Tema 7

Dualidad en espacios normados

Usando el teorema de extensión Hahn-Banach, vamos ahora a profundizar en el estudio de la relación entre un espacio normado y su dual. En el caso más sencillo, dicho teorema permite obtener cualquier norma a partir de su norma dual, lo que establece cierta simetría entre ambas. Por otra parte, el teorema de extensión permite mostrar la relación entre el dual de un espacio normado y el de cualquiera de sus subespacios, poniendo de manifiesto la relación que existe entre extensiones Hahn-Banach y mejores aproximaciones en ciertos subespacios de un espacio de Banach dual. Haremos también una descripción del dual de un cociente, que es independiente del teorema de Hahn-Banach, pero la conjunción de ambos resultados permite caracterizar los subespacios cerrados de un espacio normado, usando el espacio dual. Esta es sin duda una de las consecuencias más útiles del teorema de Hahn-Banach.

Para llegar a la cuestión más relevante en el estudio de la dualidad, mostramos que todo espacio normado puede identificarse canónicamente con un subespacio de su *bidual*, que no es más que el espacio dual de su dual. Aparecerán así los espacios de Banach *reflexivos*, para los que existe total simetría entre un espacio y su dual. Para la gran mayoría de los espacios de Banach que conocemos, podremos averiguar sin mucha dificultad si son reflexivos. Veremos finalmente algunas propiedades de estabilidad que tiene la clase de los espacios reflexivos.

7.1. Un ejemplo de extensión Hahn-Banach

Como caso particular muy sencillo del teorema de extensión Hahn-Banach, obtenemos el siguiente resultado:

- *Si X es un espacio normado y $x \in X \setminus \{0\}$, existe $h \in X^*$ con $\|h\| = 1$ y $h(x) = \|x\|$.*

Usamos el subespacio $M = \mathbb{K}x \subset X$ y el funcional lineal $g \in M^*$ dado por $g(\lambda x) = \lambda \|x\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$. Se tiene claramente $|g(y)| = \|y\|$ para todo $y \in M$, luego $\|g\| = 1$. Por tanto, si $h \in X^*$ es una extensión Hahn-Banach de g, vemos que $\|h\| = 1$ y $h(x) = g(x) = \|x\|$, como se quería. ■

Hemos obtenido una relación entre cualquier norma y su norma dual, que ahora vamos a resaltar. Fijado $x \in X \setminus \{0\}$, para $f \in X^*$ con $\|f\| = 1$ se tiene obviamente $|f(x)| \leqslant \|x\|$. Pero existe $h \in X^*$ con $\|h\| = 1$ que nos da la igualdad $h(x) = \|x\|$. Tenemos por tanto:

$$\|x\| = \sup \big\{ |f(x)| \ : \ f \in X^*, \ \|f\| = 1 \big\} \qquad \forall x \in X$$

pues el caso $x = 0$ no es una excepción. De hecho el supremo anterior es siempre un máximo, pero al usar el supremo, vemos muy clara la simetría con la definición de la norma dual:

$$\|f\| = \sup \big\{ |f(x)| \ : \ x \in X, \ \|x\| = 1 \big\} \qquad \forall f \in X^*$$

Así pues, el teorema de Hahn-Banach nos ha permitido obtener la norma de X, a partir de su norma dual en X^*, exactamente igual que la norma de X^* se obtiene, por definición, a partir de la de X. Es costumbre enfatizar la simetría anterior, denotando por x^* a un elemento genérico del espacio dual X^*, de la misma forma que denotamos por x a un vector genérico de X. Las dos igualdades anteriores toman entonces la siguiente forma:

$$\|x\| = \sup \big\{ |x^*(x)| : x^* \in X^*, \ \|x^*\| = 1 \big\} \quad \forall x \in X$$
$$\|x^*\| = \sup \big\{ |x^*(x)| : x \in X, \ \|x\| = 1 \big\} \quad \forall x^* \in X^*$$

Del resultado anterior deduciremos también lo que se conoce como "universalidad" de los espacios de funciones acotadas: todo espacio normado puede verse como subespacio de uno de ellos. Recordemos que, si Γ es un conjunto no vacío, $l_\infty(\Gamma)$ es el espacio de Banach de todas las funciones acotadas de Γ en $\mathbb{K}$, cuya norma viene dada por $\|y\| = \sup \big\{ |y(\gamma)| : \gamma \in \Gamma \big\}$ para todo $y \in l_\infty(\Gamma)$. En particular conocemos el espacio de sucesiones $l_\infty = l_\infty(\mathbb{N})$.

- *Todo espacio normado es isométricamente isomorfo a un subespacio de $l_\infty(\Gamma)$ para algún conjunto no vacío Γ. En particular, todo espacio normado separable es isométricamente isomorfo a un subespacio de l_∞.*

Sea X un espacio normado y sea $\{x_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ un conjunto denso en X. Para cada $\gamma \in \Gamma$ tomamos $x^*_\gamma \in X^*$ verificando que $\|x^*_\gamma\| = 1$ y $x^*_\gamma(x_\gamma) = \|x_\gamma\|$. Para cada $x \in X$, definimos entonces una función $T(x) : \Gamma \to \mathbb{K}$, escribiendo

$$\big(T(x)\big)(\gamma) = x^*_\gamma(x) \qquad \forall \gamma \in \Gamma$$

Para cualesquiera $x \in X$ y $\gamma \in \Gamma$ se tiene claramente $\big|\big(T(x)\big)(\gamma)\big| \leqslant \|x^*_\gamma\| \, \|x\| = \|x\|$, de donde deducimos que $T(x) \in l_\infty(\Gamma)$ con $\|T(x)\|_\infty \leqslant \|x\|$. Es claro que $T : X \to l_\infty(\Gamma)$ es un operador lineal, y acabamos de probar que T es continuo, pero de hecho veremos enseguida que T es isométrico.

Para todo $\gamma \in \Gamma$ se tiene claramente

$$\big\|x_\gamma\big\| = \big|x^*_\gamma(x_\gamma)\big| = \big|\big(T(x_\gamma)\big)(\gamma)\big| \leqslant \big\|T(x_\gamma)\big\|_\infty \leqslant \big\|x_\gamma\big\|$$

Como T es continuo, la función $x \mapsto \|T(x)\|_\infty$ es continua en X, al igual que la norma de X, y hemos visto que ambas funciones coinciden en el conjunto $\{x_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$, que es denso en X. Por tanto, dichas funciones coinciden en X, es decir, T es isométrico.

Si el espacio normado X es separable, tiene un subconjunto denso numerable, luego el razonamiento anterior puede hacerse con $\Gamma = \mathbb{N}$, obteniendo un isomorfismo isométrico de X sobre un subespacio de $l_\infty(\mathbb{N}) = l_\infty$. ■

7.2. Dual de un subespacio

Volvamos al teorema de extensión Hahn-Banach en versión general. Dado un subespacio M de un espacio normado X, el teorema hace que la aplicación lineal $x^* \mapsto x^*\big|_M$, de X^* en M^*, sea sobreyectiva. Por tanto, M^* se identifica, como espacio vectorial, con el cociente de X^* por el núcleo de dicha aplicación, un subespacio de X^* al que ahora vamos a prestar atención.

Si A es un subconjunto no vacío de un espacio normado X, definimos el **anulador** de A como el conjunto $A^\perp$ de todos los funcionales lineales continuos en X que se anulan en A:

$$A^\perp = \left\{ x^* \in X^* \,:\, x^*(a) = 0 \ \ \forall a \in A \right\}$$

Para cada $a \in A$, la aplicación lineal $x^* \mapsto x^*(a)$ es continua, ya que $|x^*(a)| \leqslant \|a\| \, \|x^*\|$ para todo $x^* \in X^*$, luego el conjunto $\{x^* \in X^* : x^*(a) = 0\}$ es un subespacio cerrado de X^*. Deducimos que $A^\perp$ es subespacio cerrado de X^*, como intersección de subespacios cerrados. Esto permite considerar el espacio de Banach $X^*/M^\perp$, cociente del espacio de Banach X^* por un subespacio cerrado. Vamos a comprobar ahora que este cociente se identifica con M^*, no sólo como espacios vectoriales, sino también como espacios de Banach.

- *Si M es un subespacio de un espacio normado X, entonces se tiene un isomorfismo isométrico $\Phi : X^*/M^\perp \to M^*$, que viene dado por*

$$\Phi\big(q(x^*)\big) = x^*\big|_M \qquad \forall x^* \in X^* \tag{1}$$

donde $q : X^* \to X^*/M^\perp$ es la aplicación cociente.

Por lo ya comentado, Φ está bien definida y es una biyección lineal, luego se trata de probar que Φ es isométrica.

Fijado $w \in X^*/M^\perp$, sea $y^* = \Phi(w) \in M^*$, para comprobar que $\|y^*\| = \|w\|$. Por una parte, para todo $x^* \in w$, tenemos $\|y^*\| = \|x^*|_M\| \leqslant \|x^*\|$, y por otra, el teorema de extensión Hahn-Banach nos da un $x^* \in w$ con $\|x^*\| = \|y^*\|$, luego usando la definición de la norma cociente obtenemos

$$\|\Phi(w)\| = \|y^*\| = \text{mín}\left\{ \|x^*\| \,:\, x^* \in w \right\} = \|w\|$$

Esto prueba que Φ es un isomorfismo isométrico, como se quería. ■

En el razonamiento anterior aparece un hecho que conviene destacar: para todo $w \in X^*/M^\perp$, el ínfimo que define a la norma cociente $\|w\|$ es un mínimo. Deducimos que cada $x^* \in X^*$ tiene al menos una mejor aproximación en $M^\perp$, junto con una relación entre mejores aproximaciones y extensiones Hahn-Banach, que merece la pena resaltar.

- *Si M es un subespacio de un espacio normado X, entonces $M^\perp$ es proximinal en X^*. De hecho, para cada $x^* \in X^*$, las mejores aproximaciones de x^* en $M^\perp$ son los funcionales de la forma $x^* - z^*$, donde z^* es una extensión Hahn-Banach de $x^*\big|_M$.*

Dado $x^* \in X^*$, sea z^* una extensión Hahn-Banach de $x^*|_M$. Entonces $x^* - z^* \in M^\perp$, y usando el resultado anterior, tenemos

$$\| x^* - (x^* - z^*) \| = \| z^* \| = \| x^*|_M \| = \| q(x^*) \| = d\left(x^*, M^\perp\right)$$

luego $x^* - z^*$ es una mejor aproximación de x^* en $M^\perp$. Por otra parte, si u^* es una mejor aproximación de x^* en $M^\perp$, se tiene que

$$\| x^* - u^* \| = d\left(x^*, M^\perp\right) = \| q(x^*) \| = \| x^*|_M \|$$

luego $z^* = x^* - u^*$ es una extensión Hahn-Banach de $x^*|_M$, tal que $u^* = x^* - z^*$. ■

7.3. Dual de un cociente

Veamos una descripción del dual de un cociente, que es la contrapartida a la del dual de un subespacio, recién obtenida.

- *Sea M un subespacio cerrado de un espacio normado X y $q : X \to M$ la aplicación cociente. Entonces se tiene un isomorfismo isométrico $\Psi : (X/M)^* \to M^\perp$, dado por:*

$$\Psi\left(w^*\right) = w^* \circ q \qquad \forall w^* \in (X/M)^* \tag{2}$$

Para $w^* \in (X/M)^*$, la linealidad y continuidad de q hacen que se tenga $w^* \circ q \in X^*$, y es claro que $w^*\big(q(y)\big) = 0$ para todo $y \in M$, luego $w^* \circ q \in M^\perp$. Denotando por U a la bola abierta unidad de X, sabemos que $q(U)$ es la bola abierta unidad de X/M, y vemos que Ψ es isométrica, pues para todo $w^* \in (X/M)^*$ se tiene:

$$\| \Psi(w^*) \| = \sup \left\{ \left| w^*\big(q(x)\big) \right| \,:\, x \in U \right\} = \sup \left\{ | w^*(w) | : w \in q(U) \right\} = \| w^* \|$$

Si $x^* \in M^\perp$ y $u, x \in X$ verifican que $q(u) = q(x)$, tenemos $u - x \in M$, luego $x^*(u) = x^*(x)$. Podemos pues definir un funcional lineal $w^* : X/M \to \mathbb{K}$ escribiendo $w^*\big(q(x)\big) = x^*(x)$ para todo $x \in X$. Entonces $w^* \circ q = x^* \in X^*$ de donde $w^* \in (X/M)^*$, y tenemos $\Psi(w^*) = x^*$. Por tanto, la imagen de Ψ es $M^\perp$, y Ψ es un isomorfismo isométrico, como queríamos. ■

Obsérvese que en la demostración anterior no hemos usado el teorema de Hahn-Banach, el resultado podía haberse probado mucho antes. De hecho, el mismo razonamiento puede usarse con operadores en vez de funcionales. Si Y es un espacio normado arbitrario, se obtiene un isomorfismo isométrico del espacio de operadores $L(X/M, Y)$ sobre el subespacio de $L(X, Y)$ formado por los operadores que se anulan en M. Hemos preferido destacar el caso $Y = \mathbb{K}$, que es el más interesante. Además, ahora podemos aprovecharlo para generalizar el resultado con el que iniciábamos este tema.

- *Si M es un subespacio cerrado de un espacio normado X y $x \in X \setminus M$, existe $x^* \in M^\perp$ tal que $\| x^* \| = 1$ y $x^*(x) = d(x, M)$.*

Si $q : X \to X/M$ es la aplicación cociente, el resultado mencionado nos da $w^* \in (X/M)^*$ tal que $\| w^* \| = 1$ y $w^*\big(q(x)\big) = \| q(x) \|$. Basta entonces tomar $x^* = w^* \circ q \in M^\perp$, pues se tiene $\| x^* \| = \| w^* \| = 1$ y $x^*(x) = w^*\big(q(x)\big) = \| q(x) \| = d(x,M)$, como se quería. ■

Tomando $M = \{0\}$ recuperamos el resultado inicial de este tema, que hemos usado para obtener una versión más general. Como ocurría en el caso particular, el valor $x^*(x) = d(x,M)$ es óptimo, en el siguiente sentido. De $z^* \in M^\perp$ con $\| z^* \| = 1$, se deduce que, para todo $y \in M$ se ha de tener $|z^*(x)| = |z^*(x-y)| \leqslant \| x-y \|$, de donde $|z^*(x)| \leqslant d(x,M) = x^*(x)$. Pero aún olvidando este detalle, el resultado anterior tiene una consecuencia importante: si $x \in X \setminus M$, existe $x^* \in M^\perp$ tal que $x^*(x) \neq 0$. Dicho de otra forma, dado $x \in X$, se tiene que $x \in M$ si, y sólo si, $x^*(x) = 0$ para todo $x^* \in M^\perp$. Esto significa que el espacio dual X^* nos permite caracterizar los subespacios cerrados de cualquier espacio normado X. De hecho, con el mismo razonamiento podemos conseguir el siguiente resultado, formalmente más general.

- *Si A es un subconjunto no vacío de un espacio normado X, se tiene:*

$$\overline{\operatorname{Lin} A} = \big\{ x \in X \; : \; x^*(x) = 0 \quad \forall x^* \in A^\perp \big\} \tag{3}$$

En particular, si M es un subespacio de X, se tiene

$$\overline{M} = \big\{ x \in X \; : \; x^*(x) = 0 \quad \forall x^* \in M^\perp \big\} \tag{4}$$

luego M es denso en X si, y sólo si, $M^\perp = \{0\}$.

Sea $Y = \overline{\operatorname{Lin} A}$ y llamemos Z al conjunto que aparece en el segundo miembro de (3), para comprobar que $Y = Z$. Vemos que Z es un subespacio cerrado de X, por ser la intersección de los núcleos de los elementos de $A^\perp$. Como es obvio que $A \subset Z$, deducimos que $Y \subset Z$. Para la otra inclusión, fijamos $x \in X \setminus Y$ y comprobamos que $x \notin Z$. Como Y también es un subespacio cerrado de X, el resultado anterior nos da un $x^* \in Y^\perp$ tal que $x^*(x) = d(x,Y) \neq 0$. Se tiene obviamente $x^* \in A^\perp$, luego $x \notin Z$ como queríamos.

Para un subespacio $M \subset X$, se tiene $\operatorname{Lin} M = M$ y (3) se convierte en (4). Cuando M es denso en X, para todo $x^* \in M^\perp$, se tiene por continuidad que $x^* = 0$, luego $M^\perp = \{0\}$. Recíprocamente, si $M^\perp = \{0\}$, en vista de (4) es obvio que $\overline{M} = X$. ■

Deducimos un resultado que quedó anunciado al estudiar los duales de algunos espacios de Banach concretos.

- *Si X es un espacio normado tal que X^* es separable, entonces X es separable.*

Como X^* es un espacio métrico separable, su esfera unidad también lo es, luego existe un conjunto numerable $\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\}$, que es denso en la esfera unidad de X^*. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomamos entonces $x_n \in X$ verificando que $\| x_n \| = 1$ y $|x_n^*(x_n)| > 1/2$. Probaremos que el subespacio de dimensión numerable $M = \operatorname{Lin}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en X, y esto implica, como sabemos, que X es separable. Por el resultado anterior, bastará comprobar que $M^\perp = \{0\}$.

Supongamos por el contrario que existe $x^* \in M^\perp$ con $\| x^* \| = 1$. Entonces, para $n \in \mathbb{N}$, como $x^*(x_n) = 0$, tenemos $1/2 < |x_n^*(x_n)| = |x_n^*(x_n) - x^*(x_n)| \leqslant \| x_n^* - x^* \|$, pero esto es una contradicción, porque $\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ era denso en la esfera unidad de X^*. ■

7.4. Inyección canónica y completación

Naturalmente, llamamos segundo dual, o **bidual**, de un espacio normado X, al dual del espacio de Banach X^*, que denotamos por $X^{**} = \big(X^*\big)^*$. Desde luego, X^{**} también es un espacio de Banach, cuya norma viene dada por

$$\|x^{**}\| = \sup\left\{\,\big|x^{**}(x^*)\big| \,:\, x^* \in X^*,\ \|x^*\| \leqslant 1\,\right\} \qquad \forall x^{**} \in X^{**}$$

Enseguida vamos a ver que X es isométricamente isomorfo a un subespacio de X^{**}. Para ello basta usar una idea bien sencilla: la expresión $x^*(x)$ puede verse como función de $x \in X$, pero también como función de $x^* \in X^*$.

Concretamente, fijado $x \in X$, consideramos la aplicación $J(x) : X^* \to \mathbb{K}$ definida por

$$\big(J(x)\big)(x^*) = x^*(x) \qquad \forall x^* \in X^*$$

Es obvio que $J(x)$ es un funcional lineal en X^*, y tenemos $\big|\big(J(x)\big)(x^*)\big| \leqslant \|x\|\,\|x^*\|$ para todo $x^* \in X^*$. Por tanto $J(x)$ es continuo, es decir, $J(x) \in X^{**}$, y tenemos $\|J(x)\| \leqslant \|x\|$. Pero un resultado ya conocido nos da la igualdad, ya que

$$\begin{aligned}\|x\| &= \sup\left\{\,\big|x^*(x)\big| \,:\, x^* \in X^*,\ \|x^*\| \leqslant 1\,\right\}\\ &= \sup\left\{\,\big|\big(J(x)\big)(x^*)\big| \,:\, x^* \in X^*,\ \|x^*\| \leqslant 1\,\right\} = \|J(x)\|\end{aligned}$$

Todo lo dicho es válido para todo $x \in X$, luego podemos considerar la aplicación $x \mapsto J(x)$. Se trata obviamente de una aplicación lineal $J : X \to X^{**}$ y acabamos de comprobar que es isométrica, luego permite identificar X con un subespacio de su bidual X^{**}. Se dice que J es la **inyección canónica** del espacio normado X en su bidual.

Si X no es completo, $J(X)$ tampoco lo es, luego $J(X) \neq X^{**}$. Esta sencilla observación tiene su utilidad, pues permite ver a X como subespacio denso de un espacio de Banach.

- *Si X es un espacio normado no completo, existe un espacio de Banach $\widehat{X}$, junto con un isomorfismo isométrico de X sobre un subespacio denso en $\widehat{X}$. Además $\widehat{X}$ es único, salvo isomorfismos isométricos.*

Considerando la inyección canónica $J : X \to X^{**}$, tomamos $\widehat{X} = \overline{J(X)}$. Entonces $\widehat{X}$ es un subespacio cerrado de X^{**}, luego es también un espacio de Banach. Obviamente J es un isomorfismo isométrico de X sobre $J(X)$, que es un subespacio denso en $\widehat{X}$.

La unicidad de $\widehat{X}$ se deduce del teorema de extensión por densidad de operadores lineales continuos. Sea $\widetilde{X}$ otro espacio de Banach, tal que exista un isomorfismo isométrico I, de X sobre un subespacio $I(X)$, denso en $\widetilde{X}$. El operador $T_0 = J \circ I^{-1} : I(X) \to J(X) \subset \widehat{X}$ y su inverso $S_0 = I \circ J^{-1} : J(X) \to I(X) \subset \widetilde{X}$, se pueden entonces extender, obteniendo operadores lineales y continuos $T : \widetilde{X} \to \widehat{X}$ y $S : \widehat{X} \to \widetilde{X}$, que verifican $\|T\| = \|S\| = 1$. Como $T_0 \circ S_0$ es la identidad en $J(X)$, que es un subespacio denso en $\widehat{X}$, deducimos claramente que $T \circ S$ es la identidad en $\widehat{X}$. Análogamente $S \circ T$ es la identidad en $\widetilde{X}$, y esto prueba que T y S son biyectivos con $T^{-1} = S$. Tenemos por tanto $\|T\| = \|T^{-1}\| = 1$, luego T es un isomorfismo isométrico de $\widetilde{X}$ sobre $\widehat{X}$, como queríamos demostrar. ■

Se dice que el espacio de Banach $\widehat{X}$ del resultado anterior es **la completación** del espacio normado X. Podemos por tanto ver cada espacio normado como subespacio denso de un espacio de Banach. La unicidad de la completación permite recíprocamente pensar que, si Y es un subespacio denso de un espacio de Banach Z, entonces Z es la completación de Y.

7.5. Espacios de Banach reflexivos

Consideremos los espacios de Banach que mejor se comportan con respecto a la dualidad. Se dice que un espacio de Banach X es **reflexivo**, cuando la inyección canónica $J : X \to X^{**}$ es sobreyectiva, es decir, cuando $J(X) = X^{**}$. En tal caso, naturalmente, J es un isomorfismo isométrico de X sobre X^{**}, y tenemos total simetría entre los espacios de Banach X y X^*, puesto que el espacio dual de X^* se identifica con X.

Los ejemplos más sencillos de espacios de Banach reflexivos saltan a la vista. Si X es un espacio normado de dimensión finita, está claro que X^*, y por tanto X^{**}, tienen la misma dimensión que X. Como la inyección canónica $J : X \to X^{**}$ es isométrica, luego inyectiva, también ha de ser sobreyectiva:

- *Todo espacio de Banach de dimensión finita es reflexivo.*

Al estudiar los duales de los espacios de sucesiones, vimos que la relación entre un espacio y su dual podía no ser simétrica. Esto nos llevará a los primeros ejemplos de espacios de Banach no reflexivos. Para abreviar, escribiremos $X \equiv Y$ cuando dos espacios normados X e Y sean isométricamente isomorfos, es decir, idénticos como espacios normados.

- *Los espacios de Banach c_0 y l_1 no son reflexivos.*

Recordemos que $c_0^* \equiv l_1$, y a su vez $l_1^* \equiv l_\infty$, luego $c_0^{**} \equiv l_1^* \equiv l_\infty$, y en particular, c_0^{**} no es separable. Como c_0 sí es separable, no puede ser siquiera homeomorfo a c_0^{**}, luego no es reflexivo. Del mismo modo, tenemos $l_1^{**} \equiv l_\infty^*$, y sabemos que l_∞^* no es separable, porque l_∞ no lo es. Como l_1 es separable, no puede ser homeomorfo a l_1^{**}, luego l_1 no es reflexivo. ■

El razonamiento usado con l_1 se puede abstraer. Si X es un espacio de Banach separable, tal que X^* no es separable, entonces X no es reflexivo. En efecto, si X fuese reflexivo, X^{**} sería separable por ser homeomorfo a X, luego X^* sería separable.

A diferencia de los ejemplos anteriores, veamos lo que ocurre con l_p para $1 < p < \infty$. Sabemos que $l_p^* \equiv l_{p^*}$, y a su vez $l_{p^*}^* \equiv l_{p^{**}} = l_p$, luego tenemos $l_p^{**} \equiv l_{p^*}^* \equiv l_p$. Esto invita a pensar que l_p es reflexivo, pero no basta para asegurarlo, como vamos a explicar.

Concretamente, el matemático estadounidense R.C. James encontró en 1951 un espacio de Banach X, que es isométricamente isomorfo a su bidual, pero no es reflexivo, es decir, la inyección canónica $J : X \to X^{**}$ no es sobreyectiva. Hoy se conoce como *el espacio de James*, y verifica algo que también es llamativo y poco frecuente: $J(X)$ tiene codimensión 1 en X^{**}.

Así pues, para asegurar que un espacio de Banach es reflexivo, no basta identificarlo de alguna forma con su bidual, hay que comprobar que la inyección canónica es sobreyectiva. Para ello es frecuente recurrir a una noción que ahora vamos a estudiar.

7.6. Transposición de operadores

En los últimos razonamientos con espacios de sucesiones, hemos usado algo que no es discutible, pero sin comprobarlo explícitamente: si dos espacios normados son isométricamente isomorfos, sus duales también deben serlo. Necesitamos esa comprobación, pero haremos algo más general y útil, pues a cada operador lineal y continuo entre espacios normados, asociaremos un operador lineal y continuo entre los duales, y tendremos cierto control de la relación entre las propiedades de ambos operadores.

La forma de hacerlo no ofrece dificultad. Sean X e Y espacios normados y $T \in L(X,Y)$ un operador lineal y continuo. Para cada $y^* \in Y^*$ se tiene entonces que $y^* \circ T \in X^*$, lo que permite considerar la aplicación $T^* : Y^* \to X^*$ definida por $T^*(y^*) = y^* \circ T$ para todo $y^* \in Y^*$. Es evidente que T^* es un operador lineal, que se maneja fácilmente mediante la igualdad

$$\big(T^*(y^*)\big)(x) = y^*\big(T(x)\big) \qquad \forall x \in X, \ \ \forall y^* \in Y^*$$

que no es más que la definición de T^*. Se dice que T^* es el **operador transpuesto** de T.

Esta nomenclatura está inspirada en lo que ocurre cuando se trabaja en espacios normados de dimensión finita, como vamos a explicar. Supongamos que X tiene dimensión $n \in \mathbb{N}$ y sea $U = \big\{u_1, u_2, \ldots, u_n\big\}$ una base algebraica de X. Las coordenadas de cada vector $x \in X$ dependen linealmente de x, luego existe un conjunto $U^* = \big\{u_1^*, u_2^*, \ldots, u_n^*\big\} \subset X^*$, verificando que la igualdad $x = \sum_{k=1}^{n} u_k^*(x)\, u_k$ nos da la única forma de expresar cada vector $x \in X$ como combinación lineal de elementos de U. Es claro entonces que

$$x^* = \sum_{k=1}^{n} x^*(u_k)\, u_k^* \qquad \forall x^* \in X^* \tag{5}$$

es la única forma de expresar cada $x^* \in X^*$ como combinación lineal de elementos de U^*. Por tanto, U^* es una base algebraica de X^*, a la que llamamos *base dual* de U. A su vez, U^* tiene una base dual $U^{**} = \{u_1^{**}, u_2^{**}, \ldots, u_n^{**}\}$, y de (5) se deduce claramente que $u_k^{**} = J(u_k)$ para todo $k \in \{1,2,\ldots,n\}$, donde $J : X \to X^{**}$ es la inyección canónica. Tenemos así una comprobación bien detallada de la reflexividad de X.

Si ahora Y es otro espacio normado, de dimensión $m \in \mathbb{N}$, fijamos también en Y una base algebraica $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$, con lo que en Y^* tenemos la base dual $V^* = \{v_1^*, v_2^*, \ldots, v_m^*\}$. En las bases U y V, sabemos que cada operador lineal $T \in L(X,Y)$ queda representado por una matriz $m \times n$ con coeficientes escalares, la matriz $A = \big(a_{jk}\big)$ dada por $a_{jk} = v_j^*\big(T(u_k)\big)$ para $j \in \{1,2,\ldots,m\}$ y $k \in \{1,2,\ldots n\}$. De hecho, se tiene claramente

$$v_j^*\big(T(x)\big) = \sum_{k=1}^{n} v_j^*\big(T(u_k)\big)\, u_k^*(x) = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\, u_k^*(x) \quad \forall j \in \{1,2,\ldots,n\}, \quad \forall x \in X$$

luego si escribimos cada $x \in X$ como un vector columna formado por sus coordenadas en la base U, y hacemos lo mismo con $T(x)$ en la base V, la igualdad anterior nos dice que el vector columna $T(x)$ es el producto de la matriz A por el vector columna x, luego el operador T se expresa como producto de matrices: $T(x) = Ax$ para todo $x \in X$.

Pues bien, en las bases duales V^* y U^*, el operador transpuesto $T^*: Y^* \to X^*$ se representa a su vez por una matriz $n \times m$, que viene dada por $A^* = \left(a^*_{kj}\right)$, donde $a^*_{kj} = u^{**}_k\left(T^*(v^*_j)\right)$ para $k \in \{1,2,\ldots,n\}$ y $j \in \{1,2,\ldots,m\}$. Ahora bien, para j y k arbitrarios, se tiene

$$a^*_{kj} = u^{**}_k\left(T^*(v^*_j)\right) = \left(J(u_k)\right)\left(T^*(v^*_j)\right) = \left(T^*(v^*_j)\right)(u_k) = v^*_j\left(T(u_k)\right) = a_{jk}$$

luego A^* es la matriz transpuesta de A.

Esta es la razón por la que a T^* le llamamos operador transpuesto de T. Así pues, puede decirse que la noción de operador transpuesto generaliza la de matriz transpuesta. Veamos ahora las propiedades básicas del operador transpuesto.

- *Si X e Y son espacios normados arbitrarios, para todo operador $T \in L(X,Y)$ se tiene que $T^* \in L(Y^*, X^*)$ con $\|T^*\| = \|T\|$.*

Para cualesquiera $y^* \in Y^*$ y $x \in X$ se tiene

$$\left|\left(T^*(y^*)\right)(x)\right| = \left|y^*\left(T(x)\right)\right| \leqslant \|y^*\|\,\|T\|\,\|x\|$$

luego $\|T^*(y^*)\| \leqslant \|T\|\,\|y^*\|$. Por tanto, T^* es continuo con $\|T^*\| \leqslant \|T\|$. La igualdad se deduce usando la norma de Y^* para calcular normas en Y. Más concretamente, si llamamos B a la bola unidad de X y B^* a la de Y^*, se tiene:

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup\left\{\|T(x)\| \,:\, x \in B\right\}\\ &= \sup\left\{\left|y^*\left(T(x)\right)\right| \,:\, y^* \in B^*,\ x \in B\right\}\\ &= \sup\left\{\left|\left(T^*(y^*)\right)(x)\right| \,:\, y^* \in B^*,\ x \in B\right\}\\ &= \sup\left\{\|T^*(y^*)\| \,:\, y^* \in B^*\right\} = \|T^*\|\end{aligned}$$

Nótese que en la segunda igualdad hemos usado el teorema de Hahn-Banach, las demás se verifican por definición de las normas de los operadores o funcionales involucrados. ■

Es claro que la aplicación $T \mapsto T^*$, de $L(X,Y)$ en $L(Y^*,X^*)$ es lineal, y acabamos de ver que es isométrica, luego permite identificar $L(X,Y)$ con un subespacio de $L(Y^*,X^*)$.

La transposición de operadores se puede ahora iterar. Concretamente, para $T \in L(X,Y)$, consideramos el operador transpuesto de T^*, que denotamos por $T^{**} = \left(T^*\right)^*$. De esta forma tenemos que $T^{**} \in L(X^{**}, Y^{**})$, y viendo a X e Y como subespacios de sus biduales, cabe preguntarse por la relación entre T y T^{**}. La respuesta es fácil de adivinar: T^{**} puede verse como una extensión de T, en el sentido que sigue.

- *Si X e Y son espacios normados y denotamos por J_X y J_Y a las respectivas inyecciones canónicas, para todo $T \in L(X,Y)$ se tiene $T^{**} \circ J_X = J_Y \circ T$.*

Fijado $x \in X$, para todo $y^* \in Y^*$ tenemos

$$\begin{aligned}\left[T^{**}\left(J_X(x)\right)\right](y^*) &= \left[J_X(x)\right]\left(T^*(y^*)\right) = \left[T^*(y^*)\right](x)\\ &= y^*\left(T(x)\right) = \left[J_Y\left(T(x)\right)\right](y^*)\end{aligned}$$

luego $T^{**}\left(J_X(x)\right) = J_Y\left(T(x)\right)$ para todo $x \in X$, como se quería. ■

En particular, si X es un espacio de Banach reflexivo, al identificar X con X^{**} podemos entender que $T^{**} = T$. Nos interesa ahora el operador transpuesto de una composición.

- *Si X,Y,Z son espacios normados, para cualesquiera $T \in L(X,Y)$ y $S \in L(Y,Z)$, se tiene que $\big(S \circ T\big)^* = T^* \circ S^*$*

Basta observar que, para todo $z^* \in Z^*$ se tiene

$$\big(S \circ T\big)^*(z^*) = z^* \circ S \circ T = S^*(z^*) \circ T = T^*\big(S^*(z^*)\big) \qquad \blacksquare$$

Es ahora fácil entender lo que ocurre al transponer un isomorfismo.

- *Si $T : X \to Y$ es un isomorfismo entre dos espacios normados, entonces T^* también es un isomorfismo de Y^* sobre X^*, con $\big(T^*\big)^{-1} = \big(T^{-1}\big)^*$. Por tanto, si T es un isomorfismo isométrico, T^* también lo es.*

Denotando por I_Z al operador identidad en cada espacio normado Z, se tiene obviamente que $I_Z^* = I_{Z^*}$ es el operador identidad en Z^*. Por tanto, de $T^{-1} \circ T = I_X$ y $T \circ T^{-1} = I_Y$ deducimos que

$$I_{X^*} = \big(T^{-1} \circ T\big)^* = T^* \circ \big(T^{-1}\big)^* \qquad \text{y} \qquad I_{Y^*} = \big(T \circ T^{-1}\big)^* = \big(T^{-1}\big)^* \circ T^*$$

Esto prueba que T^* es un isomorfismo, y $\big(T^*\big)^{-1} = \big(T^{-1}\big)^*$. Cuando el isomorfismo T es isométrico, tenemos $\|T\| = \|T^{-1}\| = 1$, luego $\|T^*\| = \|(T^*)^{-1}\| = 1$, y vemos que T^* también es isométrico. $\blacksquare$

El resultado anterior deja claro que la reflexividad se conserva por isomorfismos. En efecto, si $T : X \to Y$ es un isomorfismo entre espacios normados, $T^{**} : X^{**} \to Y^{**}$ también lo es. Por otra parte, sabemos que las inyecciones canónicas de X e Y verifican que $T^{**} \circ J_X = J_Y \circ T$. Por tanto, si X es un espacio de Banach reflexivo, tenemos

$$Y^{**} = T^{**}(X^{**}) = T^{**}\big(J_X(X)\big) = J_Y\big(T(X)\big) = J_Y(Y)$$

luego Y también es reflexivo. Dicho de otra forma, la reflexividad de un espacio de Banach se conserva al sustituir su norma por otra equivalente.

Probemos ya con detalle la reflexividad de numerosos espacios de Banach.

- *Para $1 < p < \infty$, los espacios de Banach l_p y L_p son reflexivos.*

Para simplificar la notación escribimos $q = p^*$. Disponemos entonces de un isomorfismo isométrico $\Phi_p : l_q \to l_p^*$ dado por

$$\big(\Phi_p(y)\big)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)\, y(n) \qquad \forall x \in l_p, \quad \forall y \in l_q$$

Entonces Φ_p^* es un isomorfismo isométrico de l_p^{**} sobre l_q^*. Por otra parte, q está en la misma situación que p, con $q^* = p$, luego Φ_q es un isomorfismo isométrico de l_p sobre l_q^*.

Así pues, $\left(\Phi_p^*\right)^{-1} \circ \Phi_q$ es un isomorfismo isométrico de l_p sobre l_p^{**}, y bastará ver que tal operador es la inyección canónica J, de l_p en su bidual. Equivalentemente, se trata de probar que $\Phi_q = \Phi_p^* \circ J$. Para ello, basta observar que, fijado $x \in l_p$, para todo $y \in l_q$ se tiene

$$\left[\Phi_p^*\left(J(x)\right)\right](y) = \left[J(x)\right]\left(\Phi_p(y)\right) = \left[\Phi_p(y)\right](x) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)\,y(n) = \left[\Phi_q(x)\right](y)$$

luego $\Phi_p^*\left(J(x)\right) = \Phi_q(x)$, como se quería.

Para L_p usamos el isomorfismo isométrico $\Phi_p : L_q \to L_p^*$ dado por

$$\left(\Phi_p(g)\right)(f) = \int_0^1 f(t)\,g(t)\,dt \qquad \forall f \in L_p, \ \forall g \in L_q$$

y hacemos literalmente el mismo razonamiento empleado para l_p. ■

Merece la pena observar lo que ocurre si usamos con c_0 el mismo razonamiento empleado con l_p para $1 < p < \infty$. Partimos del isomorfismo isométrico $\Phi : l_1 \to c_0^*$ dado por

$$\left(\Phi(y)\right)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)\,y(n) \qquad \forall x \in c_0, \ \forall y \in l_1$$

Por tanto Φ^* es un isomorfismo isométrico de l_1^* sobre c_0^{**}. Por otra parte, también tenemos un isomorfismo isométrico $\Psi : l_\infty \to l_1^*$, que viene dado formalmente por la misma expresión:

$$\left(\Psi(z)\right)(y) = \sum_{n=1}^{\infty} y(n)\,z(n) \qquad \forall y \in l_1, \ \forall z \in l_\infty$$

Por tanto $\left(\Phi^*\right)^{-1} \circ \Psi$ es un isomorfismo isométrico de l_∞ sobre c_0^{**}. Vemos que l_∞ se identifica con el bidual de c_0 como ya sabíamos, pero ahora conocemos explícitamente un isomorfismo isométrico entre ellos. Es natural preguntarse en qué se convierte la inyección canónica $J : c_0 \to c_0^{**}$ cuando la vemos como aplicación de c_0 en l_∞, y la respuesta es la que cabe esperar: se convierte en la inclusión natural $I : c_0 \to l_\infty$. Ello equivale claramente a decir que $\left(\Phi^*\right)^{-1} \circ \Psi \circ I = J$, o lo que es lo mismo, que $\Psi \circ I = \Phi^* \circ J$, pero esto es bien fácil de comprobar. Fijado $x \in c_0$ para todo $y \in l_1$ se tiene:

$$\left[\Phi^*\left(J(x)\right)\right](y) = \left[J(x)\right]\left(\Phi(y)\right) = \left(\Phi(y)\right)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} y(n)\,x(n) = \left[\Psi\left(I(x)\right)\right](y)$$

de donde $\Phi^*\left(J(x)\right) = \Psi\left(I(x)\right)$ como se quería. El hecho de que c_0 no es reflexivo se puede ahora entender de forma muy clara: J no es sobreyectiva, simplemente porque I no lo es.

Revisemos algunas propiedades que permiten distinguir unos espacios de Banach de otros. Además de la separabilidad, que hemos usado a menudo, ahora disponemos de la reflexividad, que se conserva por isomorfismos. Por ejemplo, c_0 y l_1 no son reflexivos, luego ninguno de ellos puede ser isomorfo a l_p con $1 < p < \infty$.

Otra propiedad que se conserva por isomorfismos es la separabilidad del dual. Si X es un espacio de Banach con dual separable, e Y un espacio de Banach isomorfo a X, entonces Y^* es separable, por ser isomorfo a X^*. Usando esta propiedad vemos por ejemplo que c_0 no es isomorfo a l_1, pues el dual de c_0 es separable, mientras que el dual de l_1 no lo es.

7.7. Reflexividad de subespacios y cocientes

Estudiando la estabilidad de la clase de los espacios de Banach reflexivos mediante ciertas operaciones, será posible mejorar algunos razonamientos anteriores.

Dado un subespacio cerrado M de un espacio normado X, es natural preguntar la relación que pueda existir entre la reflexividad de X, la de M y la del cociente X/M. Para contestar esta pregunta, debemos relacionar los biduales y las inyecciones canónicas de los tres espacios. A poco que se piense, en esta relación intervendrá el anulador de $M^{\perp}$ como subconjunto de X^*, que lógicamente denotamos por $M^{\perp\perp} = \left(M^{\perp}\right)^{\perp} = \left\{x^{**} \in X^{**} \,:\, x^{**}(x^*) = 0 \ \forall x^* \in M^{\perp}\right\}$. Pues bien, la relación buscada, que sólo necesitamos a nivel algebraico, es la siguiente:

- *Sea M un subespacio cerrado de un espacio normado X, denotemos por $I : M \to X$ a la inclusión natural y por $q : X \to X/M$ a la aplicación cociente. Se tiene entonces:*
  - (i) *El operador $I^{**} : M^{**} \to X^{**}$ es inyectivo y su imagen es $M^{\perp\perp}$*
  - (ii) *El operador $q^{**} : X^{**} \to (X/M)^{**}$ es sobreyectivo y su núcleo es $M^{\perp\perp}$.*

Usaremos también la inclusión $I_1 : M^{\perp} \to X^*$ y la aplicación cociente $q_1 : X^* \to X^*/M^{\perp}$. En (1) obtuvimos un isomorfismo isométrico $\Phi : X^*/M^{\perp} \to M^*$ que verifica

$$\Phi\left(q_1(x^*)\right) = x^*\big|_M = x^* \circ I = I^*(x^*) \qquad \forall x^* \in X^*$$

Por tanto, tenemos $I^* = \Phi \circ q_1$, luego $I^*(X^*) = M^*$, es decir, el operador I^* es sobreyectivo, y vemos también que $\ker I^* = \ker q_1 = M^{\perp}$.

A su vez, en (2) se obtuvo otro isomorfismo isométrico $\Psi : (X/M)^* \to M^{\perp}$, dado por

$$\Psi(w^*) = w^* \circ q = q^*(x^*) \qquad \forall w^* \in (X/M)^*$$

Tenemos por tanto $I_1 \circ \Psi = q^*$, luego q^* es inyectivo y su imagen es $M^{\perp}$.

Todo lo dicho es cierto para todo subespacio cerrado M de un espacio normado X, luego podemos usarlo para $M^{\perp}$ como subespacio cerrado de X^*. Obtenemos, por una parte, que I_1^* es sobreyectivo con núcleo $M^{\perp\perp}$, y por otra que q_1^* es inyectivo, con imagen $M^{\perp\perp}$.

Pues bien, de $I^* = \Phi \circ q_1$ deducimos que $I^{**} = q_1^* \circ \Phi^*$. Como Φ^* y q_1^* son inyectivos, vemos que I^{**} también lo es. Como además Φ^* es sobreyectivo, la imagen de I^{**} coincide con la de q_1^*, que es $M^{\perp\perp}$, como ya se ha dicho. Esto demuestra la afirmación (i).

Para (ii), de $I_1 \circ \Psi = q^*$ deducimos que $q^{**} = \Psi^* \circ I_1^*$, con lo que q^{**} es sobreyectivo, ya que tanto I_1^* como Ψ^* lo son. Como además Ψ^* es inyectivo, el núcleo de q^{**} coincide con el de I_1^*, que es $M^{\perp\perp}$ como ya sabíamos. ■

Podemos ya probar el resultado que aclara perfectamente la relación entre la reflexividad de un espacio de Banach, la de sus subespacios cerrados y la de sus cocientes.

Teorema (Reflexividad de subespacios y cocientes). *Sea X un espacio de Banach y M un subespacio cerrado de X. Entonces X es reflexivo si, y sólo si, M y X/M son reflexivos.*

Demostración. Sean otra vez $I : M \to X$ la inclusión natural y $q : X \to X/M$ la aplicación cociente. Denotando por J_X, J_M y $J_{X/M}$ a las inyecciones canónicas, sabemos que

$$I^{**} \circ J_M = J_X \circ I \qquad \text{y} \qquad q^{**} \circ J_X = J_{X/M} \circ q \tag{6}$$

En primer lugar, suponiendo que X es reflexivo, se trata de probar que M también lo es. Dado $y^{**} \in M^{**}$, tomando $x^{**} = I^{**}(y^{**})$, por el resultado anterior se tiene $x^{**} \in M^{\perp\perp} \subset X^{**}$. Como hemos supuesto que X es reflexivo, existe $x \in X$ tal que $x^{**} = J_X(x)$. Para todo $x^* \in M^{\perp}$ se tiene entonces

$$x^*(x) = \big(J_X(x)\big)(x^*) = x^{**}(x^*) = 0$$

ya que $x^{**} \in M^{\perp\perp}$. La caracterización del cierre de un subespacio obtenida en (4) nos dice que, al ser $x^*(x) = 0$ para todo $x^* \in M^{\perp}$ se tiene $x \in \overline{M} = M$, es decir, $x = I(y)$ con $y \in M$. Usando la primera igualdad de (6), vemos entonces que

$$I^{**}\big(J_M(y)\big) = J_X\big(I(y)\big) = J_X(x) = x^{**} = I^{**}(y^{**})$$

pero el resultado anterior también nos dice que el operador I^{**} es inyectivo, luego $y^{**} = J_M(y)$. Esto prueba que $M^{**} = J_M(M)$, es decir, M es reflexivo, como se quería.

Seguimos suponiendo que X es reflexivo y se trata ahora de probar que X/M también lo es. La clave para ello está en usar que, de nuevo por el resultado anterior, el operador q^{**} es sobreyectivo. Dado $w^{**} \in (X/M)^{**}$, escribimos $w^{**} = q^{**}(x^{**})$ con $x^{**} \in X^{**}$ y, por ser X reflexivo, existe $x \in X$ tal que $J_X(x) = x^{**}$. Tomando entonces $w = q(x)$, la segunda igualdad de (6) nos permite concluir que

$$J_{X/M}(w) = J_{X/M}\big(q(x)\big) = q^{**}\big(J_X(x)\big) = q^{**}(x^{**}) = w^{**}$$

y esto prueba que X/M es reflexivo.

Supongamos finalmente que M y X/M son reflexivos, para probar que X también lo es. Dado $x^{**} \in X^{**}$ tenemos $q^{**}(x^{**}) \in (X/M)^{**}$ y podemos usar que X/M es reflexivo para obtener $w \in X/M$ tal que $J_{X/M}(w) = w^{**}$. Escribiendo entonces $w = q(x)$ con $x \in X$, usamos de nuevo la segunda igualdad de (6) para obtener que

$$q^{**}\big(J_X(x)\big) = J_{X/M}\big(q(x)\big) = w^{**} = q^{**}(x^{**})$$

luego $x^{**} - J_X(x)$ pertenece al núcleo del operador q^{**}, que por el resultado anterior es $M^{\perp\perp}$. El mismo resultado nos dice que $M^{\perp\perp}$ es la imagen del operador I^{**}, luego existe $y^{**} \in Y^{**}$ tal que $I^{**}(y^{**}) = x^{**} - J_X(x)$. Por ser M reflexivo, existe $y \in M$ tal que $y^{**} = J_M(y)$. Usando la primera igualdad de (6), tenemos entonces $x^{**} - J_X(x) = I^{**}\big(J_M(y)\big) = J_X\big(I(y)\big)$, de donde obtenemos $x^{**} = J_X\big(x + I(y)\big) \in J_X(X)$, luego X es reflexivo, como se quería. ■

Deducimos de este teorema que, dados dos espacios de Banach X e Y, el producto $X \times Y$ es reflexivo si, y sólo si, lo son X e Y. Basta pensar que $M = X \times \{0\}$ es un subespacio cerrado de $X \times Y$ isomorfo a X, con $(X \times Y)/M$ isomorfo a Y. De este resultado, que se podría haber probado de forma más fácil, se deduce el teorema anterior, en el caso de que M esté complementado en X, pues entonces X es isomorfo a $M \times (X/M)$. Vemos que, si M no está complementado en X, el cociente X/M suple al complemento topológico que no tenemos.

Por otra parte, el teorema anterior nos da nueva información sobre la reflexividad de ciertos espacios de Banach concretos. Como c_0 no es reflexivo, y es subespacio cerrado de l_∞, vemos que l_∞ tampoco es reflexivo. De manera más general, si Γ es un conjunto infinito, usando un subconjunto infinito y numerable de Γ, es fácil comprobar que l_∞ es isométricamente isomorfo a un subespacio de $l_\infty(\Gamma)$. Por tanto, tenemos:

- *Si Γ es un conjunto infinito, el espacio de Banach $l_\infty(\Gamma)$ no es reflexivo.*

Con respecto a los espacios de Lebesgue, recordemos que l_1 y l_∞ son isométricamente isomorfos a subespacios cerrados de L_1 y L_∞ respectivamente, luego tenemos:

- *Los espacios de Banach L_1 y L_∞ no son reflexivos.*

El teorema anterior también permite mejorar algunos resultados comentados anteriormente, sobre la imposibilidad de que ciertos espacios de Banach sean isomorfos. Concretamente, si M es un subespacio cerrado de l_p, con $1 < p < \infty$ sabemos ahora que M y l_p/M son espacios de Banach reflexivos, luego ninguno de ellos puede ser isomorfo a c_0 o a l_1.

7.8. Reflexividad del dual

Vamos a probar ahora la equivalencia entre la reflexividad de un espacio de Banach y la de su dual. Usamos un razonamiento debido al matemático francés J. Dixmier, nacido en 1924, que tiene interés en sí mismo.

Dado un espacio normado X, consideramos el operador transpuesto $J_X^* : X^{***} \to X^*$, de la inyección canónica $J_X : X \to X^{**}$. Cada $x^{***} \in X^{***}$ es un funcional lineal continuo en X^{**} e intuitivamente, $J_X^*(x^{***}) = x^{***} \circ J_X$ no es más que la restricción de x^{***} a X, cuando vemos X como subespacio de X^{**}. En sentido contrario, tenemos la inyección canónica $J_{X^*} : X^* \to X^{***}$, que intuitivamente extiende cada funcional $x^* \in X^*$, definido en X, a todo el espacio X^{**}.

Al restringir un funcional que previamente hemos extendido, debemos obtener el funcional de partida, luego se debe tener

$$J_X^* \circ J_{X^*} = I_{X^*} \tag{7}$$

donde I_{X^*} es la identidad en X^*. Lo comprobamos fácilmente, pues basta observar que, para cualesquiera $x^* \in X^*$ y $x \in X$, se tiene

$$\big[J_X^*\big(J_{X^*}(x^*)\big)\big](x) = \big[J_{X^*}(x^*)\big]\big(J_X(x)\big) = \big(J_X(x)\big)(x^*) = x^*(x)$$

Si ahora hacemos la composición en el orden opuesto y definimos $P_X = J_{X^*} \circ J_X^*$, es fácil comprobar que P_X es una proyección lineal en X^{***}, pues de (7) deducimos que

$$P_X \circ P_X = J_{X^*} \circ \big(J_X^* \circ J_{X^*}\big) \circ J_X^* = J_{X^*} \circ J_X^* = P_X$$

Vemos también en (7) que la imagen de J_X^* es X^*, luego $J_{X^*}(X^*)$ es la imagen de P_X. Como J_{X^*} es inyectiva, el núcleo de P_X coincide con el de J_X^*, pero para $x^{***} \in X^{***}$ se tiene

$$J_X^*(x^{***}) = 0 \iff x^{***} \circ J_X = 0 \iff x^{***}\big(J_X(x)\big) = 0 \quad \forall x \in X$$

Así pues, teniendo en cuenta que $J_X(X) \subset X^{**}$, vemos que $\ker P_X = J_X(X)^{\perp}$.

Por último es claro que P_X es continua con $\|P_X\| \leqslant \|J_X^*\| \, \|J_{X^*}\| = \|J_X\| \, \|J_{X^*}\| = 1$. De hecho será $\|P_X\| = 1$ salvo que $P_X = 0$, cosa que sólo ocurre cuando $X^* = \{0\}$, es decir, en el caso trivial $X = \{0\}$. Se dice que P_X es la **proyección de Dixmier** asociada al espacio normado X. En resumen, hemos comprobado lo siguiente:

- *Para todo espacio normado X se tiene la suma topológico-directa*

$$X^{***} = J_{X^*}(X^*) \oplus J_X(X)^{\perp} \tag{8}$$

La proyección lineal de X^{***} sobre $J_{X^*}(X^*)$, con núcleo $J_X(X)^{\perp}$, es la proyección de Dixmier $P_X = J_{X^*} \circ J_X^*$.

La relación entre la reflexividad de un espacio de Banach y la de su dual es ya inmediata.

- *Un espacio de Banach es reflexivo si, y sólo si, lo es su dual.*

Si X es un espacio de Banach reflexivo, tenemos $J_X(X) = X^{**}$, luego $J_X(X)^{\perp} = \{0\}$, y vemos en (8) que $X^{***} = J_{X^*}(X^*)$, es decir, X^* es reflexivo.

Recíprocamente, supongamos que X es un espacio de Banach tal que X^* es reflexivo, es decir, con $X^{***} = J_{X^*}(X^*)$. Entonces (8) nos dice que $J_X(X)^{\perp} = \{0\}$ y de la igualdad (4), aplicada a $J_X(X)$ como subespacio de X^{**}, deducimos que $J_X(X)$ es denso en X^{**}. Ahora bien, como X es completo, $J_X(X)$ también lo es, luego $J_X(X)$ es cerrado en X^{**}. Concluimos por tanto que $J_X(X) = X^{**}$, es decir, X es reflexivo. ■

A la vista del resultado anterior, pensemos como pueden ser los sucesivos duales de un espacio de Banach X. Denotando por $X^{(n)}$ al n-ésimo dual de X, cuando X es reflexivo esta sucesión sólo tiene dos términos significativos, ya que $X^{(n)}$ se identifica con X o con X^* según que n sea par o impar. Por el contrario, cuando X no es reflexivo, tenemos dos sucesiones estrictamente crecientes de espacios de Banach, pues identificando cada espacio con la imagen de su inyección canónica, tenemos $X \subset X^{(2)} \subset X^{(4)} \ldots$, y también $X^* \subset X^{(3)} \subset X^{(5)} \ldots$, siendo todas las inclusiones estrictas.

Comentemos finalmente que, para un espacio de Banach no reflexivo X, la proyección de Dixmier sigue teniendo interés, lo que se entiende mejor si identificamos X y X^* con sus imágenes por las inyecciones canónicas respectivas. Entonces podemos escribir $X^{\perp} = J_X(X)^{\perp}$ y la igualdad (8) toma una forma más intuitiva:

$$X^{***} = X^* \circ X^{\perp}$$

Tomando como referencia el espacio de Banach $Y = X^*$, vemos entonces que, por el hecho de ser un espacio dual, Y está complementado en su bidual $Y^{**} = X^{***}$. Por ejemplo, l_1 puede verse como subespacio complementado de l_∞^*.

Veamos en cambio un ejemplo de espacio de Banach que no está complementado en su bidual. Recordemos que, cuando c_0^{**} se identifica con l_∞, la inyección canónica $J : c_0 \to c_0^{**}$ se convierte en la inclusión natural $I : c_0 \to l_\infty$. Por el teorema de Phillips, sabemos que $I(c_0)$ no está complementado en l_∞, es decir, que $J(c_0)$ no está complementado en c_0^{**}. Es fácil ver que, si un espacio de Banach Y está complementado en Y^{**}, lo mismo le ocurre a todo espacio de Banach isomorfo a Y. Concluimos que no existe ningún espacio de Banach X, tal que X^* sea isomorfo a c_0.

7.9. Mejor aproximación en espacios reflexivos

Vamos a obtener fácilmente una propiedad clave de los espacios de Banach reflexivos. Como motivación observamos que el resultado inicial de este tema tiene una consecuencia inmediata para estos espacios:

- *Si X es un espacio de Banach reflexivo y $x^* \in X^*$, entonces la función $|x^*|$ tiene máximo en la bola unidad de X.*

Sabemos que existe $x_0^{**} \in X^{**}$ con $\|x_0^{**}\| = 1$ y $x_0^{**}(x^*) = \|x^*\|$. Pero por ser X reflexivo, tenemos $x_0^{**} = J(x_0)$ donde $x_0 \in X$ y $J : X \to X^{**}$ es la inyección canónica. Puesto que J es isométrica, tenemos $\|x_0\| = 1$, mientras que $x^*(x_0) = x_0^{**}(x^*) = \|x^*\|$. Está claro por tanto que $x^*(x_0) = |x^*(x_0)|$ es el máximo de la función $|x^*|$ en la bola unidad de X. ■

Recordemos que, si X es un espacio normado y $x^* \in X^*$, la función $|x^*|$ tiene máximo en la bola unidad de X si, y sólo si, el núcleo de x^* es proximinal en X. El resultado anterior nos dice por tanto que, en un espacio de Banach reflexivo, todos los hiperplanos cerrados son proximinales. Pero en realidad esto es un caso muy particular del siguiente resultado:

- *En un espacio de Banach reflexivo, todos los subespacios cerrados son proximinales.*

Sea M es un subespacio de un espacio normado X, y $J : X \to X^{**}$ la inyección canónica. Para cualesquiera $y \in M$ y $x^* \in M^\perp$, se tiene $\big(J(y)\big)(x^*) = x^*(y) = 0$, luego $J(M) \subset M^{\perp\perp}$. Cuando X es un espacio de Banach reflexivo y M es cerrado en X, tenemos la otra inclusión, y por tanto la igualdad. En efecto, dado $x^{**} \in M^{\perp\perp}$, escribimos $x^{**} = J(x)$ con $x \in X$. Para todo $x^* \in M^\perp$ se tiene entonces que $x^*(x) = \big(J(x)\big)(x^*) = x^{**}(x^*) = 0$. Por ser M cerrado, en vista de (4) tenemos $x \in M$, luego $x^{**} \in J(M)$ como se quería.

Puesto que J es biyectiva e isométrica, decir que M es proximinal en X, equivale a decir que $J(M) = M^{\perp\perp}$ es proximinal en $J(X) = X^{**}$, pero esto es consecuencia del teorema de extensión Hahn-Banach, simplemente porque $M^{\perp\perp}$ es el anulador de un subespacio de un espacio normado. ■