[0,1]^*$, y es claro que E separa los puntos de $C[0,1]$. Finalmente, suponer que $\delta_t \circ T$ es continuo para todo $t \in [0,1]$, equivale a suponer que, para toda sucesión $\{f_n\}$ que converja uniformemente a cero en $[0,1]$, se tiene que $\{\delta_t(T(x_n))\} \to 0$ para todo $t \in [0,1]$, es decir, que $\{T(f_n)\}$ converge puntualmente a cero en $[0,1]$.

En general, para un espacio de Banach arbitrario Y, siempre podemos usar $E = Y^*$, pues el teorema de Hahn-Banach nos asegura que Y^* separa los puntos de Y. Sin embargo, si Y es un espacio de Banach concreto, no suele ser necesario tomar $E = Y^*$, es decir, se dispone de un conjunto $E \subset Y^*$, que separa los puntos de Y, pero está muy lejos de coincidir con Y^*. Es lo que ha ocurrido antes con los funcionales de Dirac en el caso $Y = C[0,1]$. Otro ejemplo destacable es el siguiente:

- *Sea X un espacio de Banach, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ y $T : X \to l_p$ un operador lineal. Supongamos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, el funcional lineal $x \mapsto (T(x))(n)$ es continuo. Entonces T es continuo.*

Fijado $n \in \mathbb{N}$, escribimos $y_n^*(y) = y(n)$ para todo $y \in l_p$, y es claro que $y_n^* \in l_p^*$. También es evidente que el conjunto $E = \{y_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ separa los puntos de l_p. Por hipótesis, $y_n^* \circ T \in X^*$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego el resultado anterior nos dice que T es continuo. ■