Tema 9

Teorema de Banach-Steinhaus

Tras el teorema de Hahn-Banach, abordamos ahora el estudio del segundo de los principios fundamentales del Análisis Funcional, llamado *Teorema de Banach-Steinhaus.* Su demostración se deducirá muy fácilmente de un resultado puramente topológico, cuya historia merece un comentario.

En los primeros años del siglo XX solía hacerse con frecuencia en espacios de funciones un tipo de razonamiento, conocido como *método de condensación de singularidades,* que hoy se considera como precedente del teorema de Banach-Steinhaus.

Paralelamente, habían empezado a usarse los llamados *métodos de categoría,* que permiten distinguir, de manera provechosa, entre subconjuntos "grandes" y "pequeños" de un espacio topológico. Estos métodos tienen al parecer su origen en un trabajo de W. Osgood (1897), en el que se prueba que la intersección de una sucesión de abiertos densos en $\mathbb{R}$ también es un conjunto denso en $\mathbb{R}$. Dos años después, R. Baire observa que el mismo resultado es cierto en $\mathbb{R}^N$ y lo aprovecha en su estudio de las funciones que se obtienen como límites puntuales de sucesiones de funciones continuas (llamadas *funciones de la primera clase de Baire*). Su principal resultado es una caracterización de dichas funciones mediante sus propiedades de continuidad, que se conoce como el *Gran Teorema de Baire*, y los métodos de categoría juegan un papel clave en su demostración.

Fue Banach quien observó que el mencionado resultado de Osgood y Baire, no sólo es cierto en $\mathbb{R}^N$ sino también, con la misma demostración de Baire, en todo espacio métrico completo, dando así forma definitiva a lo que hoy día conocemos como *teorema de Baire,* o dicho con más propiedad, *lema de categoría de Baire.* Al mismo tiempo, Banach mostró que, usando este lema, es posible simplificar y clarificar enormemente los resultados basados en el método de condensación de singularidades, dejando así establecida la utilidad de los métodos de categoría en Análisis Funcional. En particular, dio una prueba muy sencilla de un resultado obtenido previamente por H. Steinhaus, llamado *teorema de cierre de Steinhaus,* que desde entonces ha quedado como una fácil consecuencia del teorema de Banach-Steinhaus.

9.1. Lema de categoría de Baire

Empezamos introduciendo la noción topológica en que se basan los métodos de categoría. Si E es un subconjunto de un espacio topológico X, diremos que E es **magro** en X, cuando el cierre de E tenga interior vacío: $\operatorname{int}\left(\overline{E}\right) = \emptyset$. Tomando entonces $F = \overline{E}$, vemos que $E \subset F$ donde F es un conjunto cerrado con interior vacío. Pero recíprocamente, si $E \subset F = \overline{F} \subset X$ donde $\operatorname{int}(F) = \emptyset$, se tiene $\operatorname{int}\left(\overline{E}\right) \subset \operatorname{int}(F) = \emptyset$, luego E es magro en X. Así pues, E es magro en X si, y sólo si, E está contenido en un subconjunto cerrado de X con interior vacío.

Si ahora $A \subset X$, se dice que A es un conjunto de **primera categoría** en X, cuando A puede expresarse como unión numerable de conjuntos magros en X, es decir, cuando A está contenido en una unión numerable de subconjuntos cerrados de X, todos ellos con interior vacío. En otro caso se dice que A es de **segunda categoría** en X.

Observemos que todo subconjunto de un conjunto de primera categoría en X es de primera categoría en X, así como que toda unión numerable de conjuntos de primera categoría en X es de primera categoría en X.

Para que la intuición ayude a entender las definiciones anteriores, debemos pensar que un conjunto magro es topológicamente “muy pequeño”. Por ejemplo, todo subconjunto finito de un espacio normado X es magro en X. A partir de esta idea básica, los subconjuntos de un espacio topológico X se han clasificado en dos tipos: los de primera categoría, que podemos ver como topológicamente “pequeños”, y los de segunda categoría, que serían “grandes”. Por supuesto, estas nociones dependen de manera esencial de la topología que tenemos en X. Por ejemplo, si en un conjunto no vacío X consideramos la topología discreta, está claro que todo subconjunto no vacío de X es de segunda categoría en X.

Aclaremos que las nociones de categoría son relativas, dependen del espacio ambiente X. Por ejemplo, si F es un subconjunto finito de un espacio normado X, y E es un subconjunto no vacío de F, entonces E es magro en X, pero la topología inducida por X en F es la discreta, luego E es de segunda categoría en F con dicha topología.

Sin embargo, comprobamos ahora fácilmente que las nociones de categoría dependen del espacio ambiente en la forma que cabe esperar: si en X tenemos la topología inducida por otro espacio Y, todo subconjunto “pequeño” de X es también “pequeño” como subconjunto de Y.

- *Sea Y un espacio topológico y, en un subconjunto $X \subset Y$, consideremos la topología inducida por Y. Entonces, todo conjunto magro en X es magro en Y, luego todo conjunto de primera categoría en X es de primera categoría en Y.*

Si E es un subconjunto cerrado de X, que tiene interior vacío en X, bastará probar que E es magro en Y. Si F es el cierre de E en Y, debemos pues probar que F tiene interior vacío. Observemos que, como E es cerrado en X, se tiene $F \cap X = E$. Si U es el interior de F en Y, tenemos que $U \cap X$ es un abierto de X, que verifica $U \cap X \subset F \cap X = E$, pero E tiene interior vacío en X, luego se tiene $U \cap X = \emptyset$. Entonces $E \subset X \subset Y \setminus U$, pero $Y \setminus U$ es cerrado en Y, luego $F \subset Y \setminus U$. Así pues, tenemos $U \subset F \subset Y \setminus U$, luego $U = \emptyset$ como se quería. ■

Para entender la forma en que suelen usarse las nociones de categoría, analizaremos cómo se demuestra la abundancia de números trascendentes, usando que $\mathbb{R}$ no es numerable.

Recordemos que un número real es *algebraico* si es raíz de un polinomio con coeficientes enteros, y *trascendente* en otro caso. Para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $\mathcal{P}_n$, de los polinomios de grado n con coeficientes enteros, es numerable, porque existe una obvia aplicación inyectiva de $\mathcal{P}_n$ en $\mathbb{Z}^{n+1}$. Por tanto, el conjunto $\mathcal{P} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n$ de todos los polinomios no constantes con coeficientes enteros, también es numerable. Como cada polinomio tiene un conjunto finito de raíces, deducimos que el conjunto de los números algebraicos es numerable. Como $\mathbb{R}$ no es numerable, concluimos que el conjunto de los números trascendentes no es numerable. Nótese que hemos probado la existencia, e incluso la abundancia, de números trascendentes, sin dar un sólo ejemplo de número trascendente, cosa que no es del todo fácil.

Las nociones de categoría permiten hacer razonamientos análogos al anterior, pero en vez de trabajar con conjuntos numerables y no numerables, usamos la distinción entre conjuntos de primera y segunda categoría. Habitualmente, esta distinción es más refinada, porque los conjuntos numerables son de primera categoría, pero el recíproco no es cierto, luego entre los conjuntos no numerables, todavía podemos distinguir si son de primera o de segunda categoría. Por ejemplo, el conjunto ternario de Cantor $C \subset \mathbb{R}$ es compacto y tiene interior vacío, luego es magro en $\mathbb{R}$, pero es sabido que C es equipotente a $\mathbb{R}$. Para un espacio normado X, de dimensión mayor que 1, las cosas son aún más claras, pues todo subespacio de dimensión 1 es magro en X, pero no es numerable.

Es claro que, para que los razonamientos del tipo que hemos sugerido tengan interés, hemos de trabajar en un espacio topológico que sea de segunda categoría en sí mismo. Se explica así la gran utilidad del siguiente resultado, que proporciona abundantes ejemplos de espacios topológicos con dicha propiedad.

Lema de categoría de Baire. *Si X es un espacio métrico completo, todo abierto no vacío de X es de segunda categoría en X. En particular, X es de segunda categoría en sí mismo.*

Demostración. Expresamos la tesis del lema de forma equivalente, para probarla con más comodidad. Se trata de probar que todo conjunto de primera categoría en X tiene interior vacío, y ello es tanto como decir que, si $\{F_n\}$ es una sucesión de subconjuntos cerrados de X, todos ellos con interior vacío, entonces el conjunto $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ tiene interior vacío. Si para cada $n \in \mathbb{N}$, tomamos $G_n = X \setminus F_n$, vemos que G_n es abierto, con $\overline{G_n} = X \setminus \operatorname{int}(F_n)$, luego F_n tiene interior vacío si, y sólo si, G_n es denso en X. Del mismo modo, vemos que $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ tiene interior vacío si, y sólo si, $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ es denso en X. Por tanto, la tesis del enunciado equivale a la siguiente afirmación, que es la que vamos a probar: si $\{G_n\}$ es una sucesión de abiertos densos en X, entonces el conjunto $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ es denso en X. Dado un abierto no vacío $G_0 \subset X$, deberemos por tanto probar que $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ tiene intersección no vacía con G_0, es decir, que $\bigcap_{n=0}^{\infty} G_n \neq \emptyset$.

Como G_0 es un abierto no vacío de X, tomamos una bola cerrada B_0, de radio estrictamente positivo, contenida en G_0.

Por hipótesis, G_1 es un abierto denso en X, luego $\operatorname{int}(B_0) \cap G_1$ es un abierto no vacío, que contendrá una bola cerrada de radio estrictamente positivo, que podemos tomar tan pequeño como queramos. Tenemos por tanto una bola cerrada B_1, de radio $r_1 \in \mathbb{R}^+$, verificando que

$$B_1 \subset B_0 \cap G_1 \qquad \text{y} \qquad r_1 < 1$$

e iniciamos de esta forma una construcción por inducción.

Supongamos que, para un $n \in \mathbb{N}$, hemos construido una bola cerrada B_n, de radio $r_n \in \mathbb{R}^+$, verificando que

$$B_n \subset B_{n-1} \cap G_n \qquad \text{y} \qquad r_n < 1/n \tag{1}$$

Entonces $\operatorname{int}(B_n) \cap G_{n+1}$ es un abierto no vacío de X, que contendrá una bola cerrada de radio estrictamente positivo, que podemos tomar tan pequeño como queramos. Por tanto, existe una bola cerrada B_{n+1}, de radio $r_{n+1} \in \mathbb{R}^+$, verificando que

$$B_{n+1} \subset B_n \cap G_{n+1} \qquad \text{y} \qquad r_{n+1} < 1/(n+1)$$

que es (1) con $n+1$ en vez de n.

Así pues, por inducción, hemos construido una sucesión $\{B_n\}$ de bolas cerradas, de forma que, si $\{r_n\}$ es la sucesión de sus radios, se verifica (1) para todo $n \in \mathbb{N}$. En particular, $\{B_n\}$ es decreciente, es decir, para $k,n \in \mathbb{N}$ con $k \leqslant n$, se tiene $B_n \subset B_k$.

Si para cada $n \in \mathbb{N}$, elegimos un punto $x_n \in B_n$, comprobamos fácilmente que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, tomamos $k \in \mathbb{N}$ tal que $2/k < \varepsilon$, y para $n,m \geqslant k$ se tiene que $x_n, x_m \in B_k$, pero la bola B_k tiene radio $r_k < 1/k$, luego $d(x_n, x_m) < 2/k < \varepsilon$.

Como por hipótesis X es completo, la sucesión $\{x_n\}$ converge a un punto $x \in X$, y es fácil ver que $x \in B_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En efecto, fijado $n \in \mathbb{N}$, se tiene $x_{n+h} \in B_n$ para todo $h \in \mathbb{N}$, luego $x = \lim\limits_{h \to \infty} x_{n+h} \in B_n$, ya que B_n es un conjunto cerrado. Así pues, tenemos $x \in B_n \subset G_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pero también $x \in B_1 \subset B_0 \subset G_0$, luego $x \in \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} G_n$, y esta intersección no es vacía, como queríamos demostrar. ■

Resaltemos que la tesis del lema anterior es puramente topológica, nos da una condición necesaria para que la topología de un espacio sea la generada por una distancia completa. Por ejemplo, no existe una distancia completa en $\mathbb{Q}$ que genere su topología (la inducida por $\mathbb{R}$), pues obviamente $\mathbb{Q}$ es de primera categoría en sí mismo.

Por otra parte, el lema anterior nos dice que $\mathbb{R}$ es de segunda categoría en sí mismo. Puesto que $\mathbb{Q}$ es de primera categoría en $\mathbb{R}$, deducimos que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es de segunda categoría en $\mathbb{R}$. Esto implica que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ no es numerable, pero tenemos una afirmación más fuerte, pues sabemos que un conjunto no numerable puede ser de primera categoría en $\mathbb{R}$.

Mediante un razonamiento similar, obtenemos una consecuencia interesante para espacios de Banach:

- *La dimensión de un espacio de Banach es finita o no numerable.*

Si X es un espacio de Banach de dimensión infinita y $U = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ un conjunto infinito y numerable de vectores linealmente independientes en X, bastará probar que U no puede ser una base algebraica de X, es decir, que $\operatorname{Lin} U \neq X$. Fijado $n \in \mathbb{N}$, sea $X_n = \operatorname{Lin}\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, y recordemos que, como consecuencia del teorema de Hausdorff, X_n es cerrado en X. Además, como la dimensión de X no es finita, tenemos $X_n \neq X$, de donde se deduce que $\operatorname{int}(X_n) = \emptyset$. En efecto, en otro caso existirían $x \in X_n$ y $r \in \mathbb{R}^+$ tales que $x + rB \subset X_n$ donde B es la bola unidad de X, pero al ser X_n un subespacio de X, se tendría que $B \subset (1/r)(X_n - x) \subset X_n$, de donde se deduciría que $X = \mathbb{R}^+ B \subset \mathbb{R}^+ X_n = X_n$, lo cual es falso como ya se ha dicho. Así pues X_n es un conjunto magro en X, y esto es válido para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\operatorname{Lin} U = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, deducimos que $\operatorname{Lin} U$ es un conjunto de primera categoría en X. Por el lema de Baire sabemos que X es de segunda categoría en sí mismo, luego $\operatorname{Lin} U \neq X$ como queríamos demostrar. ■

Comentemos, sin dar la demostración, una aplicación clásica y muy vistosa del lema de categoría de Baire. A lo largo del siglo XIX, aparecieron diversos ejemplos (el primero y más famoso se debe a Weierstrass) de funciones continuas en un intervalo compacto, digamos $[0,1]$, que no son derivables en ningún punto. Pues bien, considerando el espacio de Banach $C[0,1]$, no es del todo difícil comprobar que el subconjunto formado por las funciones que admiten al menos una derivada lateral en algún punto, es de primera categoría en $C[0,1]$. Por tanto, el lema de categoría de Baire nos asegura que *el conjunto de las funciones continuas en* $[0,1]$ *que no son derivables en ningún punto de* $[0,1]$ *es de segunda categoría en* $C[0,1]$. Podríamos decir que la "gran mayoría" de las funciones continuas en $[0,1]$ no son derivables en ningún punto. Obsérvese cómo el lema de Baire permite hacer razonamientos del tipo que habíamos anunciado. Probamos la abundancia de un cierto tipo de funciones, sin dar un sólo ejemplo de una función de ese tipo, cosa que no es fácil.

Pasamos ya a probar la primera consecuencia fundamental del lema de Baire, en el contexto del Análisis Funcional.

9.2. Teorema de Banach-Steinhaus

Este resultado se conoce también como *principio de acotación uniforme*, porque permite pasar de una acotación de tipo "puntual" a una acotación de tipo "uniforme" para una familia de operadores lineales y continuos. Concretemos estos dos tipos de acotación.

Dados dos espacios normados X e Y, sea $E \subset L(X,Y)$ un conjunto de operadores lineales y continuos. Es natural decir que E está **acotado en un punto** $x \in X$, cuando $\{T(x) : T \in E\}$ es un subconjunto acotado de Y, simbólicamente: $\sup\big\{ \|T(x)\| : T \in E \big\} < \infty$.

Decimos ahora que E está **puntualmente acotado** en un conjunto $A \subset X$, cuando E está acotado en cada punto de A, es decir, $\sup\big\{ \|T(x)\| : T \in E \big\} < \infty$ para todo $x \in A$. En tal caso, para cada $x \in A$, podemos encontrar una constante $M_x \in \mathbb{R}^+$ tal que $\|T(x)\| \leqslant M_x$ para todo $T \in E$, pero la constante M_x puede depender del punto $x \in A$ considerado. Hablamos de acotación uniforme cuando podemos evitar esa dependencia, es decir, cuando una misma constante es válida para todos los puntos de A.

Así pues, decimos que E está **uniformemente acotado** en un conjunto $A \subset X$, cuando existe una constante $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $\| T(x) \| \leqslant M$ para todo $x \in A$ y todo $T \in E$, es decir, escrito simbólicamente: $\sup \big\{ \| T(x) \| \, : \, x \in A \,, \;\; T \in E \big\} < \infty$.

Nos interesa sobre todo el caso en que A es la bola unidad de X, que denotamos por B. Si un conjunto de operadores $E \subset L(X,Y)$, está puntualmente acotado en B, entonces E está puntualmente acotado en X, pues para cada $x \in X$ podemos escribir $x = \|x\| u$ con $u \in B$ y obtenemos que

$$\sup \big\{ \| T(x) \| \, : \, T \in E \big\} = \|x\| \, \sup \big\{ \| T(u) \| \, : \, T \in E \big\} < \infty$$

Por otra parte, con respecto a la acotación uniforme, observamos que

$$\sup \big\{ \| T(u) \| \, : \, u \in B \,, \;\; T \in E \big\} = \sup \big\{ \| T \| \, : \, T \in E \big\}$$

luego E está uniformemente acotado en B si, y sólo si, E está **acotado en norma**, es decir, E es un subconjunto acotado del espacio de operadores $L(X,Y)$.

Por sorprendente que pueda parecer, la complitud del espacio X nos va a permitir pasar de la acotación puntual a la uniforme en la bola unidad de X, para todo conjunto de operadores lineales y continuos en X. De hecho, el siguiente enunciado tiene aún más contenido.

Teorema de Banach-Steinhaus. *Sea E un conjunto de operadores lineales y continuos de un espacio de Banach X en un espacio normado Y. Consideremos el conjunto A formado por los puntos de X en los que E está acotado: $A = \big\{ x \in X \; : \; \sup\{ \| T(x) \| \, : \, T \in E \} < \infty \big\}$. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *A es un conjunto de segunda categoría en X*

(ii) *$A = X$, es decir, E está puntualmente acotado en X*

(iii) *E está uniformemente acotado en la bola unidad de X:* $\sup \big\{ \| T \| \, : \, T \in E \big\} < \infty$.

Demostración. De (iii) se deduce que E está puntualmente acotado en la bola unidad, y por tanto en X, luego $(iii) \Rightarrow (ii)$. Por el lema de categoría de Baire, X es de segunda categoría en sí mismo, luego $(ii) \Rightarrow (i)$. Sólo queda probar que $(i) \Rightarrow (iii)$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos el conjunto

$$F_n = \big\{ x \in X \, : \, \| T(x) \| \leqslant n \;\; \forall T \in E \big\} = \bigcap_{T \in E} \big\{ x \in X \, : \, \| T(x) \| \leqslant n \big\}$$

Como cada $T \in E$ es una función continua, y la norma de Y también lo es, vemos que F_n es un subconjunto cerrado de X. Como $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, deducimos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{int}(F_m) \neq \emptyset$, pues en otro caso A sería un conjunto de primera categoría en X, en contradicción con la hipótesis (i). Por tanto, existen $x \in X$ y $r \in \mathbb{R}^+$ tales que $x + rB \subset F_m$, donde B es la bola unidad de X. Entonces, para cualesquiera $u \in B$ y $T \in E$, se tiene

$$\| T(u) \| = \left\| T \left(\frac{1}{r} \big(x + ru - x \big) \right) \right\| \leqslant \frac{1}{r} \big(\| T(x+ru) \| + \| T(x) \| \big) \leqslant \frac{2m}{r}$$

Deducimos que $\| T \| \leqslant 2m / r$ para todo $T \in E$, luego se cumple (iii), como queríamos. ■

Naturalmente, la parte más útil del teorema anterior es la afirmación $(ii) \Rightarrow (iii)$ que permite, como habíamos anunciado, pasar de la acotación puntual a la uniforme. La afirmación (i) tiene interés cuando usamos el teorema por la negativa: si el conjunto E no está acotado en norma, de $(ii) \Rightarrow (iii)$ deducimos solamente la *existencia* de algún punto de X en el que E no está acotado, mientras que de $(i) \Rightarrow (iii)$ obtenemos la *abundancia* de tales puntos, puesto que forman un conjunto de segunda categoría en X. Enseguida veremos un ejemplo concreto de esta situación.

Resaltemos que la demostración del teorema de Banach-Steinhaus es muy sencilla, si bien involucra el lema de categoría de Baire, cuya prueba tampoco es difícil. Por tanto, cuando usamos el teorema en algún caso concreto, nuestro razonamiento es muy elemental.

Vamos a presentar algunas consecuencias, que históricamente tuvieron gran repercusión, por lo que son responsables de la notoriedad que el teorema adquirió rápidamente.

9.3. Series de Fourier divergentes

Vamos a trabajar en el espacio $C(\mathbb{T})$, de todas las funciones complejas continuas en la circunferencia $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$. Sabemos que $C(\mathbb{T})$ es un espacio de Banach con la norma del máximo, pero en Análisis de Fourier, para manejar con más comodidad la integral, es costumbre describir los elementos de $\mathbb{C}(\mathbb{T})$ como funciones de variable real. Para ello, a cada $g \in C(\mathbb{T})$ asociamos la función $g^* : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dada por

$$g^*(t) = g\big(e^{it}\big) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Es claro que g^* es una función continua y 2π-periódica, con $g^*(\mathbb{R}) = g(\mathbb{T})$, de donde

$$\max\big\{\,|g(z)| : z \in \mathbb{T}\big\} = \max\big\{\,|g^*(t)| : t \in \mathbb{R}\big\}$$

En sentido inverso, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es una función continua y 2π-periódica, para cada $z \in \mathbb{T}$ definimos $g(z) = f(\arg z)$, donde $\arg z$ es el argumento principal de z, aunque la periodicidad de f permite usar cualquier otro argumento de z. Se comprueba sin dificultad que de esta forma se obtiene la única función continua $g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ que verifica $g^* = f$. Tenemos así una correspondencia biunívoca entre funciones continuas en la circunferencia y funciones continuas y 2π-periódicas en $\mathbb{R}$. Podemos por tanto entender que $C(\mathbb{T})$ es el espacio de Banach formado por todas las funciones continuas y 2π-periódicas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$, cuya norma viene dada por:

$$\|f\|_\infty = \max\big\{\,|f(t)| : t \in \mathbb{R}\big\} \qquad \forall f \in C(\mathbb{T})$$

Pues bien, los **coeficientes de Fourier** de una función $f \in C(\mathbb{T})$ vienen dados por

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Está claro que esta definición puede hacerse para funciones mucho más generales, pero por ahora sólo nos interesa el caso de una función continua.

Usando los coeficientes de Fourier, se define la **serie de Fourier** de una función $f \in C(\mathbb{T})$, denotada por $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\, e^{int}$, que es la sucesión $\{S_n(f)\}$, de funciones en $C(\mathbb{T})$, definida por:

$$S_n(f,t) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{ikt} \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

donde por comodidad hemos escrito $S_n(f,t)$ en lugar de $\big(S_n(f)\big)(t)$. Suele decirse que, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, la función $S_n(f)$ es la n-ésima suma parcial de la serie de Fourier de f.

Siempre para una función continua $f \in C(\mathbb{T})$, durante más de medio siglo se pensó que la serie de Fourier de f debería converger a f puntualmente en $\mathbb{R}$, hasta que el matemático británico P. Du Bois-Reymond publicó en 1876 un ejemplo de una función continua $f \in C(\mathbb{T})$ cuya serie de Fourier no converge en el origen. Hoy día sigue sin ser fácil dar explícitamente un ejemplo de este tipo. Sin embargo, el teorema de Banach-Steinhaus permite probar con facilidad que tales ejemplos abundan, sin dar explícitamente ninguno.

Para ello empezamos expresando la suma parcial de una serie de Fourier como una integral, una idea bien conocida desde la época de Fourier. Para cualesquiera $f \in C(\mathbb{T})$ y $n \in \mathbb{N}$ se tiene claramente que

$$S_n\big(f,0\big) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\sum_{k=-n}^{n} e^{-ikt} \right) dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, D_n(t)\, dt$$

donde hemos escrito

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{-ikt} = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

La sucesión de funciones $\{D_n\}$ se conoce como *núcleo de Dirichlet*, y está bien claro que la convergencia de las series de Fourier tiene estrecha relación con sus propiedades.

Fijado $n \in \mathbb{N}$, pensemos en $S_n(f,0)$ como función de $f \in C(\mathbb{T})$, más concretamente en el funcional $\varphi_n : C(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$ dado por

$$\varphi_n(f) = S_n(f,0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, D_n(t)\, dt \qquad \forall f \in C(\mathbb{T}) \tag{2}$$

Enseguida comprobamos que φ_n es lineal y continuo, calculando además su norma. De hecho, con el mismo esfuerzo probamos algo más general.

- *Fijada una función $h \in \mathbb{C}(T)$ consideramos el funcional $\varphi : C(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$ definido por*

$$\varphi(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, h(t)\, dt \qquad \forall f \in C(\mathbb{T})$$

Se tiene entonces que $\varphi \in C(\mathbb{T})^*$ con $\|\varphi\| = \int_{-\pi}^{\pi} |h(t)|\, dt$.

Es claro que φ es lineal y, para toda $f \in C(\mathbb{T})$, se tiene

$$\big|\varphi(f)\big| \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\,|h(t)|\,dt \leqslant \big\|f\big\|_\infty \int_{-\pi}^{\pi} |h(t)|\,dt$$

luego $\varphi \in C(\mathbb{T})^*$ con $\|\varphi\| \leqslant \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |h(t)|\,dt$, y se trata ahora de probar la otra desigualdad.

Usando la conjugación en $\mathbb{C}$, consideramos la sucesión de funciones $\{f_n\}$ dada por

$$f_n(t) = \frac{n\,\overline{h(t)}}{n|h(t)|+1} \qquad \forall t \in \mathbb{R} \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, vemos que $f_n \in C(\mathbb{T})$ con $|f_n(t)| \leqslant 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$, luego $\big\|f_n\big\|_\infty \leqslant 1$. Por otra parte se tiene

$$|\varphi(f_n)| = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{n\,|h(t)|^2}{n|h(t)|+1}\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} |h(t)|\,dt - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|h(t)|}{n|h(t)|+1}\,dt$$

Como evidentemente se tiene $|h(t)|/\big(n|h(t)|+1\big) \leqslant 1/n$ para todo $t \in \mathbb{R}$, la última integral es menor o igual que $2\pi/n$ y concluimos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |h(t)|\,dt - \frac{2\pi}{n} \leqslant |\varphi(f_n)| \leqslant \|\varphi\|\,\|f_n\|_\infty \leqslant \|\varphi\| \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

de donde se deduce claramente la desigualdad buscada. ■

Para $n \in \mathbb{N}$, el resultado anterior se aplica al funcional φ_n definido en (2), obteniendo

$$\varphi_n \in C(\mathbb{T})^*, \quad \big\|\varphi_n\big\| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \big|D_n(t)\big|\,dt \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{3}$$

El siguiente paso consiste en usar algunas propiedades sencillas del núcleo de Dirichlet para conseguir una estimación de la última integral.

- *Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene:* $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \big|D_n(t)\big|\,dt \geqslant \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1}$

Fijado $n \in \mathbb{N}$, para todo $t \in \mathbb{R}$ vemos claramente que

$$\big(e^{it}-1\big)D_n(t) = \sum_{k=-n+1}^{n+1} e^{ikt} - \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = e^{i(n+1)t} - e^{-int}$$

Multiplicando ambos miembros por $e^{-it/2}$ obtenemos

$$\big(e^{it/2} - e^{-it/2}\big)D_n(t) = e^{i(2n+1)t/2} - e^{-i(2n+1)t/2}$$

y dividiendo ambos miembros por $2i$ concluimos finalmente que

$$\operatorname{sen}(t/2)\,D_n(t) = \operatorname{sen}\big((2n+1)t/2\big) \qquad \forall t \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N} \tag{4}$$

Nótese que, para $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, se tiene $\operatorname{sen}(t/2) \neq 0$, y la igualdad anterior nos da una expresión para $D_n(t)$ que permitirá estimar la integral que nos interesa. Para abreviar la notación escribiremos

$$\Delta_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| D_n(t) \right| dt \qquad \text{y} \qquad \varepsilon_n = \frac{2\pi}{2n+1}$$

Directamente de su definición, se deduce que D_n es una función par, con lo que tenemos

$$\Delta_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left| D_n(t) \right| dt \geqslant \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon_n}^{n\varepsilon_n} \left| D_n(t) \right| dt \tag{5}$$

Para $t \in [\varepsilon_n, \pi]$ es claro que $0 < \operatorname{sen}(t/2) \leqslant t/2$, y usando (4), de (5) deducimos que

$$\Delta_n \geqslant \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon_n}^{\pi} \frac{\left| \operatorname{sen}\big((2n+1)t/2\big) \right|}{\operatorname{sen}(t/2)} dt \geqslant \frac{2}{\pi} \int_{\varepsilon_n}^{\pi} \frac{\left| \operatorname{sen}\big((2n+1)t/2\big) \right|}{t} dt \tag{6}$$

En la última integral usamos ahora el cambio de variable $(2n+1)t/2 = s$, obteniendo

$$\Delta_n \geqslant \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{(2n+1)\pi}{2}} \frac{|\operatorname{sen} s|}{s} ds = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{(2k-1)\pi}{2}}^{\frac{(2k+1)\pi}{2}} \frac{|\operatorname{sen} s|}{s} ds \tag{7}$$

Para $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, en la correspondiente integral usamos que $s \leqslant (2k+1)\pi/2$. Como la función $s \mapsto |\operatorname{sen} s|$ es π-periódica, obtenemos que

$$\frac{(2k+1)\pi}{2} \int_{\frac{(2k-1)\pi}{2}}^{\frac{(2k+1)\pi}{2}} \frac{|\operatorname{sen} s|}{s} ds \geqslant \int_{\frac{(2k-1)\pi}{2}}^{\frac{(2k+1)\pi}{2}} |\operatorname{sen} s| ds = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\operatorname{sen} s| ds = 2$$

Sustituyendo en (7) las n desigualdades así obtenidas, llegamos claramente a

$$\Delta_n \geqslant \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1}$$

que es la desigualdad buscada. ■

Como la serie $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{2n+1}$ diverge, obtenemos que $\{\Delta_n\} \to +\infty$, y en vista de (3) tenemos que $\big\{ \|\varphi_n\| \big\} \to +\infty$. Por tanto $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto de funcionales lineales continuos en el espacio de Banach $C(\mathbb{T})$, que no está acotado en norma. El teorema de Banach-Steinhaus nos da entonces el siguiente resultado:

- *Las funciones cuya serie de Fourier está acotada en el origen, forman un conjunto de primera categoría en el espacio de Banach $C(\mathbb{T})$.*

Con más razón, el conjunto de las funciones cuya serie de Fourier converge puntualmente, es de primera categoría en $C(\mathbb{T})$, es topológicamente "pequeño". Por tanto, las funciones cuya serie de Fourier no converge puntualmente, forman un conjunto de segunda categoría en $C(\mathbb{T})$, es decir, un conjunto topológicamente "grande". Suele aludirse a este resultado diciendo que la convergencia puntual, de la serie de Fourier de una función continua, es una propiedad "atípica".

9.4. Otras consecuencias

En la discusión sobre series de Fourier, el teorema de Banach-Steinhaus se ha usado por la negativa. Más concretamente, aludiendo a las tres afirmaciones que aparecen en el enunciado de dicho teorema, hemos usado que, si no se verifica (iii), entonces tampoco se verifica (i). Pero lo más habitual es usar el teorema en positivo, es decir, partiendo de la acotación puntual de un conjunto de operadores, usar que $(ii) \Rightarrow (iii)$ para concluir que dicho conjunto está acotado en norma. A partir de ahora vamos a obtener varias aplicaciones de este tipo.

En primer lugar, el teorema de Banach-Steinhaus permite probar la acotación de cualquier subconjunto de un espacio normado, usando el espacio dual:

- *Si A es un subconjunto no vacío de un espacio normado X, entonces A está acotado si, y sólo si, verifica la siguiente condición:*

$$\sup \left\{ |x^*(x)| \, : \, x \in A \right\} < \infty \qquad \forall x^* \in X^*$$

Una implicación es evidente, pues si A está acotado, para todo $x^* \in X^*$ se tiene

$$\sup \left\{ |x^*(x)| : x \in A \right\} \leqslant \|x^*\| \, \sup \left\{ \|x\| : x \in A \right\} < \infty$$

Para el recíproco, usamos la inyección canónica $J : X \to X^{**}$. Entonces $J(A)$ es un conjunto de funcionales lineales continuos en el espacio de Banach X^*, que por hipótesis verifica:

$$\sup \left\{ \left| \big(J(x)\big)(x^*) \right| \, : \, x \in A \right\} = \sup \left\{ |x^*(x)| \, : \, x \in A \right\} < \infty \qquad \forall x^* \in X^*$$

Esto significa que $J(A)$ está puntualmente acotado en X^*, y el teorema de Banach-Steinhaus nos dice que $J(A)$ está acotado en norma.

Usando ahora que J es isométrica, concluimos que

$$\sup \left\{ \|x\| : x \in A \right\} = \sup \left\{ \|J(x)\| : x \in A \right\} < \infty$$

luego el conjunto A está acotado, como queríamos demostrar. ■

Volviendo a trabajar con un conjunto de operadores, del teorema de Banach-Steinhaus se deduce fácilmente un resultado probado previamente por Steinhaus, que es algo sorprendente, pues nos da la continuidad del límite de una sucesión que sólo converge puntualmente.

Teorema de cierre de Steinhaus. *Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $\{T_n\}$ una sucesión de operadores lineales y continuos de X en Y. Supongamos que $\{T_n\}$ converge puntualmente en X, es decir, verifica que $\{T_n(x)\}$ converge en Y, para todo $x \in X$. Entonces, definiendo*

$$T(x) = \lim_{n \to \infty} T_n(x) \qquad \forall x \in X$$

se tiene un operador lineal y continuo, es decir: $T \in L(X,Y)$.

Demostración. La linealidad de T se comprueba de manera completamente rutinaria. Por otra parte, para cada $x \in X$, la sucesión $\{T_n(x)\}$ es convergente, luego está acotada. Por tanto, el conjunto $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ está puntualmente acotado en X, y el teorema de Banach-Steinhaus nos dice que $\sup\{\|T_n\| : n \in \mathbb{N}\} = M < \infty$. Fijado $x \in X$, se tiene entonces

$$\|T_n(x)\| \leqslant \|T_n\| \, \|x\| \leqslant M \|x\| \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

de donde $\|T(x)\| \leqslant M \|x\|$ para todo $x \in X$, y esto prueba que $T \in L(X,Y)$. ∎

En relación con este último resultado, conviene resaltar que, aunque $T \in L(X,Y)$ y $\{T_n\}$ converge puntualmente a T, no podemos asegurar que $\{T_n\}$ converja a T en el espacio $L(X,Y)$, es decir, no tiene por qué ocurrir que $\{\|T_n - T\|\} \to 0$. Por ejemplo, tomando $X = c_0$, $Y = \mathbb{K}$, y $T_n(x) = x(n)$ para cualesquiera $x \in c_0$ y $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\{T_n(x)\} \to 0$ para todo $x \in c_0$, pero $\| T_n \| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

9.5. Aplicaciones en teoría de sumabilidad

Veremos ahora otro bloque de aplicaciones del teorema de Banach-Steinhaus, referentes a la convergencia de sucesiones y series. Empezamos caracterizando las series de escalares absolutamente convergentes, mediante propiedades que parecen cada vez más débiles:

- *Para una sucesión de escalares $y \in \mathbb{K}^N$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
  (i) *La serie $\sum_{n \geqslant 1} y(n)$ es absolutamente convergente*
  (ii) *Para cada $x \in l_\infty$, la serie $\sum_{n \geqslant 1} x(n)\, y(n)$ es absolutamente convergente*
  (iii) *Para cada $x \in c_0$, la serie $\sum_{n \geqslant 1} x(n)\, y(n)$ es absolutamente convergente.*
  (iv) *Para cada $x \in c_0$, la serie $\sum_{n \geqslant 1} x(n)\, y(n)$ es convergente*
  (v) *Para cada $x \in c_0$, la serie $\sum_{n \geqslant 1} x(n)\, y(n)$ está acotada.*

Es claro que cada una de las anteriores afirmaciones implica las que le siguen, luego basta probar que $(v) \Rightarrow (i)$. Fijado $n \in \mathbb{N}$, definimos $\varphi_n : c_0 \to \mathbb{K}$ escribiendo

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x(k)\, y(k) \qquad \forall x \in c_0$$

Recordando la descripción del dual de c_0, sabemos que $\varphi_n \in c_0^*$ con $\| \varphi_n \| = \sum_{k=1}^{n} |y(k)|$. Por otra parte, la hipótesis (v) nos dice que, para cada $x \in c_0$ se tiene

$$\sup \{ |\varphi_n(x)| : n \in \mathbb{N} \} = \sup \left\{ \left| \sum_{k=1}^{n} x(k)\, y(k) \right| : n \in \mathbb{N} \right\} < \infty$$

Por tanto, $\{\varphi_n\}$ es una sucesión de funcionales lineales continuos en el espacio de Banach c_0, que está puntualmente acotada en c_0. Por el teorema de Banach-Steinhaus, dicha sucesión está acotada en norma, y deducimos que se cumple (i), ya que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |y(n)| = \sup\left\{ \sum_{k=1}^{n} |y(k)| \, : \, n \in \mathbb{N} \right\} = \sup\left\{ \|\varphi_n\| : n \in \mathbb{N} \right\} < \infty \qquad \blacksquare$$

Resultados análogos al anterior, con idéntica demostración, permiten discutir la posibilidad de que una sucesión $y \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ pertenezca a alguno de los espacios l_p con $1 < p < \infty$. El papel de c_0 lo hará entonces el espacio de Banach l_{p^*}, cuyo dual se identifica con l_p. Por ejemplo, se tiene que $y \in l_2$ si, y sólo si, la serie $\sum_{n \geqslant 1} x(n)\, y(n)$ está acotada, para cada $x \in l_2$.

Dando un paso más en este tipo de resultados, vamos a considerar ciertos procedimientos para trabajar con sucesiones o series no convergentes, llamados *métodos de sumabilidad.* Como ejemplo motivador, consideremos el criterio de la media aritmética:

$$\alpha_n \in \mathbb{K} \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \{\alpha_n\} \to \alpha \in \mathbb{K} \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \right\} \to \alpha$$

Es bien sabido que el recíproco no es cierto, de modo que, transformar una sucesión en la de sus medias aritméticas, puede verse como un método que facilita la convergencia, un ejemplo muy sencillo de método de sumabilidad. Esta terminología se justifica por el hecho de que la sucesión de partida suele venir dada como una serie, con lo que el método de la media aritmética proporciona una especie de "suma" de la serie, que coincide con la auténtica suma cuando la serie converge, pero puede existir y ser útil en condiciones más generales.

El ejemplo emblemático de esta situación se presenta con las series de Fourier. Sabemos que la serie de Fourier $\{S_n(f)\}$ de una función continua $f \in C(\mathbb{T})$ rara vez converge, ni siquiera puntualmente. Sin embargo, podemos considerar la sucesión de medias aritméticas de la serie de Fourier. Concretamente, para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos:

$$\sigma_n(f,t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k(f,t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=-k}^{k} \widehat{f}(j)\, e^{ikt} \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Se dice que $\{\sigma_n(f)\}$ es la sucesión de **sumas de Cesàro** de la serie de Fourier de f. El criterio de la media aritmética nos proporciona, para cualquier $t \in \mathbb{R}$, la siguiente implicación:

$$\{S_n(f,t)\} \to f(t) \quad \Rightarrow \quad \{\sigma_n(f,t)\} \to f(t)$$

Ahora el recíproco está muy lejos de ser cierto. Concretamente, un resultado básico en el estudio de las series de Fourier, el **teorema de Féjer**, afirma que, *para toda $f \in C(\mathbb{T})$, la sucesión de sumas de Cesàro de la serie de Fourier de f converge a f uniformemente en $\mathbb{R}$.*

Pues bien, nos proponemos generalizar el criterio de la media aritmética, sustituyendo dicha media por una combinación lineal de los términos de la sucesión de partida, admitiendo incluso combinaciones lineales "infinitas". Para ello, usaremos una transformación matricial del tipo que vamos a explicar.

Consideramos una matriz infinita de escalares $A = \big(a_{nk}\big)$ con $n,k \in \mathbb{N}$, que no es más que una aplicación de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ en $\mathbb{K}$, pero será más intuitivo usar notación matricial. Dada una sucesión de escalares $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, podemos pensar en la sucesión que se obtiene al "multiplicar" la matriz A por el vector columna x. Para cada $n \in \mathbb{N}$, el n-ésimo término de tal sucesión deberá ser la suma de la serie $\sum\limits_{k\geqslant 1} a_{nk}\,x(k)$, siempre que dicha serie converja, lo que motiva la siguiente definición.

El **dominio** de la matriz $A = \big(a_{nk}\big)$ es el conjunto de sucesiones dado por

$$D(A) = \Big\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \ : \ \sum_{k\geqslant 1} a_{nk}\,x(k) \ \text{ converge } \ \ \forall n \in \mathbb{N} \Big\}$$

Claramente $D(A)$ es un subespacio de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ que al menos contiene a las sucesiones de soporte finito. Para $x \in D(A)$, podemos considerar la sucesión $Ax \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ dada por

$$\big[Ax\big](n) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\,x(k) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

De esta forma obtenemos un operador lineal $x \mapsto Ax$, definido en $D(A)$ y con valores en $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Así pues, cada matriz infinita A da lugar a un método de transformación de sucesiones, análogo al que, a cada sucesión, asocia la sucesión de sus medias aritméticas. De hecho, usando la matriz $B = \big(b_{nk}\big)$ definida, para $n,k \in \mathbb{N}$, por $b_{nk} = 1/n$ si $k \leqslant n$ y $b_{nk} = 0$ si $k > n$, se tiene claramente que $D(B) = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ y, para toda sucesión $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, vemos que Bx es la sucesión de las medias aritméticas de x. El criterio de la media aritmética afirma que la transformación definida por la matriz B preserva la convergencia, es decir: si x es una sucesión convergente, entonces Bx es convergente y tiene el mismo límite que x. Es natural considerar ahora las matrices que tienen esta misma propiedad, para lo que introducimos una notación adecuada.

Denotamos por c al espacio vectorial formado por todas las sucesiones convergentes de escalares, un subespacio de l_∞ que contiene a c_0, y definimos $u(n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, con lo que $u \in c \setminus c_0$. Para cada $x \in c$ tenemos claramente $x - \lambda u \in c_0$ donde $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} x(n)$, de donde deducimos que $c = c_0 \oplus \mathbb{K}u$. Como c_0 es un subespacio cerrado de codimensión finita en c, vemos que la suma directa anterior es topológico-directa, luego c es isomorfo al espacio producto $c_0 \times \mathbb{K}$ y, en particular, es un espacio de Banach, subespacio cerrado de l_∞.

Pues bien, decimos que una matriz infinita $A = \big(a_{nk}\big)$ es **regular**, cuando preserva la convergencia de sucesiones, es decir, verifica que

$$x \in c \quad \Longrightarrow \quad x \in D(A)\,, \ \ Ax \in c\,, \ \ \lim_{n\to\infty} \big[Ax\big](n) = \lim_{n\to\infty} x(n)$$

Cada matriz regular A da lugar a un *método de sumabilidad* análogo al criterio de la media aritmética, válido para todas las sucesiones que pertenezcan al dominio de A. Si $x \in D(A)$ es una sucesión convergente, entonces Ax converge al mismo límite que x, pero perfectamente puede ocurrir que Ax sea convergente sin que x lo sea. Por supuesto, al hablar de método de sumabilidad estamos pensando que la sucesión x puede venir dada en forma de serie.

El esquema general que hemos introducido tiene interés, gracias a que disponemos de una caracterización muy cómoda de las matrices regulares, como es la siguiente:

Condiciones de Silverman-Toeplitz. *Una matriz infinita de escalares* $A = \big(a_{nk}\big)$ *es regular si, y sólo si, verifica las tres condiciones siguientes:*

$$
\begin{aligned}
&(i) \quad \sup\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \, : \, n \in \mathbb{N} \right\} < \infty \\
&(ii) \quad \lim_{n\to\infty} a_{nm} = 0 \quad \forall\, m \in \mathbb{N} \\
&(iii) \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \, = \, 1
\end{aligned}
$$

Demostración. Empezamos por el paso clave, en el se aplica el teorema de Banach-Steinhaus, consistente en probar que la condición (i) es necesaria para que la matriz A sea regular.

Fijado $n \in \mathbb{N}$ consideramos la n-ésima fila de la matriz A, es decir, la sucesión $y_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ dada por $y_n(k) = a_{nk}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. La regularidad de la matriz A nos dice en primer lugar que, para cada $x \in c_0$ se tiene $x \in D(A)$ y, en particular, la serie $\sum\limits_{k \geqslant 1} y_n(k)\, x(k)$ es convergente. La caracterización de las series absolutamente convergentes, probada anteriormente, nos dice que $y_n \in l_1$, luego tenemos

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \, = \, \sum_{k=1}^{\infty} |y_n(k)| < \infty \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Recordando ahora la identificación de l_1 con c_0^*, sabemos que escribiendo

$$\varphi_n(x) \, = \, \sum_{k=1}^{\infty} y_n(k)\, x(k) \, = \, \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\, x(k) \, = \, \big[Ax\big](n) \qquad \forall x \in c_0 \,, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

tenemos $\varphi_n \in c_0^*$ con $\|\varphi_n\| = \|y_n\|_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Ahora bien, la regularidad de A nos dice también que, para cada $x \in c_0$, la sucesión Ax es convergente y, en particular, está acotada. Por tanto, la sucesión $\{\varphi_n\}$ está puntualmente acotada en c_0. Como se trata de una sucesión de funcionales lineales y continuos en el espacio de Banach c_0, el teorema de Banach-Steinhaus nos permite concluir que dicha sucesión está acotada en norma. Esto prueba (i), ya que

$$\sup\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \, : \, n \in \mathbb{N} \right\} = \sup\big\{ \|y_n\|_1 \, : \, n \in \mathbb{N} \big\} = \sup\big\{ \|\varphi_n\| \, : \, n \in \mathbb{N} \big\} < \infty$$

La necesidad de las condiciones (ii) y (iii) es mucho más sencilla. Fijado $m \in \mathbb{N}$, usamos el m-ésimo vector unidad $e_m \in c_0$, y recordamos la sucesión $u \in c$, constantemente igual a 1.

Para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos claramente

$$\big[A\, e_m\big](n) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\, e_m(k) = a_{nm} \quad \text{y} \quad \big[A\, u\big](n) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\, u(k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \tag{5}$$

La regularidad de A nos dice entonces que $A\, e_k \in c_0$, luego se verifica (ii), mientras que $A\, u \in c$ con $\lim\limits_{n\to\infty} \big[A\, u\big](n) = 1$, que es la condición (iii).

Acabaremos probando que toda matriz A que verifique las condiciones (i), (ii) y (iii) es regular. Denotaremos por $M \in \mathbb{R}_0^+$ al supremo que aparece en (i). En primer lugar, para cualesquiera $x \in c$ y $n \in \mathbb{N}$ se tiene:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}x(k)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \, \|x\|_\infty \leqslant M\|x\|_\infty$$

En particular, la serie $\sum_{k\geqslant 1} a_{nk}x(k)$ es convergente, para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $x \in D(A)$, lo cual es válido para toda sucesión convergente $x \in c$, así que $c \subset D(A)$. Pero además, de la desigualdad anterior deducimos que

$$\big| \big[Ax\big](n) \big| \leqslant M\|x\|_\infty \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in c$$

luego $Ax \in l_\infty$ con $\|Ax\|_\infty \leqslant M\|x\|_\infty$ para toda sucesión $x \in c$.

Si para $x \in c$ definimos $T(x) = Ax \in l_\infty$, es claro que tenemos un operador lineal $T : c \to l_\infty$ y acabamos de comprobar que T es continuo con $\|T\| \leqslant M$. Pero de hecho debemos ver que la imagen de T está contenida en c.

Para cada $m \in \mathbb{N}$ consideramos de nuevo el m-ésimo vector unidad e_m, para el que se verifica la primera igualdad de (5). La condición (ii) nos dice entonces que $T(e_m) = A\,e_m \in c_0$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Recordando que c_{00} es el subespacio engendrado por los vectores unidad, por ser T lineal deducimos que $T\big(c_{00}\big) \subset c_0$. Pero como además c_{00} es denso en c_0 y T es continuo, obtenemos que

$$T\big(c_0\big) = T\big(\overline{c_{00}}\big) \subset \overline{T\big(c_{00}\big)} \subset \overline{c_0} = c_0$$

donde hemos usado que c_0 es cerrado en l_∞. Esto prueba que $Az \in c_0$ para todo $z \in c_0$.

Por otra parte, usamos de nuevo la sucesión $u \in c$, para la que volvemos a tener la segunda igualdad de (5), y la condición (iii) nos dice que Au es una sucesión convergente a 1.

Finalmente, para $x \in c$ escribimos $x = z + \lambda u$ donde $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} x(n)$ y $z \in c_0$. Como $Az \in c_0$ y $Au \in c$, deducimos que $Ax = Az + \lambda Au \in c$, y se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \big[Ax\big](n) = \lim_{n\to\infty} \big[Az\big](n) + \lambda \lim_{n\to\infty} \big[Au\big](n) = \lambda = \lim_{n\to\infty} x(n)$$

Esto prueba que la matriz A es regular, concluyendo la demostración. ■