Tema 4

Operaciones con espacios normados

En lo que sigue vamos a usar con frecuencia la noción de *isomorfismo* entre dos espacios normados, que es menos restrictiva que la de isomorfismo isométrico, pero hasta cierto punto permite identificarlos, de ahí su nombre. Aclarado este concepto, estudiaremos dos operaciones que, a partir de dos espacios normados conocidos, permiten obtener otros nuevos: *producto* y *cociente*. Al discutir la relación entre ellas, van a aparecer otras dos nociones importantes: las de *suma topológico-directa* y *subespacio complementado*.

4.1. Isomorfismos entre espacios normados

Hasta ahora hemos manejado una sola relación de equivalencia entre espacios normados: identificamos dos espacios normados cuando existe un isomorfismo isométrico entre ellos, pues está claro que en tal caso, los dos espacios son matemáticamente idénticos.

Sin embargo, muchas de las nociones que se usan en un espacio normado no dependen de la norma concreta del espacio, sino solamente de su topología. Ocurre por supuesto con todas las propiedades topológicas, como la compacidad o la continuidad, pero también con otras nociones que no son topológicas, como la acotación o la complitud. Para el estudio de tales nociones, podemos identificar dos espacios normados cuando exista una biyección entre ellos que los identifique como espacios vectoriales y también como espacios topológicos, aunque no del todo como espacios normados, es decir, aunque no llegue a ser un isomorfismo isométrico.

Claramente, el tipo de aplicación del que estamos hablando es una biyección lineal, que sea a la vez un homeomorfismo, es decir, un homeomorfismo lineal. En Análisis Funcional, a los homeomorfismos lineales entre espacios normados se les llama simplemente isomorfismos.

Así pues, si X e Y son espacios normados, un **isomorfismo** de X sobre Y es un operador lineal biyectivo $T : X \to Y$, tal que T y T^{-1} son continuos. Cuando tal isomorfismo existe, decimos lógicamente que X e Y son **isomorfos**. Está claro que la relación de isomorfía entre espacios normados es una relación de equivalencia. Como se ha dicho, dos espacios normados isomorfos son idénticos como espacios vectoriales y como espacios topológicos, aunque no lleguen a serlo como espacios normados.

Para tener ejemplos de isomorfismos entre espacios normados, que no son isométricos, basta pensar que dos normas en un espacio vectorial X son equivalentes si, y sólo si, la identidad es un isomorfismo, de X con una de las normas, sobre X con la otra. Dicho isomorfismo sólo es isométrico, cuando ambas normas coinciden. En cierto modo, todo los isomorfismos son del mismo tipo que los recién presentados, como vamos a ver.

Si X e Y son espacios normados, y $T : X \to Y$ un isomorfismo, tenemos

$$\| T(x) \| \leqslant \| T \| \, \|x\| \quad \forall x \in X \qquad \text{y} \qquad \| T^{-1}(y) \| \leqslant \| T^{-1} \| \, \|y\| \quad \forall y \in Y$$

Dado $x \in X$, podemos tomar $y = T(x)$ en la segunda desigualdad para obtener

$$\frac{1}{\| T^{-1} \|} \, \|x\| \leqslant \| T(x) \| \leqslant \| T \| \, \|x\| \qquad \forall x \in X$$

Vemos en particular que T es isométrico si, y sólo si, $\| T \| = \| T^{-1} \| = 1$.

En cualquier caso, si definimos $\| x \|_T = \| T(x) \|$ para todo $x \in X$, está claro que obtenemos una nueva norma $\| \cdot \|_T$ en X, que por las desigualdades anteriores es equivalente a la de partida. Ahora bien, es obvio que T es un isomorfismo isométrico de X con la norma $\| \cdot \|_T$, sobre Y. Podemos por tanto identificar esos dos espacios normados, y está claro que entonces T se convierte en el operador identidad, de X con la norma de partida, en X con la norma $\| \cdot \|_T$, siendo dichas dos normas equivalentes. Así pues, cuando dos espacios normados X e Y son isomorfos, podemos perfectamente pensar que cualquiera de ellos se obtiene a partir del otro, sustituyendo su norma por otra equivalente a ella.

Para tener un ejemplo de dos espacios normados isomorfos, que no son isométricamente isomorfos, observamos los espacios reales l_1^2 y l_2^2. Como $\| \cdot \|_1$ y $\| \cdot \|_2$ son normas equivalentes en $\mathbb{R}^2$, pero distintas, la identidad en $\mathbb{R}^2$ es un isomorfismo entre dichos espacios que no es isométrico. Pero eso no basta para asegurar que no son isométricamente isomorfos, podría existir un isomorfismo isométrico entre ellos, distinto de la identidad. Supongamos por tanto que T es un isomorfismo isométrico de l_1^2 sobre l_2^2, para llegar a una contradicción. Si J es el segmento de extremos $(1,0)$ y $(0,1)$, contenido en la esfera unidad de l_1^2, entonces $T(J)$, que es el segmento de extremos $T(1,0)$ y $T(0,1)$, estará contenido en la esfera unidad de l_2^2, una circunferencia que no contiene segmentos no triviales. Esto implica que $T(J)$ se reduce a un punto, es decir, $T(1,0) = T(0,1)$, lo cual es una contradicción, porque T era inyectivo.

4.2. Producto de espacios normados

Sean X e Y dos espacios normados, y consideremos el espacio vectorial producto $X \times Y$. Es fácil adivinar cómo podemos definir en $X \times Y$ toda una gama de normas. Concretamente, para $1 \leqslant p < \infty$ podemos escribir

$$\| (x,y) \|_p = \big(\|x\|^p + \|y\|^p \big)^{1/p} \qquad \forall (x,y) \in X \times Y \tag{1}$$

y para $p = \infty$ también podemos definir

$$\| (x,y) \|_\infty = \text{máx} \big\{ \|x\|, \|y\| \big\} \qquad \forall (x,y) \in X \times Y \tag{2}$$

Obtenemos ahora la información que cabe esperar sobre las funciones recién definidas.

- *Si X e Y son espacios normados y $1 \leqslant p \leqslant \infty$, la función $\|\cdot\|_p$, definida en (1) o (2), es una norma en $X \times Y$. Todas las normas mencionadas son equivalentes, y la topología común a todas ellas es la topología producto en $X \times Y$.*

Fijado $1 \leqslant p \leqslant \infty$, comprobar la desigualdad triangular para $\|\cdot\|_p$ no requiere volver a la desigualdad de Minkowski. Denotando por φ_p a la norma del espacio l_p^2, podemos escribir

$$\|(x,y)\|_p = \varphi_p\big(\|x\|, \|y\|\big) \qquad \forall (x,y) \in X \times Y$$

Usando que la restricción de φ_p al primer cuadrante $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$ es una función creciente en cada variable, y que φ_p verifica la desigualdad triangular, para $(x,y),(u,v) \in X \times Y$ obtenemos:

$$\begin{aligned}\|(x,y)+(u,v)\|_p &= \varphi_p\big(\|x+u\|, \|y+v\|\big) \leqslant \varphi_p\big(\|x\|+\|u\|\,,\ \|y\|+\|v\|\big)\\ &\leqslant \varphi_p\big(\|x\|, \|y\|\big) + \varphi_p\big(\|u\|, \|v\|\big) = \|(x,y)\|_p + \|(u,v)\|_p\end{aligned}$$

Por otra parte, es obvio que para $\lambda \in \mathbb{K}$ y $(x,y) \in X \times Y$ se tiene $\|\lambda(x,y)\|_p = |\lambda|\,\|(x,y)\|_p$, así como que, de $\|(x,y)\| = 0$ se deduce que $x = y = 0$.

Fijando $(x,y) \in X \times Y$, la desigualdad triangular para , $\|\cdot\|_p$ nos dice que

$$\|(x,y)\|_p \leqslant \|(x,0)\|_p + \|(0,y)\|_p = \|x\| + \|y\| = \|(x,y)\|_1$$

pero es evidente que $\|(x,y)\|_\infty \leqslant \|(x,y)\|_p$ y que $\|(x,y)\|_1 \leqslant 2\,\|(x,y)\|_\infty$. Enlazando las tres desigualdades anteriores, obtenemos

$$\|(x,y)\|_\infty \leqslant \|(x,y)\|_p \leqslant \|(x,y)\|_1 \leqslant 2\|(x,y)\|_\infty \qquad \forall (x,y) \in X \times Y$$

y esto prueba que todas las normas que estamos considerando en $X \times Y$ son equivalentes.

Denotemos por $\mathcal{T}$ a la topología producto en $X \times Y$, que sabemos tiene como base a la familia $\mathcal{B}$ formada por todos conjuntos del tipo $U \times V$ donde U y V son abiertos de X e Y respectivamente. Por otra parte, sea $\mathcal{T}_\infty$ la topología de la norma $\|\cdot\|_\infty$ que tiene como base a la familia $\mathcal{B}_\infty$ formada por todas las bolas abiertas para $\|\cdot\|_\infty$. Cada una de estas bolas es el producto cartesiano de una bola abierta en X por una bola abierta en Y, luego tenemos $\mathcal{B}_\infty \subset \mathcal{B}$, de donde $\mathcal{T}_\infty \subset \mathcal{T}$. Pero recíprocamente, si U y V son abiertos en X e Y, ambos son uniones de bolas abiertas en sus respectivos espacios, luego $U \times V$ es unión de elementos de $\mathcal{B}_\infty$. Esto prueba que $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}_\infty$, de donde $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_\infty$. Concluimos que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\infty$, y por tanto $\mathcal{T}$ es también la topología de la norma $\|\cdot\|_p$, para $1 \leqslant p < \infty$. ■

Es costumbre llamar **espacio normado producto** de X por Y, a cualquiera que se obtenga dotando a $X \times Y$ de una norma cuya topología sea la producto, por ejemplo, cualquiera de las normas $\|\cdot\|_p$ con $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Está claro que todos estos espacios normados son isomorfos, o por así decirlo, existe salvo isomorfismos un único espacio normado producto de X por Y, que se suele denotar simplemente por $X \times Y$. Ciertamente es una notación ambigua, pero ello no es problema para estudiar propiedades que se conservan por isomorfismos, como ocurre por ejemplo con la complitud. El siguiente enunciado tiene por tanto perfecto sentido:

- *Si X e Y son espacios normados, el espacio normado producto $X \times Y$ es completo si, y sólo si, lo son X e Y.*

La aplicación $x \mapsto (x,0)$ es claramente un isomorfismo de X sobre $X \times \{0\}$, que es un subespacio cerrado de $X \times Y$. Si $X \times Y$ es completo, deducimos que $X \times \{0\}$ es completo, luego X también lo es, y el mismo razonamiento se usa para Y.

Recíprocamente, supongamos que X e Y son espacios de Banach, y sea $\{(x_n, y_n)\}$ una sucesión de Cauchy en $X \times Y$. La primera proyección coordenada, $(x,y) \mapsto x$, es un operador lineal continuo de $X \times Y$ sobre X, luego $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy en X, y análogamente obtenemos que $\{y_n\}$ es de Cauchy en Y. Por tanto, $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son sucesiones convergentes, luego $\{(x_n, y_n)\}$ converge en la topología producto. ■

4.3. Cociente de espacios normados

Si M es un subespacio de un espacio vectorial X, recordemos el **espacio vectorial cociente**

$$X/M = \{x+M : x \in X\}$$

cuyas operaciones vienen dadas por

$$\big(x+M\big) + \big(z+M\big) = x+z+M \quad \text{y} \quad \lambda\big(x+M\big) = \lambda x + M \quad \forall x,z \in X, \ \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

Para trabajar con el cociente X/M, conviene siempre usar la **aplicación cociente**, que a cada vector $x \in X$ asocia la clase de equivalencia a la que pertenece, esto es

$$q : X \to X/M, \qquad q\big(x\big) = x+M \quad \forall x \in X$$

Claramente q es lineal y sobreyectiva.

Si X es un espacio normado y M un subespacio cerrado de X, definimos la norma de cada clase de equivalencia $w \in X/M$ como el ínfimo de las normas de sus representantes, es decir,

$$\|w\| = \text{ínf}\,\{\|x\| : x \in w\} \qquad \forall w \in X/M \tag{3}$$

Equivalentemente, se tiene

$$\|q(x)\| = \|x+M\| = \text{ínf}\,\{\|x+y\| : y \in M\} \qquad \forall x \in X \tag{4}$$

Observemos también que, para cada $x \in X$, la norma de su clase de equivalencia $q(x)$, es la distancia de x a M, es decir,

$$\|q(x)\| = \text{ínf}\,\{\|x-y\| : y \in M\} = d(x,M) \qquad \forall x \in X$$

Veremos más adelante que, fijado $x \in X$, el ínfimo de la igualdad anterior, o equivalentemente, el que aparece en (4), pueden no ser mínimos. Dicho de otra forma, aunque M sea cerrado, puede no existir un punto de M que esté situado a la mínima distancia de x, esto es, un $y \in M$ que verifique $\|x-y\| = d(x,M)$.

Es hora de comprobar que, efectivamente, tenemos una norma en X/M.

- *Si M es un subespacio cerrado de un espacio normado X, mediante cualquiera de las igualdades (3) y (4), se obtiene una norma en el espacio vectorial cociente X/M.*

Fijados $x_1, x_2 \in X$ e $u, v \in M$ se tiene

$$\| q(x_1 + x_2) \| \leqslant \| x_1 + x_2 + u + v \| \leqslant \| x_1 + u \| + \| x_2 + v \|$$

Como esto es válido para todo $v \in M$, deducimos que

$$\| q(x_1 + x_2) \| \leqslant \| x_1 + u \| + \| q(x_2) \|$$

pero a su vez esto es cierto para todo $u \in M$, y obtenemos la desigualdad triangular:

$$\| q(x_1 + x_2) \| \leqslant \| q(x_1 \| + \| q(x_2) \| \qquad \forall x_1, x_2 \in X$$

Por otra parte, para $x \in X$ y $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ se tiene

$$\begin{aligned} \| \lambda q(x) \| &= \inf \big\{ \| \lambda x + y \| : y \in M \big\} = \inf \big\{ \| \lambda x + \lambda u \| : u \in M \big\} \\ &= \inf \big\{ |\lambda| \, \| x + u \| : u \in M \big\} = |\lambda| \, \inf \big\{ \| x + u \| : u \in M \big\} = |\lambda| \, \| q(x) \| \end{aligned}$$

igualdad que es obvia cuando $\lambda = 0$.

Finalmente si $x \in X$ verifica que $\| q(x) \| = 0$, se tiene $d(x, M) = 0$, es decir, $x \in \overline{M}$. Pero hemos supuesto que M es cerrado, luego $x \in M$, es decir, $q(x) = 0$. ■

Entendemos ahora la razón para suponer que M es cerrado: en otro caso la definición (3) nos daría una seminorma en X/M, pero no una norma.

Como es natural, la norma definida en (3) se conoce como **norma cociente**, y su topología recibe el nombre de **topología cociente**. También es habitual decir que X/M, con dicha norma, es el **espacio normado cociente** de X por M.

Para trabajar en el espacio normado cociente se aprovechan sobre todo las propiedades de la aplicación cociente que se recogen en el siguiente enunciado:

- *Dados un espacio normado X y un subespacio cerrado $M \subset X$, consideremos el espacio normado cociente X/M. Se tiene entonces:*
  - (i) *La aplicación cociente $q : X \to X/M$ es un operador lineal continuo*
  - (ii) *La bola abierta unidad de X/M es $q(U)$, donde U es la bola abierta unidad de X*
  - (iii) *Salvo en el caso trivial $M = X$, se tiene $\|q\| = 1$*
  - (iv) *La aplicación q es abierta*
  - (v) *Un subconjunto G de X/M es abierto si, y sólo si, $q^{-1}(G)$ es un abierto de X*
  - (vi) *Si Y es cualquier espacio topológico, una aplicación $f : X/M \to Y$ es continua si, y sólo si, $f \circ q$ es continua.*

(i). Por definición de la norma cociente, se tiene evidentemente que $\| q(x) \| \leqslant \| x \|$ para todo $x \in X$, luego $q \in L(X, X/M)$ y por ahora tenemos $\| q \| \leqslant 1$.

(ii). Para $x \in U$ se tiene $\|q(x)\| \leqslant \|x\| < 1$, lo que nos da una inclusión. Pero si $w \in X/M$ verifica que $\|w\| < 1$, por definición de ínfimo ha de existir $x \in w$ tal que $\|x\| < 1$, de donde se deduce que $w = q(x) \in q(U)$, y tenemos la otra inclusión.

(iii). Suponiendo que $M \neq X$, de (ii) deducimos claramente que

$$\|q\| = \sup\left\{\|q(x)\| : x \in U\right\} = \sup\left\{\|w\| : w \in X/M, \; \|w\| < 1\right\} = 1$$

(iv). Sea A un subconjunto abierto de X, y sea $w \in q(A)$, es decir, $w = q(x)$ con $x \in A$. Existe entonces $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $x + rU \subset A$, de donde $q(x) + r\,q(U) \subset q(A)$, pero (ii) nos dice que $q(x) + r\,q(U)$ es la bola abierta en X/M, de centro $q(x) = w$ y radio r. Esto prueba que $q(A)$ es abierto, como se quería.

(v). Si G es abierto, lo será $q^{-1}(G)$, porque q es continua. Recíprocamente, si $q^{-1}(G)$ es abierto, usando (iv) obtenemos que $q\big(q^{-1}(G)\big)$ es abierto, pero por ser q sobreyectiva, se tiene $G = q\big(q^{-1}(G)\big)$.

(vi). Si f es continua, $f \circ q$ también lo es, como composición de funciones continuas. Supongamos que $f \circ q$ es continua y sea H un abierto de Y. Entonces $G = f^{-1}(H)$ verifica que $q^{-1}(G) = \big(f \circ q\big)^{-1}(H)$ es abierto, luego (v) nos dice que G es abierto. Por tanto, f es continua, como se quería. ■

La afirmación (vi) nos interesa sobre todo cuando Y es un espacio normado y f es lineal. En particular nos da información sobre la factorización canónica de un operador lineal, que pasamos a recordar.

Sea $T : X \to Y$ un operador lineal entre espacios vectoriales y consideremos su núcleo e imagen, $\ker T$ y $T(X)$, subespacios de X e Y, respectivamente. Consideramos la aplicación cociente $q : X \to X/\ker T$, lineal y sobreyectiva, y la inclusión natural $J : T(X) \to Y$, que es lineal e inyectiva. Entonces existe una única biyección lineal $S : X/\ker T \to T(X)$, verificando la igualdad $T = J \circ S \circ q$, que se conoce como factorización canónica del operador lineal T. De hecho, está claro que S ha de verificar que $S\big(q(x)\big) = T(x)$ para todo $x \in X$, y esa misma igualdad permite definir correctamente S, obteniendo la biyección lineal buscada.

Pues bien, supongamos ahora que X e Y son espacios normados y tomemos $T \in L(X,Y)$. Entonces $\ker T$ es un subespacio cerrado de X, que da lugar al espacio normado cociente, y sabemos que $q \in L(X, X/\ker T)$. Por otra parte, en $T(X)$ tenemos la norma inducida por Y, con la que J es isométrica. Pero la clave está en comprobar que el operador S también es continuo. En efecto, como $T = J \circ S \circ q$ es continuo, y J es una isometría, vemos que $S \circ q$ es continuo y basta usar la afirmación (vi) del resultado anterior. Por tanto, la factorización canónica de T lo expresa como composición de tres operadores lineales continuos, como debe ser.

Finalmente, cabe preguntarse por la complitud del espacio normado cociente. La respuesta no puede ser más diáfana:

- *Sea X un espacio normado y M un subespacio cerrado de X. Entonces X es completo si, y sólo si, M y X/M son completos.*

Si X es completo, M también lo es, por ser cerrado en X. Para probar que X/M también es un espacio de Banach, usaremos el criterio de complitud en términos de series.

Sea pues $\sum_{n\geqslant 1} w_n$ una serie absolutamente convergente en X/M y, para cada $n\in\mathbb{N}$, usemos la definición de la norma cociente para encontrar $x_n\in X$ tal que

$$w_n = q(x_n) \qquad \text{y} \qquad \|x_n\| \leqslant \|w_n\| + \frac{1}{2^n}$$

De esta forma, $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|w_n\| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty$, luego la serie $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ es absolutamente convergente y, por la complitud de X, es convergente. Como q es un operador lineal continuo, deducimos que la serie $\sum_{n\geqslant 1} q(x_n) = \sum_{n\geqslant 1} w_n$ es convergente, como se quería.

Supongamos que M y X/M son completos, y sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en X. Entonces la sucesión $\{q(x_n)\}$ es de Cauchy en X/M, luego converge a un $w\in X/M$, que se puede escribir como $w=q(z)$ con $z\in X$. Entonces $\{q(x_n-z)\}\to 0$, y la definición de la norma cociente nos permite encontrar una sucesión $\{y_n\}$ en M, tal que $\{x_n-z+y_n\}\to 0$. Entonces $\{x_n-z+y_n\}$ y $\{x_n-z\}$ son sucesiones de Cauchy, de donde deducimos que $\{y_n\}$ también lo es, ya que $y_n=(x_n-z+y_n)-(x_n-z)$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Usando entonces que M es completo, tenemos $\{y_n\}\to y\in M$, de donde $\{x_n\}=\{(x_n-z+y_n)+z-y_n\}\to z-y$. Esto prueba que X es completo y concluye la demostración. ■

4.4. Sumas topológico-directas

Estrechamente ligada a las nociones de producto y cociente de espacios vectoriales, está la descomposición de un espacio vectorial como suma directa de dos subespacios. Vamos a recordar dicha descomposición en un contexto puramente algebraico, para luego analizarla en el ambiente de los espacios normados.

Dado un subespacio M de un espacio vectorial X, comprobemos que siempre existe otro subespacio Z de X que verifica $X=M+Z$ y $M\cap Z=\{0\}$. En efecto, si A es una base algebraica de M, vemos que A es un conjunto de vectores linealmente independientes en X, luego $A\subset B$, donde B es una base algebraica de X. Basta entonces tomar $Z=\operatorname{Lin}(B\setminus A)$. En la situación descrita, se dice que X es **suma directa** de M y Z, y escribimos $X=M\oplus Z$. También diremos que Z es un **complemento algebraico** de M en X. La forma en que hemos probado su existencia, muestra que Z no es único, salvo en los casos triviales $M=X$ y $M=\{0\}$.

La suma directa es la forma correcta de descomponer un espacio vectorial: recuperamos el espacio vectorial X a partir de sus subespacios M y Z, ya que X se identifica con el espacio vectorial producto $M\times Z$, como vamos a ver. Si $X=M\oplus Z$, cada vector $x\in X$ se expresa de manera única como $x=y+z$, con $y\in M$ y $z\in Z$. Pero esto significa que definiendo

$$\varphi : M\times Z\to X, \qquad \varphi(y,z)=y+z \quad \forall\,(y,z)\in M\times Z \tag{5}$$

obtenemos una biyección lineal de $M\times Z$ sobre X, que no es más que la restricción a $M\times Z$ de la suma de X. Recíprocamente, si M y Z son subespacios de X, tales que φ es biyectiva, se tiene claramente $X=M\oplus Z$. En el siguiente enunciado resaltamos esta relación entre sumas directas y productos de espacios vectoriales.

- *Si M y Z son subespacios de un espacio vectorial X, se tiene $X = M \oplus Z$ si, y sólo si, la restricción a $M \times Z$ de la suma de X es una biyección lineal de $M \times Z$ sobre X.*

Si M y Z son espacios vectoriales arbitrarios, se tiene $M \times Z = \big(M \times \{0\}\big) \oplus \big(\{0\} \times Z\big)$, pero podemos identificar M con $M \times \{0\}$ y Z con $\{0\} \times Z$, para ver $M \times Z$ como suma directa de M con Z. Por tanto la diferencia entre las expresiones $X = M \times Z$ y $X = M \oplus Z$ es sólo cuestión de matiz, con la primera ponemos el énfasis en una *construcción*, mientras la segunda enfatiza una *descomposición*.

Las proyecciones coordenadas, de un producto sobre los factores, se vuelven aplicaciones lineales de una suma directa sobre los sumandos, que ahora vamos a considerar. Recordemos que una **proyección lineal** en un espacio vectorial X es un operador lineal $P : X \to X$ que verifica $P \circ P = P$. Una tal proyección lineal queda caracterizada cuando se conocen su imagen y su núcleo. Para comprobarlo, sean P_1 y P_2 proyecciones lineales en X con la misma imagen y núcleo. Fijado $x \in X$, se tiene $P_1(x) \in P_1(X) = P_2(X)$, luego $P_1(x) = P_2(u)$ con $u \in X$, pero entonces $x - P_2(u) = x - P_1(x) \in \ker P_1 = \ker P_2$, de donde $P_2(x) = P_2(u) = P_1(x)$, como se quería. Si P es una proyección lineal en X y $M = P(X)$, se suele decir que P es una proyección lineal de X sobre M, y si $Z = \ker P$, hemos visto que P es la única proyección lineal de X sobre M con núcleo Z.

Vamos a aclarar ahora la relación entre sumas directas y proyecciones lineales. Para evitar repeticiones, en lo que sigue, M y Z serán subespacios de un espacio vectorial X.

Si $X = M \oplus Z$, para $x \in X$ llamamos $P(x)$ al único elemento de M tal que $x - P(x) \in Z$. Está claro entonces que P es la proyección lineal de X sobre M con núcleo Z. Su relación con la biyección lineal φ definida en (5) es clara, pues se tiene $\varphi^{-1}(x) = \big(P(x), x - P(x)\big)$ para todo $x \in X$. La simetría de la situación se mantiene, pues definiendo $Q = I - P$ donde I es la identidad en X, vemos que Q es la única proyección lineal de X sobre Z con núcleo M.

Recíprocamente, si P es una proyección lineal en X, para $x \in X$ se tiene $x - P(x) \in \ker P$, luego $x = P(x) + \big(x - P(x)\big) \in P(X) + \ker P$, así que $X = P(X) + \ker P$. Pero si suponemos que $x \in P(X) \cap \ker P$, tendremos $x = P(x) = 0$, luego $X = P(X) \oplus \ker P$ y hemos obtenido la siguiente relación entre sumas directas y proyecciones lineales.

- *Se tiene $X = M \oplus Z$ si, y sólo si, existe una proyección lineal P en X tal que $M = P(X)$ y $Z = \ker P$. En tal caso, si φ es la restricción a $M \times Z$ de la suma de X, se tiene:*

$$\varphi^{-1}(x) = \big(P(x), x - P(x)\big) \qquad \forall x \in X \tag{6}$$

Así pues, los complementos algebraicos de un subespacio de X no son, ni más ni menos, que los núcleos de las proyecciones lineales de X sobre él. Veremos enseguida que todos son idénticos, como espacios vectoriales.

Sea $\psi : Z \to X/M$ la restricción a Z de la aplicación cociente, es decir, $\psi(z) = z + M$ para todo $z \in Z$. Tenemos $\psi(z) = 0$ si, y sólo si, $z \in M$, luego la igualdad $M \cap Z = \{0\}$ equivale a que ψ sea inyectiva. Por otra parte, dado $x \in X$, que exista $z \in Z$ con $x + M = \psi(z)$, es decir, tal que $x - z \in M$, equivale a que $x \in M + Z$, luego $X = M + Z$ si, y sólo si, ψ es sobreyectiva. Por tanto, se tiene $X = M \oplus Z$ si, y sólo si, ψ es biyectiva. En tal caso, es fácil relacionar ψ con la proyección lineal P de X sobre M con núcleo Z.

Para $x \in X$, tomando $z = \psi^{-1}(x+M)$ se tiene $x - z \in M$, pero el único $z \in Z$ que cumple esta condición es precisamente $x - P(x)$. Por tanto, $\psi^{-1}(x+M) = x - P(x)$ para todo $x \in X$. En resumen, hemos obtenido la siguiente relación entre sumas directas y cocientes:

- *Si ψ es la restricción a Z de la aplicación cociente de X sobre X/M, entonces se tiene que $X = M \oplus Z$ si, y sólo si, ψ es biyectiva, en cuyo caso,*

$$\psi^{-1}(x+M) = x - P(x) \qquad \forall x \in X \tag{7}$$

donde P es la única proyección lineal de X sobre M con núcleo Z.

Así pues, todo complemento algebraico de M en X se identifica con el cociente X/M, que se convierte así en una especie de "complemento canónico", pues no usamos ninguna base algebraica de X o de M para construirlo. En particular, X se identifica con $M \times (X/M)$.

Pues bien, ya está todo preparado para trabajar con estas nociones en espacios normados y veremos que la situación se complica, o se enriquece bastante, según se mire. Sea X un espacio normado, descompuesto como suma directa de dos subespacios: $X = M \oplus Z$. Queremos saber cuándo podemos decir que tenemos una descomposición correcta de X como espacio normado, y no sólo como espacio vectorial. Nos preguntamos por tanto, hasta donde podemos reconstruir el espacio normado X, a partir de los subespacios M y Z, conociendo lógicamente las normas inducidas por X en dichos subespacios.

No hay una forma natural de recuperar la norma concreta de X, simplemente porque, a partir de las normas de M y Z, hay muchas formas distintas de definir una norma en $M \times Z$. Pensemos por ejemplo lo que ocurre cuando $X = \mathbb{R}^2$, $M = \mathbb{R} \times \{0\}$ y $Z = \{0\} \times \mathbb{R}$: todas las normas $\|\cdot\|_p$ en $\mathbb{R}^2$, con $1 \leqslant p \leqslant \infty$, coinciden en M y en Z, pero no en X.

Pero volviendo al caso general, lo que sí podemos pedir es que, a partir de M y Z, podamos recuperar la topología de X, es decir, que al identificar X con el espacio vectorial $M \times Z$, la topología de X se corresponda con la topología producto. Esto es tanto como pedir que la biyección lineal φ definida en (5) sea un isomorfismo del espacio normado producto $M \times Z$ sobre X. De entrada φ es continua, por ser la restricción a $M \times Z$ de la suma de X, que es continua en $X \times X$.

La continuidad de φ^{-1} es más delicada, pues φ^{-1} será continua cuando lo sean sus dos componentes y, en vista de (6), ello equivale a la continuidad de la proyección lineal P, de X sobre M con núcleo Z, o a la de $Q = I - P$, pero esto no está nada claro. Por ejemplo, para que P sea continua es necesario que $Z = \ker P$ sea cerrado, y $M = \ker Q$ también deberá ser cerrado, pero en principio no habíamos supuesto que M y Z fuesen cerrados.

Supongamos pues que M y Z son cerrados en X, lo que permite usar los cocientes. Como espacio vectorial, Z se identifica con X/M mediante una biyección lineal $\psi : Z \to X/M$, que es la restricción a Z de la aplicación cociente $q : X \to X/M$. Considerando en X/M la norma cociente, es lógico pedir que ψ sea al menos un isomorfismo, y de entrada ψ es continua por serlo q. El criterio de continuidad, para aplicaciones definidas en un espacio normado cociente, nos dice que ψ^{-1} será continua cuando lo sea $\psi^{-1} \circ q$, pero en (7) vemos que $\psi^{-1} \circ q = Q$. De nuevo nos encontramos con que ψ es un isomorfismo si, y sólo si, P y Q son continuas.

El siguiente enunciado resume toda la discusión anterior, resaltando las tres condiciones equivalentes que deben cumplirse, para que la descomposición de un espacio normado, como suma directa de dos subespacios cerrados, tenga utilidad.

- *Sean M y Z dos subespacios cerrados de un espacio normado X, tales que $X = M \oplus Z$. Usando en M y en Z las normas inducidas por X, consideremos el espacio normado producto $M \times Z$, así como el espacio normado cociente X/M. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
  - (i) *La aplicación $\varphi : M \times Z \to X$, definida por $\varphi(y,z) = y+z$ para todo $(y,z) \in M \times Z$, es un isomorfismo*
  - (ii) *La única proyección lineal $P : X \to X$, que verifica $P(X) = M$ y $\ker P = Z$, es continua*
  - (iii) *La aplicación $\psi : Z \to X/M$, definida por $\psi(z) = z+M$ para todo $z \in Z$, es un isomorfismo.*

Cuando se verifican las afirmaciones anteriores, se dice que X es **suma topológico-directa** de M y Z, así como que Z es un **complemento topológico** de M en X. Obviamente, M será a su vez un complemento topológico de Z en X.

Para un subespacio cerrado M de un espacio normado X, existen muchos complementos algebraicos de M en X, pero tienen poca utilidad, salvo que sean complementos topológicos. Se dice que M está **complementado** en X, cuando tiene un complemento topológico. Por el resultado anterior, ello equivale a que exista una proyección lineal y continua de X sobre M. Entonces, todos los complementos topológicos de M en X son isomorfos al espacio normado cociente X/M, luego X/M hace el papel de "complemento topológico canónico" de M en X. En particular, X es isomorfo al espacio normado producto $M \times (X/M)$.

Casi todos los temas que siguen traerán condiciones suficientes para que un subespacio cerrado de un espacio normado esté complementado. Tendremos así abundantes ejemplos de subespacios complementados y sumas topológico-directas. Como ejemplo de subespacio no complementado, no es demasiado difícil, pero tampoco es nada fácil, probar que c_0 no está complementado en l_∞. Este resultado fue obtenido en 1940 por el matemático estadounidense R.S. Phillips (1913-1998). De hecho, la gran mayoría de los espacios de Banach de dimensión infinita contienen subespacios cerrados que no están complementados.

Cuando un subespacio cerrado M de un espacio normado X no está complementado en X, el cociente X/M suple a veces el papel del complemento topológico que no tenemos. Ello hace que la noción de cociente tenga más interés para espacios normados, que en el contexto general de los espacios vectoriales.

Veamos un ejemplo conocido, en el que el cociente hace el papel al que nos hemos referido. Al estudiar la complitud del cociente, vimos que X es completo siempre que M y X/M lo sean. Cuando M está complementado en X, este resultado se deduce de algo más sencillo, probado previamente: el producto de dos espacios de Banach es completo. Basta pues recordar que X es isomorfo a $M \times (X/M)$. Cuando M no está complementado en X, tal isomorfismo puede no existir, pero el resultado sigue siendo cierto, luego cabe entender que el cociente X/M sigue haciendo el papel del complemento topológico que no tenemos.