Tema 5

Espacios normados de dimensión finita

Vamos a presentar dos resultados básicos acerca de los espacios normados más sencillos, los de dimensión finita. En primer lugar, un teorema probado por F. Hausdorff en 1932, afirmando que, para cada $N \in \mathbb{N}$, todas las normas en $\mathbb{K}^N$ son equivalentes. De hecho obtendremos un resultado formalmente más fuerte, del que se deducen varias consecuencias relevantes. Por otra parte, veremos un clásico teorema probado por F. Riesz en 1918, que nos da una caracterización puramente topológica de los espacios normados de dimensión finita.

5.1. Teorema de Hausdorff

Vamos a describir, salvo isomorfismos, todos los espacios normados de dimensión finita, pues veremos de hecho que, para cada $N \in \mathbb{N}$, todos los espacios normados de dimensión N son isomorfos. Para ello, empezamos con una sencilla observación.

Lema. *Para $N \in \mathbb{N}$, todo operador lineal, de $\mathbb{K}^N$ con la topología usual, en cualquier otro espacio normado, es continuo.*

Demostración. Sea Y un espacio normado y $T : \mathbb{K}^N \to Y$ un operador lineal. Denotando por $\{e_1, e_2, \ldots, e_N\}$ a la base usual de $\mathbb{K}^N$, sea $y_k = T(e_k)$ para todo $k \in \{1, 2, \ldots, N\}$. Se tiene entonces que

$$T(x) = T\left(\sum_{k=1}^{N} x(k)\, e_k\right) = \sum_{k=1}^{N} x(k)\, T(e_k) = \sum_{k=1}^{N} x(k)\, y_k \qquad \forall x \in \mathbb{K}^N \tag{1}$$

Fijado $k \in \{1, 2, \ldots, N\}$, la aplicación $x \mapsto x(k)$, de $\mathbb{K}^N$ en $\mathbb{K}$, es obviamente continua para la topología usual de $\mathbb{K}^N$. Por otra parte, la aplicación $\lambda \mapsto \lambda y_k$, de $\mathbb{K}$ en Y, es continua, por serlo el producto por escalares de Y. Vemos por tanto que la aplicación $x \mapsto x(k)\, y_k$ es continua, como composición de funciones continuas. De (1) deducimos entonces que T es continuo, por ser una suma de funciones continuas. ■

Pasamos a probar un primer resultado clave sobre espacios normados de dimensión finita.

Teorema de Hausdorff. *Toda biyección lineal, entre dos espacios normados de dimensión finita, es un isomorfismo.*

Demostración. En primer lugar, fijado $N \in \mathbb{N}$, sea Φ una biyección lineal de $\mathbb{K}^N$, con la topología usual, sobre un espacio normado Y. Por el lema anterior, Φ es continua, pero queremos ver que Φ es un isomorfismo, para lo cual deberemos probar que Φ^{-1} es continua.

Consideremos la esfera unidad $S = \{x \in \mathbb{K}^N : \|x\| = 1\}$, para cualquier norma en $\mathbb{K}^N$ cuya topología sea la usual. Como S es un conjunto compacto y Φ es continua, $\Phi(S)$ es un subconjunto compacto de Y. Por tanto, la norma de Y, que es una función continua, tendrá un mínimo en $\Phi(S)$, es decir, existe $u_0 \in S$ tal que $\|\Phi(u)\| \geqslant \|\Phi(u_0)\|$ para todo $u \in S$. Como Φ es inyectiva, se ha de tener $\|\Phi(u_0)\| = \rho > 0$. Fijado $y \in Y$, tomamos $x = \Phi^{-1}(y)$ y escribimos $x = \|x\| u$ con $u \in S$. Tenemos entonces

$$\|y\| = \|\Phi(x)\| = \|x\| \, \|\Phi(u)\| \geqslant \rho \|x\| = \rho \|\Phi^{-1}(y)\|$$

y esto prueba que Φ^{-1} es continua, como queríamos.

Sean ahora X e Y dos espacios normados de dimensión finita, y $T : X \to Y$ una biyección lineal. Si $N \in \mathbb{N}$ es la dimensión de X, existe una biyección lineal $\Phi : \mathbb{K}^N \to X$, así que $T \circ \Phi$ es una biyección lineal de $\mathbb{K}^N$ sobre Y. Considerando en $\mathbb{K}^N$ la topología usual, hemos visto ya que Φ y $T \circ \Phi$ son isomorfismos, luego $T = (T \circ \Phi) \circ \Phi^{-1}$ también lo es. ■

Este teorema suele enunciarse diciendo que, para cada $N \in \mathbb{N}$, todas las normas en $\mathbb{K}^N$ son equivalentes. Se puede comprobar que tal enunciado es equivalente, valga la redundancia, al que hemos usado, pero nos parece menos conveniente, porque lo queramos o no, al hablar de $\mathbb{K}^N$ tenemos presente su base usual, mientras que si hablamos de un espacio normado de dimensión N, está claro que no estamos pensando en ninguna base de dicho espacio.

Fijado $N \in \mathbb{N}$, el teorema anterior deja bien claro que $\mathbb{K}^N$, con cualquier norma, es salvo isomorfismos, el único espacio normado de dimensión N, pero da una información adicional que conviene resaltar. Si X e Y son dos espacios normados de dimensión N, el teorema no sólo nos dice que X e Y son isomorfos, sino que toda biyección lineal de X sobre Y es un isomorfismo. Merece la pena detenerse a explicar el mayor interés de esta segunda afirmación.

Si X es un espacio vectorial de dimensión N, la forma natural de definir una norma en X es bastante obvia: usar coordenadas. Fijada una base de X, tenemos una biyección lineal de X sobre $\mathbb{K}^N$, que nos permite trasladar a X cualquier norma de $\mathbb{K}^N$, por ejemplo, la euclídea. La norma que obtenemos en X depende obviamente de la base que hemos usado, dos bases distintas dan lugar a dos biyecciones lineales distintas $\Phi_1, \Phi_2 : X \to \mathbb{K}^N$, con las que obtenemos dos normas distintas, dadas por $\|x\|_1 = \|\Phi_1(x)\|$ y $\|x\|_2 = \|\Phi_2(x)\|$ para todo $x \in X$. Si el teorema anterior sólo dijese que dos espacios normados de la misma dimensión finita son isomorfos, tendríamos tan solo un isomorfismo, de X con la norma $\|\cdot\|_1$ sobre X con la norma $\|\cdot\|_2$. Esto es evidente, $\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$ es un tal isomorfismo, que de hecho es isométrico. Sin embargo, el teorema asegura que la identidad en X es otro isomorfismo, es decir, que ambas normas son equivalentes. Así pues, en X existe una única topología común a todas las normas, que no depende de la base que podamos usar para definirla, o para trabajar con ella.

5.2. Consecuencias

El teorema de Hausdorff tiene varios corolarios destacables, algunos de los cuales equivalen al propio teorema. En primer lugar, el lema previo tiene ahora una versión más general:

- *Todo operador lineal, de un espacio normado de dimensión finita, en un espacio normado arbitrario, es continuo.*

Si X es un espacio normado de dimensión $N \in \mathbb{N}$, existe una biyección lineal $\Phi : \mathbb{K}^N \to X$, que por el teorema de Hausdorff es un isomorfismo, considerando en $\mathbb{K}^N$ la topología usual. Si ahora Y es un espacio normado, y $T : X \to Y$ un operador lineal, el lema previo a dicho teorema nos dice que $T \circ \Phi$ es continuo, luego $T = T \circ \Phi \circ \Phi^{-1}$ también lo es. ■

Cabe preguntarse lo que ocurre cuando es el espacio de llegada de nuestro operador lineal el que tiene dimensión finita. La respuesta es el siguiente resultado, que generaliza lo que ya sabíamos para funcionales lineales.

- *Sean X e Y espacios normados y supongamos que Y tiene dimensión finita. Entonces, un operador lineal $T : X \to Y$ es continuo si, y sólo si, su núcleo es cerrado.*

Si T es continuo, entonces $\ker T = T^{-1}\big(\{0\}\big)$ ha de ser cerrado. Recíprocamente, si $\ker T$ es cerrado, tenemos el espacio normado cociente $X/\ker T$ y la factorización canónica de T, es decir, $T = J \circ S \circ q$, donde $q : X \to X/\ker T$ es la aplicación cociente, $J : T(X) \to Y$ la inclusión natural, y $S : X/\ker T \to T(X)$ una biyección lineal. Ahora bien, como $T(X)$ tiene dimensión finita, el teorema de Hausdorff nos dice que S es un isomorfismo y, en particular, es una aplicación continua. Pero q y J son continuas, luego T también lo es. ■

A partir de cualquiera de los dos resultados anteriores se deduce el teorema de Hausdorff, pues si $T : X \to Y$ es una biyección lineal entre espacios normados de dimensión finita, ambos nos dicen que T y T^{-1} son continuas. Por tanto, los tres resultados son equivalentes.

Puesto que la complitud se conserva por isomorfismos, del teorema de Hausdorff se deduce obviamente que *todo espacio normado de dimensión finita es completo.* En Análisis Funcional, los espacios normados de dimensión finita casi siempre aparecen como subespacios de espacios de funciones, que suelen tener dimensión infinita. Si M es un subespacio de dimensión finita de un espacio normado X, entonces M es completo con la norma inducida por X, luego M es cerrado en X. Hemos obtenido así un corolario al teorema de Hausdorff que, por la razón recién explicada, es el que se usa con más frecuencia:

- *En cualquier espacio normado, todos los subespacios de dimensión finita son cerrados.*

Como última consecuencia del teorema de Hausdorff, obtenemos una condición suficiente para que un subespacio cerrado de un espacio normado esté complementado. Recordemos que, si M es un subespacio de un espacio vectorial X, la **codimensión** de M en X es la dimensión del cociente X/M, que coincide con la de cualquier complemento algebraico de M en X.

- *Si M es un subespacio cerrado que tiene codimensión finita en un espacio normado X, entonces M está complementado en X. De hecho, todo complemento algebraico de M en X es un complemento topológico.*

Sea Z un complemento algebraico de M en X y Q la proyección lineal de X sobre Z cuyo núcleo es M. Como Z tiene dimensión finita y $\ker Q$ es cerrado en X, un resultado anterior nos dice que Q es continua. Esto significa que $X = M \oplus Z$ es una suma topológico-directa, es decir, que Z es un complemento topológico de M en X. ■

5.3. Contraejemplos en dimensión infinita

Vamos a comprobar con ejemplos que las hipótesis de dimensión finita en el teorema de Hausdorff y sus corolarios no pueden suprimirse. Los resultados son más llamativos si, en vez de considerar espacios normados concretos, trabajamos a plena generalidad. Para ello, empezamos con una sencilla observación:

- *En todo espacio vectorial se puede definir una norma.*

Sea $E = \{ u_\gamma : \gamma \in \Gamma \}$ una base algebraica de un espacio vectorial X, con lo que todo vector de X se expresa de manera única como combinación lineal de elementos de E. Esto significa que existe un conjunto $\{ f_\gamma : \gamma \in \Gamma \}$ de funcionales lineales en X tal que, para cada $x \in X$, el conjunto $\{ \gamma \in \Gamma : f_\gamma(x) \neq 0 \}$ es finito, y se tiene

$$x = \sum_{\gamma \in \Gamma} f_\gamma(x)\, u_\gamma \qquad \forall x \in X$$

Obsérvese que, para cada $x \in X$, esta suma es en realidad finita, pues sólo hay un conjunto finito de sumandos no nulos. Podemos entonces definir

$$\|x\| = \sum_{\gamma \in \Gamma} |f_\gamma(x)| \qquad \forall x \in X$$

pues de nuevo, cada una de estas sumas es finita. Es inmediato comprobar que de esta forma hemos definido una norma en X. ■

Veamos ahora que, el resultado sobre la continuidad de operadores lineales definidos en espacios normados de dimensión finita, es falso en todos los de dimensión infinita:

- *Si X es un espacio normado de dimensión infinita, existe un funcional lineal en X, que no es continuo.*

Sea E una base algebraica de X, que es un conjunto infinito, luego contiene un conjunto infinito y numerable $E_0 = \{ u_n : n \in \mathbb{N} \}$. Para obtener un funcional lineal en X, basta definirlo en E de manera arbitraria, para luego extenderlo por linealidad.

Por tanto, existe un funcional lineal f en X, que verifica $f(u_n) = n\|u_n\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Puesto que $f\big(u_n/\|u_n\|\big) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, vemos que f no está acotado en la esfera unidad de X, luego no es continuo. ■

Ahora podemos observar también que el teorema de Hausdorff está muy lejos de ser cierto en espacios de dimensión infinita:

- *Si X es un espacio normado de dimensión infinita, existe una biyección lineal $T : X \to X$, que no es continua, verificando que $T^{-1} = T$.*

Sea f un funcional lineal en X que no sea continuo, cuya existencia acabamos de probar, y sea $u \in X$ tal que $f(u) = 1$. Consideramos el operador lineal $T : X \to X$ definido por:

$$T(x) = x - 2f(x)u \qquad \forall x \in X$$

Para cada $x \in X$ tenemos $f\big(T(x)\big) = f(x) - 2f(x)f(u) = -f(x)$, de donde

$$T\big(T(x)\big) = T(x) - 2f\big(T(x)\big)u = x - 2f(x)u + 2f(x)u = x \qquad \forall x \in X$$

lo que prueba que T es biyectivo con $T^{-1} = T$. Finalmente, como $x - T(x) = 2f(x)u$ para todo $x \in X$, si T fuese continuo, f también lo sería. ■

El resultado anterior da lugar a parejas de normas, cuyas topologías no son comparables, es decir, ninguna de ellas está contenida en la otra:

- *Sea $\|\cdot\|_1$ una norma en un espacio vectorial X de dimensión infinita. Entonces existe otra norma $\|\cdot\|_2$ en X cuya topología no es comparable con la de $\|\cdot\|_1$, pero existe un isomorfismo isométrico de X con una de las normas, en X con la otra. Por tanto, $\|\cdot\|_2$ es completa si, y sólo si, lo es $\|\cdot\|_1$.*

Por llamativo que parezca, este resultado es consecuencia directa del anterior. Para abreviar, llamamos X_1 al espacio normado que se obtiene considerando en X, la norma de partida $\|\cdot\|_1$. Tenemos una biyección lineal $T : X_1 \to X_1$, que verifica $T = T^{-1}$, y no es continua. Definimos entonces

$$\big\|x\big\|_2 = \big\|T(x)\big\|_1 \qquad \forall x \in X$$

con lo que obviamente tenemos una norma $\|\cdot\|_2$ en X, y llamamos X_2 al espacio normado que se obtiene dotando a X de esta nueva norma. Se cumple la segunda parte del enunciado, puesto que T es un isomorfismo isométrico, de X_2 sobre X_1. En particular, tenemos $T \in L(X_2, X_1)$, pero también $T = T^{-1} \in L(X_1, X_2)$.

Como $T \in L(X_2, X_1)$, si la topología de X_1 contuviese a la de X_2, se tendría $T \in L(X_1, X_1)$, cosa que no es cierta. Pero como $T \in L(X_1, X_2)$, si la topología de X_2 contuviese a la de X_1, se tendría igualmente $T \in L(X_1, X_1)$. Por tanto, las topologías de X_1 y X_2 no son comparables, como se quería. ■

5.4. Teorema de Riesz

El segundo resultado fundamental de este tema asegura que, prescindiendo de la estructura de espacio vectorial, la topología de un espacio normado es capaz por sí sola de decirnos si el espacio tiene o no dimensión finita. Establece por tanto la equivalencia entre una propiedad puramente topológica y una propiedad puramente algebraica.

Preparamos la demostración con el siguiente resultado previo:

Lema de Riesz. *Sea X un espacio normado y M un subespacio cerrado de X, con $M \neq X$. Entonces, para cada $\rho \in \mathbb{R}$ con $0 < \rho < 1$, existe $x \in X$, con $\|x\| = 1$, tal que $d(x,M) \geqslant \rho$, es decir, $\|x - y\| \geqslant \rho$ para todo $y \in M$.*

Demostración. Fijamos $x_0 \in X \setminus M$ y, por ser M cerrado, se tiene que $d(x_0, M) = \alpha > 0$. Como $\alpha < \alpha/\rho$, existe $y_0 \in M$ tal que $\|x_0 - y_0\| \leqslant \alpha/\rho$. Comprobaremos que basta tomar

$$x = \frac{x_0 - y_0}{\|x_0 - y_0\|}$$

En efecto, es obvio que $\|x\| = 1$ y, para todo $y \in M$ se tiene

$$\|x - y\| = \frac{\big\|x_0 - y_0 - \|x_0 - y_0\|\, y\big\|}{\|x_0 - y_0\|} \geqslant \frac{\alpha}{\|x_0 - y_0\|} \geqslant \rho$$

lo que equivale a $d(x,M) \geqslant \rho$, como se quería. ■

Para $1 \leqslant p < \infty$, es fácil ver que la esfera unidad de l_p no es compacta. De hecho, si $\{e_n\}$ es la sucesión de los vectores unidad, para $n,m \in \mathbb{N}$ con $n \neq m$ se tiene $\|e_n - e_m\|_p = 2^{1/p}$. Tenemos así una sucesión en la esfera unidad de l_p, que claramente no admite ninguna sucesión parcial convergente, luego dicha esfera unidad no es compacta. Pues bien, el lema anterior permite probar fácilmente que lo mismo ocurre en todo espacio normado de dimensión infinita:

Teorema de Riesz. *Si en un espacio normado X, la esfera unidad $S = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ es un conjunto compacto, entonces X tiene dimensión finita.*

Demostración. Fijemos $\rho \in \mathbb{R}$, con $0 < \rho < 1$, por ejemplo $\rho = 1/2$. Las bolas abiertas de radio ρ, centradas en puntos de S, forman un recubrimiento de S por abiertos, del que podrá extraerse un subrecubrimiento finito. Existen por tanto $n \in \mathbb{N}$ y $z_1, z_2, \ldots, z_n \in S$ tales que

$$S \subset \bigcup_{k=1}^{n} \{x \in X : \|x - z_k\| < \rho\} \tag{2}$$

Tomando $M = \operatorname{Lin}\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$, por un corolario al teorema de Hausdorff, sabemos que M es cerrado en X, y de hecho veremos que $M = X$, con lo que X tendrá dimensión finita. En efecto, si fuese $M \neq X$, el lema anterior nos daría un $x \in S$ tal que $d(x,M) \geqslant \rho$, y en particular se tendría $\|x - z_k\| \geqslant \rho$ para todo $k \in \{1,2,\ldots,n\}$, en clara contradicción con (2). ■

El hecho de que la esfera unidad de un espacio normado X sea un conjunto compacto, parece depender esencialmente de la norma concreta que estamos considerando. Sin embargo, sólo depende de la topología de X, sin usar siquiera su estructura de espacio vectorial.

Caracterizaciones de los espacios normados de dimensión finita. *Si X es un espacio normado y B su bola unidad, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *X tiene dimensión finita*
(ii) *X es un espacio topológico localmente compacto*
(iii) *B es compacta*
(iv) *Todo subconjunto cerrado y acotado de X es compacto*
(v) *La esfera unidad de X es compacta.*

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$. Si X tiene dimensión $N \in \mathbb{N}$, el teorema de Hausdorff nos dice que X es isomorfo, y en particular homeomorfo, a $\mathbb{K}^N$ con la topología usual, que es un espacio topológico localmente compacto, luego igual le ocurre a X.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Sea K un entorno de cero compacto en X y sea $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $rB \subset K$. Entonces, rB es un subconjunto cerrado del compacto K, luego rB es compacto. Como las homotecias son homeomorfismos de X, deducimos que B también es un conjunto compacto.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Sea E es un subconjunto cerrado y acotado de X y $\rho \in \mathbb{R}^+$ tal que $E \subset \rho B$. Por hipótesis B es compacta, luego lo mismo le ocurre a ρB. Entonces E es un subconjunto cerrado del compacto ρB, luego E es compacto.

Por último, $(iv) \Rightarrow (v)$ es evidente, mientras que $(v) \Rightarrow (i)$ es el teorema de Riesz. ■

Resaltamos lo más llamativo del teorema anterior: la afirmación (ii), que sólo involucra la topología de X, y no su estructura de espacio vectorial, es equivalente a (i), que sólo involucra la estructura de espacio vectorial de X, pero no su topología.

Para trabajar en espacios normados de dimensión infinita, la conclusión más relevante que debemos extraer del teorema anterior, es la escasez de conjuntos compactos en tales espacios. Como lo bola unidad no es compacta, ninguna bola cerrada de radio positivo puede serlo, luego un conjunto compacto no puede contener bolas no triviales:

- *En cualquier espacio normado de dimensión infinita, todo subconjunto compacto tiene interior vacío.*

5.5. Mejor aproximación

El lema de Riesz, origen de los resultados anteriores, tiene una interpretación geométrica sencilla, que plantea una pregunta muy natural. Supongamos que un subespacio cerrado M de un espacio normado X verifica la tesis de dicho lema, pero con $\rho = 1$. Entonces existe $x \in X$ con $\|x\| = d(x,M) = 1$, luego el origen es un punto de M situado a mínima distancia de x. Podemos entender que, en cierto modo, el vector x es “perpendicular” a M. En general, el lema de Riesz nos da, para cada $\rho \in]0,1[$, un $x \in X$ tal que $\|x\| = 1$ y $d(x,M) \geqslant \rho$, es decir, nos da vectores que están tan cerca como queramos de ser perpendiculares a M en el sentido antes indicado, luego es natural preguntar si se puede tomar $\rho = 1$. Revisando la demostración del lema, se observa que ello equivale a que el ínfimo que define a la norma cociente de alguna clase de equivalencia no nula en X/M sea un mínimo, cuestión que quedó aplazada en el tema anterior, y ahora vamos a abordar.

Las nociones que siguen tienen sentido en cualquier espacio métrico, pero las planteamos en el caso que nos interesa. Sea X un espacio normado y A un subconjunto no vacío de X. Dado $x \in X$, se dice que $y \in A$ es una **mejor aproximación** de x en A, cuando verifica que

$$\|x - y\| = d(x,A), \qquad \text{es decir,} \qquad \|x - y\| \leqslant \|x - a\| \quad \forall a \in A$$

En general, una tal mejor aproximación puede no existir, y cuando existe, puede no ser única. Se dice que A es un **conjunto proximinal** en X, cuando todo punto $x \in X$ tiene al menos una mejor aproximación en A. Es claro que para ello A tiene que ser cerrado en X, pues para $x \in \overline{A}$ se tiene $d(x,A) = 0$, luego si existe $y \in A$ tal que $\|x - y\| = 0$, se tiene $x = y \in A$. Es natural preguntarse hasta qué punto es cierto el recíproco, pregunta cuyo estudio es uno de los objetivos generales de toda una rama de la Matemática, la *Teoría de Aproximación.*

Cuando el conjunto A está contenido en un subespacio de dimensión finita, es fácil probar que la pregunta planteada tiene respuesta afirmativa:

- *Sea A un subconjunto no vacío y cerrado de un espacio normado X. Si* $\operatorname{Lin} A$ *tiene dimensión finita, entonces A es proximinal en X. Por tanto, todo subespacio de dimensión finita es proximinal en X.*

Dado $x \in X$, tomando $r \in \mathbb{R}$ con $r > d(x,A)$, el conjunto $A_r = \{a \in A : \|x - a\| \leqslant r\}$ no es vacío. Además A_r es un subconjunto cerrado y acotado del espacio normado de dimensión finita $\operatorname{Lin} A$, luego A_r es compacto. Por tanto, la función continua $a \mapsto \|x - a\|$ tiene mínimo en A_r, es decir, existe $y \in A_r$ tal que $\|x - y\| \leqslant \|x - a\|$ para todo $a \in A_r$. Pero si $a \in A \setminus A_r$, se tiene $\|x - a\| > r \geqslant \|x - y\|$, luego y es una mejor aproximación de x en A.

Si M es un subespacio de dimensión finita de X, sabemos que M es cerrado en X, luego basta tomar $A = M$, ya que $\operatorname{Lin} M = M$ tiene dimensión finita. ■

En la demostración anterior, la compacidad juega un papel clave, lo que nos hace sospechar que el resultado no va a ser cierto en general. como efectivamente vamos a comprobar.

Pensemos en la proximinalidad de un subespacio cerrado M de un espacio normado X, el caso que tiene más interés. Un vector $x_0 \in X$ tiene una mejor aproximación en M si, y sólo si, el ínfimo que define a la norma cociente de la clase de equivalencia $x_0 + M$ es un mínimo, es decir, existe $y_0 \in M$ tal que $\|x_0 - y_0\| = \min \{\|x_0 - y\| : y \in M\} = \|x_0 + M\|$. Cuando M tiene codimensión 1 en X, es decir, cuando $M = \ker f$ con $f \in X^* \setminus \{0\}$, podemos calcular fácilmente la norma cociente, y la posible proximinalidad de M equivale a otro problema, que hasta ahora no habíamos abordado.

- *Si X es un espacio normado y $f \in X^* \setminus \{0\}$, se verifica que*

$$d\big(x, \ker f\big) = \frac{|f(x)|}{\|f\|} \qquad \forall x \in X$$

Además, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $\ker f$ *es proximinal en X*
(ii) *La función $|f|$ tiene máximo en la esfera unidad de X.*

Fijado $x \in X$, para todo $y \in \ker f$ se tiene

$$\left| f(x) \right| = \left| f(x-y) \right| \leqslant \| f \| \, \| x-y \|$$

de donde se deduce claramente una desigualdad: $|f(x)| \leqslant \| f \| \, d\big(x, \ker f\big)$.

Por otra parte, sea $z \in X$ con $\| z \| = 1$ y supongamos de momento que $f(z) \neq 0$. Tomando entonces $y = x - \big(f(x)\, z / f(z)\big)$, se tiene que $y \in \ker f$ con $\| x-y \| = |f(x)|/|f(z)|$, de donde

$$\left| f(z) \right| d\big(x, \ker f\big) \leqslant \left| f(z) \right| \left\| x-y \right\| = \left| f(x) \right|$$

lo cual es obvio cuando $f(z) = 0$, así que es válido para todo z en la esfera unidad de X. Deducimos claramente la otra desigualdad: $\| f \| \, d\big(x, \ker f\big) \leqslant |f(x)|$. La equivalencia entre las afirmaciones del enunciado se prueba ya con facilidad.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Fijado $x \in X$ con $f(x) \neq 0$, existe $y \in \ker f$ tal que

$$\| f \| \, \| x-y \| = \| f \| \, d\big(x, \ker f\big) = | f(x) | = | f(x-y) |$$

Tomando $u = (x-y) / \| x-y \|$ se tiene $\| u \| = 1$ y $| f(u) | = \| f \|$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Por hipótesis, existe $u \in X$, con $\| u \| = 1$, tal que $| f(u) | = \| f \|$. Dado $x \in X$, tomando $y = x - \big(f(x)\, u / f(u)\big)$ se tiene claramente $y \in \ker f$ con

$$\| x-y \| = \frac{| f(x) | \, \| u \|}{| f(u) |} = \frac{| f(x) |}{\| f \|} = d\big(x, \ker f\big)$$

luego y es una mejor aproximación de x en $\ker f$. ■

Veamos ahora un ejemplo sencillo en el que no se verifica la afirmación (ii) del enunciado anterior. Recordemos para ello la identificación de l_1^* con l_∞. Cada sucesión acotada $z \in l_\infty$ se identifica con el funcional $\widehat{z} \in l_1^*$ definido por

$$\widehat{z}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)\, z(n) \qquad \forall x \in l_1$$

Pues bien, supongamos que la función $\left| \widehat{z} \right|$ tiene máximo en la esfera unidad de l_1, es decir, que existe $u \in l_1$ con $\| u \|_1 = 1$ tal que $\left| \widehat{z}(u) \right| = \left\| \widehat{z} \right\| = \left\| z \right\|_\infty$. Se tiene entonces que

$$\left\| z \right\|_\infty = \left| \widehat{z}(u) \right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left| u(n) \right| \left| z(n) \right| \leqslant \left\| z \right\|_\infty \sum_{n=1}^{\infty} \left| u(n) \right| = \left\| z \right\|_\infty \left\| u \right\|_1 = \left\| z \right\|_\infty$$

luego todas la desigualdades que han aparecido en la cadena anterior han de ser igualdades. En particular, se tiene que $\left| u(n) \right| \left| z(n) \right| = \left| u(n) \right| \left\| z \right\|_\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $u \neq 0$, deducimos que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\left| z(n) \right| = \left\| z \right\|_\infty$, luego el supremo que define a $\| z \|_\infty$ es un máximo. Pero en general, esto no tiene por qué ocurrir: tomando $v(n) = 1 - (1/n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es obvio que $v \in l_\infty$ con $\| v \|_\infty = 1$, pero $| v(n) | < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Deducimos que la función $\left| \widehat{v} \right|$ no tiene máximo en la esfera unidad de l_1. Por el resultado anterior, tomando $M = \ker \widehat{v}$, tenemos un subespacio cerrado de l_1 que no es proximinal en l_1. Concretamente dicho subespacio viene dado por

$$M = \left\{ y \in l_1 \, : \, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n}\, y(n) = 0 \right\}$$

Aunque resulte un poco repetitivo, conviene resaltar que el ejemplo anterior da respuesta negativa a cuatro cuestiones que han aparecido anteriormente. En primer lugar, en el espacio de Banach $X = l_1$ tenemos un funcional lineal y continuo $f = \widehat{v} \in X^*$, tal que la función $|f|$ no tiene máximo en la esfera unidad de X. Equivalentemente, el hiperplano cerrado $M = \ker f$ no es proximinal en X, luego en segundo lugar, tenemos un ejemplo de un subconjunto cerrado M de un espacio de Banach X, tal que M no es proximinal en X.

En tercer lugar, existe $x_0 \in X$ que no tiene mejor aproximación en M, luego tenemos un ejemplo en el que el ínfimo que define a la norma cociente $\|x_0 + M\|$ no es un mínimo. De hecho, como X/M tiene dimensión 1, veremos que lo mismo ocurre para cualquier otro $x \in X$ tal que $x \notin M$. En efecto, escribiendo $x_0 + M = \lambda(x + M)$ con $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, tenemos

$$\left\{ \|x_0 + y\| : y \in M \right\} = \left\{ \|\lambda(x + z)\| : z \in M \right\} = \left\{ |\lambda| \, \|x + z\| : z \in M \right\}$$

luego si el ínfimo $\|x + M\|$ fuese un mínimo, entonces $\|x_0 + M\|$ también lo sería. Dicho de otra forma, ningún $x \in X$ con $x \notin M$ tiene mejor aproximación en M. En particular, no puede existir un $x \in X$ con $\|x\| = \|x + M\| = 1$, con lo que, en cuarto y último lugar, hemos comprobado que la tesis del lema de Riesz no siempre se verifica para $\rho = 1$.