Tema 2

Ejemplos de espacios normados

Vamos a presentar una amplia colección de espacios, que permitan ilustrar los principales teoremas del Análisis Funcional. Para ello, juegan un papel clave dos herramientas muy útiles: las *desigualdades de Hölder y Minkowski*. A partir de ellas se define fácilmente una amplia gama de normas en el espacio vectorial producto $\mathbb{K}^N$, con $N \in \mathbb{N}$ arbitrario, obteniendo así numerosos espacios normados de dimensión finita. Casi con la misma facilidad, se construyen los que se conocen como *espacios de Banach clásicos*, agrupados en dos grandes familias. Por una parte, los espacios clásicos de sucesiones son los ejemplos más sencillos de espacios de Banach de dimensión infinita. Por otra, tenemos los espacios de funciones integrables, cuya construcción involucra de manera decisiva la integral de Lebesgue. Su complitud se conoce como *teorema de Riesz-Fischer*, y se considera como el detonante que dio lugar al nacimiento del Análisis Funcional. Presentaremos también algunos espacios de funciones continuas. En conjunto, obtenemos una amplia gama de espacios de Banach, que muestra la gran variedad de contextos en los que el Análisis Funcional tiene importantes aplicaciones.

2.1. Desigualdades de Hölder y Minkowski

Algunos de los espacios que vamos a construir dependerán de un parámetro p, pudiendo ser $p \in \mathbb{R}$ con $p \geqslant 1$, pero también $p = \infty$, lo que se suele indicar escribiendo $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Excluidos los valores extremos $p = 1$ y $p = \infty$, o si se quiere, para $1 < p < \infty$, definimos el *exponente conjugado* de p, que denotaremos por p^*, mediante la igualdad $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p^*} = 1$. Observamos que también $1 < p^* < \infty$ y que la relación entre p y p^* es simétrica: $\big(p^*\big)^* = p$. La concavidad del logaritmo nos da una desigualdad, previa a las dos que más nos interesan:

Desigualdad de Young. *Para $1 < p < \infty$ y cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}_0^+$, se tiene:*

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p^*}}{p^*}$$

Demostración. Aquí y en todo lo que sigue, se entiende obviamente que $0^p = 0^{p^*} = 0$. Si $a = 0$ o $b = 0$ no hay nada que demostrar y, en otro caso, usando que el logaritmo es una función cóncava obtenemos

$$\log\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^{p^*}}{p^*}\right) \geqslant \frac{1}{p}\log a^p + \frac{1}{p^*}\log b^{p^*} = \log a + \log b = \log(ab)$$

La desigualdad buscada se obtiene usando que la exponencial es una función creciente. ■

Deducimos sin gran dificultad una segunda desigualdad, más relevante:

Desigualdad de Hölder. *Si $1 < p < \infty$ y $N \in \mathbb{N}$, para $a_1, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_N \in \mathbb{R}_0^+$ se tiene:*

$$\sum_{k=1}^{N} a_k b_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{N} a_k{}^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{N} b_k{}^{p^*}\right)^{1/p^*} \tag{1}$$

Demostración. Llamando $\alpha = \left(\sum_{k=1}^{N} a_k{}^p\right)^{1/p}$ y $\beta = \left(\sum_{k=1}^{N} b_k{}^{p^*}\right)^{1/p^*}$ a los dos factores que aparecen en el segundo miembro de (1), podemos claramente suponer que $\alpha > 0$ y $\beta > 0$, pues en otro caso (1) es evidente. Usando la desigualdad de Young, podemos ahora escribir

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha\beta}\sum_{k=1}^{N} a_k b_k &= \sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{\alpha}\,\frac{b_k}{\beta} \leqslant \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{a_k^p}{p\,\alpha^p} + \frac{b_k^{p^*}}{p^*\,\beta^{p^*}}\right)\\ &= \frac{1}{p\,\alpha^p}\sum_{k=1}^{N} a_k^p + \frac{1}{p^*\beta^{p^*}}\sum_{k=1}^{N} b_k^{p^*} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1\end{aligned}$$

de donde se deduce claramente (1). ■

En un tercer paso, obtenemos ya el resultado que nos va a permitir probar la desigualdad triangular para muchas de las normas que vamos a estudiar.

Desigualdad de Minkowski. *Para $1 \leqslant p < \infty$, $N \in \mathbb{N}$ y $a_1, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_N \in \mathbb{R}_0^+$ se tiene:*

$$\left(\sum_{k=1}^{N} (a_k + b_k)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{N} a_k^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{N} b_k^p\right)^{1/p}$$

Demostración. Trabajamos con $p > 1$, pues el caso $p = 1$ es evidente. Abreviamos la notación escribiendo

$$\alpha = \left(\sum_{k=1}^{N} a_k^p\right)^{1/p}, \qquad \beta = \left(\sum_{k=1}^{N} b_k^p\right)^{1/p} \qquad \text{y} \qquad \gamma = \left(\sum_{k=1}^{N} (a_k + b_k)^p\right)^{1/p}$$

con lo que debemos probar que $\gamma \leqslant \alpha + \beta$. Partimos de una igualdad evidente:

$$\gamma^p = \sum_{k=1}^{N} a_k (a_k + b_k)^{p-1} + \sum_{k=1}^{N} b_k (a_k + b_k)^{p-1}$$

Para cada uno de los sumandos que han aparecido en el segundo miembro de la igualdad anterior, usamos ahora la desigualdad de Hölder. Como $(p-1)\,p^* = p$, obtenemos:

$$\gamma^{\,p} \leqslant (\alpha+\beta)\left(\sum_{k=1}^{N}(a_k+b_k)^p\right)^{1/p^*} = (\alpha+\beta)\,\gamma^{\,p/p^*}$$

Si $\gamma = 0$ no hay nada que demostrar y, en otro caso, podemos dividir ambos miembros de la desigualdad anterior por $\gamma^{\,p/p^*} > 0$. Teniendo en cuenta que $p-(p/p^*) = 1$, obtenemos directamente la desigualdad buscada. ■

2.2. Algunos espacios normados de dimensión finita

Fijado $N \in \mathbb{N}$, vamos a definir una amplia gama de normas en el espacio vectorial $\mathbb{K}^N$, producto cartesiano de N copias de $\mathbb{K}$. En vez de usar subíndices, las componentes de cada vector $x \in \mathbb{K}^N$ se denotarán con paréntesis, es decir, escribiendo $x = \big(x(1),x(2),\ldots,x(N)\big)$, pues en realidad x no es otra cosa que una aplicación del conjunto $\{k \in \mathbb{N} : k \leqslant N\}$ en $\mathbb{K}$.

Pues bien, para $1 \leqslant p < \infty$ definimos

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{N}|x(k)|^p\right)^{1/p} \qquad \forall x \in \mathbb{K}^N \tag{2}$$

mientras que en el caso $p = \infty$ escribimos

$$\|x\|_\infty = \max\big\{\,|x(k)| \,:\, k \in \mathbb{N},\ k \leqslant N\big\} \qquad \forall x \in \mathbb{K}^N \tag{3}$$

La notación se justifica por el hecho de que $\lim\limits_{p\to+\infty}\|x\|_p = \|x\|_\infty$ para todo $x \in \mathbb{K}^N$, como se puede fácilmente comprobar.

Para ver que, en todos los casos, $\|\cdot\|_p$ es una norma en $\mathbb{K}^N$, dos de las condiciones a comprobar son evidentes y sólo la desigualdad triangular merece comentario. Para $p = \infty$ dicha desigualdad también es inmediata, mientras que, para $1 \leqslant p < \infty$, se deduce de la desigualdad de Minkowski, pues para cualesquiera $x,y \in \mathbb{K}^N$ se tiene

$$\begin{aligned}\big\|x+y\big\|_p &= \left(\sum_{k=1}^{N}\big|x(k)+y(k)\big|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{N}\big(|x(k)|+|y(k)|\big)^p\right)^{1/p}\\ &\leqslant \left(\sum_{k=1}^{N}\big|x(k)\big|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{N}\big|y(k)\big|^p\right)^{1/p} = \big\|x\big\|_p + \big\|y\big\|_p\end{aligned}$$

Comprobemos ahora que todas las normas recién definidas en $\mathbb{K}^N$ son equivalentes. Para ello usamos la base usual $\{e_1,e_2,\ldots,e_N\}$ de $\mathbb{K}^N$, que viene dada por $e_k(k) = 1$ y $e_k(j) = 0$ para cualesquiera $k,j \in \mathbb{N}$ con $k,j \leqslant N$ y $k \neq j$. Para $1 \leqslant p \leqslant \infty$ y $x \in \mathbb{K}^N$, la desigualdad triangular nos dice que

$$\big\|x\big\|_p = \left\|\sum_{k=1}^{N}x(k)\,e_k\right\|_p \leqslant \sum_{k=1}^{N}\big|x(k)\big|\,\big\|e_k\big\|_p = \sum_{k=1}^{N}\big|x(k)\big| = \big\|x\big\|_1$$

Por otra parte, es evidente que $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_p$ y $\|x\|_1 \leqslant N\|x\|_\infty$. Enlazando ahora las tres desigualdades anteriores, obtenemos

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_p \leqslant \|x\|_1 \leqslant N\,\|x\|_\infty \qquad \forall x \in \mathbb{K}^N$$

Esto prueba claramente que todas las normas $\|\cdot\|_p$, con $1 \leqslant p \leqslant \infty$ son equivalentes a $\|\cdot\|_\infty$, luego son equivalentes entre sí.

Es claro que las bolas abiertas para la norma $\|\cdot\|_\infty$ son productos cartesianos de bolas abiertas (intervalos o discos) en $\mathbb{K}$. Por tanto, la topología de la norma $\|\cdot\|_\infty$ es la topología producto en $\mathbb{K}^N$, a la que llamamos **topología usual** de $\mathbb{K}^N$. Por supuesto, la topología de la norma $\|\cdot\|_p$ también es la usual de $\mathbb{K}^N$, para $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Para cualesquiera $x, y \in \mathbb{K}^N$ y $k \in \mathbb{N}$ con $k \leqslant N$, se tiene claramente

$$\big|\,y(k) - x(k)\,\big| \leqslant \big\|y - x\big\|_\infty \leqslant \sum_{j=1}^{N} \big|\,y(j) - x(j)\,\big| \tag{4}$$

Si $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy para la norma $\|\cdot\|_\infty$, usando la primera desigualdad de (4) vemos claramente que $\{x_n(k)\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{K}$, luego es convergente. Existe por tanto $x \in \mathbb{K}^N$ tal que $\{x_n(k)\} \to x(k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ con $k \leqslant N$, y la segunda desigualdad de (4) nos permite claramente deducir que $\big\{\|x_n - x\|_\infty\big\} \to 0$. Esto prueba que la norma $\|\cdot\|_\infty$ es completa, luego $\|\cdot\|_p$ también lo es, para todos los valores de p.

En resumen, para cualesquiera $N \in \mathbb{N}$ y $1 \leqslant p \leqslant \infty$, hemos comprobado que $\mathbb{K}^N$, con la norma $\|\cdot\|_p$ definida en (2) y (3), es un espacio de Banach, que se suele denotar por l_p^N y cuya topología es la usual de $\mathbb{K}^N$. Por supuesto, dicho espacio tiene una versión real y otra compleja, según tomemos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

2.3. Los espacios clásicos de sucesiones

Consideremos el espacio vectorial producto $\mathbb{K}^\mathbb{N}$, cuyos elementos son todas las sucesiones de escalares, es decir, todas las funciones de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{K}$, con operaciones definidas puntualmente o, si se quiere, término a término. Concretamente, para $x, y \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ se tiene

$$\big(x+y\big)(n) = x(n) + y(n) \qquad \text{y} \qquad \big(\lambda x\big)(n) = \lambda\, x(n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Vamos a considerar una amplia gama de subespacios de $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ que, dotados de la norma apropiada en cada caso, se convertirán en importantes ejemplos de espacios de Banach.

2.3.1. Los espacios l_p con $1 \leqslant p < \infty$

Para $1 \leqslant p < \infty$, denotaremos por l_p al conjunto de todas las sucesiones $x \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$ tales que la serie $\sum_{n \geqslant 1} \big|\,x(n)\,\big|^p$ es convergente, abreviadamente:

$$l_p = \left\{ x \in \mathbb{K}^\mathbb{N} \,:\, \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < \infty \right\} \tag{5}$$

Vemos en particular que l_1 está formado por los términos generales de todas las series de escalares absolutamente convergentes. En general, nuestro objetivo es convertir a l_p en un espacio de Banach cuya norma vendrá dada por

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p \right)^{1/p} \qquad \forall x \in l_p \tag{6}$$

La desigualdad de Minkowski será la clave para comprobar que l_p es un espacio vectorial y que $\|\cdot\|_p$ es una norma en l_p. Para $x, y \in l_p$ y $n \in \mathbb{N}$, dicha desigualdad nos dice que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x(k)+y(k)|^p \right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |x(k)|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y(k)|^p \right)^{1/p} \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p$$

de modo que tenemos

$$\sum_{k=1}^{n} |x(k)+y(k)|^p \leqslant \big(\|x\|_p + \|y\|_p \big)^p \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, la serie $\sum\limits_{n \geqslant 1} |x(n)+y(n)|^p$ es convergente, es decir, $x+y \in l_p$, pero además, de la última desigualdad deducimos claramente que

$$\big(\|x+y\|_p \big)^p = \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)+y(k)|^p = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} |x(k)+y(k)|^p \leqslant \big(\|x\|_p + \|y\|_p \big)^p$$

De esta forma hemos probado por ahora que

$$x, y \in l_p \implies x+y \in l_p, \quad \|x+y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p$$

Por otra parte es del todo evidente que, para cualesquiera $x \in l_p$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ se tiene $\lambda x \in l_p$ con $\|\lambda x\|_p = |\lambda| \, \|x\|_p$. Finalmente, de $\|x\|_p = 0$ se deduce obviamente que $x = 0$. De hecho conviene resaltar algo que usaremos muy a menudo:

$$|x(k)| \leqslant \|x\|_p \qquad \forall x \in l_p, \ \forall k \in \mathbb{N} \tag{7}$$

En resumen, hemos probado que el conjunto de sucesiones l_p definido en (5) es un espacio vectorial, subespacio de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, y que la función $\|\cdot\|_p$ definida en (6) es una norma en l_p. Sólo queda probar la complitud para obtener el siguiente resultado:

- *Para $1 \leqslant p < \infty$, se tiene que l_p es un espacio de Banach.*

Para probar que $\|\cdot\|_p$ es completa, sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en l_p. Fijado $k \in \mathbb{N}$, de la desigualdad (7) deducimos claramente que $\{x_n(k)\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{K}$, luego es convergente. Definiendo $x(k) = \lim\limits_{n \to \infty} x_n(k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, obtenemos $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ y la demostración se concluirá probando que $x \in l_p$ y $\big\{ \|x_n - x\|_p \big\} \to 0$.

Fijado $\varepsilon > 0$, por ser $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n,m \geqslant n_0$ se tiene $\|x_n - x_m\|_p < \varepsilon$. Fijado $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant n_0$, observamos que

$$m,N \in \mathbb{N}, \ \ m \geqslant n_0 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{N} \left| x_n(k) - x_m(k) \right|^p \leqslant \left(\|x_n - x_m\|_p \right)^p < \varepsilon^p$$

Fijado también $N \in \mathbb{N}$, vemos entonces que

$$\sum_{k=1}^{N} \left| x_n(k) - x(k) \right|^p = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \left| x_n(k) - x_m(k) \right|^p \leqslant \varepsilon^p$$

Como esto es válido para todo $N \in \mathbb{N}$, deducimos que la serie $\sum\limits_{k\geqslant 1} \left| x_n(k) - x(k) \right|^p$ converge, es decir, $x_n - x \in l_p$, de donde $x = x_n - (x_n - x) \in l_p$. Pero además, la desigualdad anterior nos permite obtener que

$$\left\| x_n - x \right\|_p = \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{N} \left| x_n(k) - x(k) \right|^p \right)^{1/p} \leqslant \varepsilon$$

Esto es cierto para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant n_0$, luego $\left\{ \|x_n - x\|_p \right\} \to 0$ como queríamos. ■

2.3.2. Los vectores unidad

Fijado el exponente p, con $1 \leqslant p < \infty$, vamos a profundizar un poco más en la estructura del espacio de Banach l_p. Para ello juegan un papel clave los vectores que ahora vamos a presentar. Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotaremos por e_n a la sucesión cuyo n-ésimo término es 1, mientras que todos los demás se anulan, esto es,

$$e_n(n) = 1 \qquad \text{y} \qquad e_n(k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{n\}$$

Se dice que e_n es el n-ésimo **vector unidad**, y es obvio que $e_n \in l_p$, luego l_p contiene a todos los vectores unidad, que claramente son linealmente independientes, luego l_p tiene dimensión infinita. Observemos ahora el subespacio de l_p engendrado por los vectores unidad.

Fijado $N \in \mathbb{N}$, en l_p tenemos el subespacio $\operatorname{Lin}\{e_1, e_2, \ldots, e_N\}$ engendrado por los N primeros vectores unidad, que tiene dimensión N y se convierte en espacio normado con la norma inducida por l_p. Dicho espacio normado se identifica totalmente con l_p^N, pues existe una obvia biyección lineal entre ambos que preserva la norma. Así pues, podemos ver el espacio de Banach l_p^N como subespacio cerrado de l_p.

Como es la primera vez que aparece, conviene resaltar el criterio que permite identificar dos espacios normados X e Y. Un **isomorfismo isométrico** de X sobre Y es una biyección lineal $\Phi : X \to Y$ que preserva la norma, es decir, verifica que $\|\Phi(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in X$. Como es natural, dos espacios normados se consideran idénticos, cuando son isométricamente isomorfos, es decir, existe un isomorfismo isométrico de uno sobre el otro. Acabamos de ver que, para todo $N \in \mathbb{N}$, el espacio de Banach l_p^N es isométricamente isomorfo a un subespacio cerrado de l_p.

Pero nos interesa ahora el subespacio de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ engendrado por todos los vectores unidad, que tiene dimensión infinita, pero numerable, y se denota por $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$, es decir

$$\mathbb{K}^{(\mathbb{N})} = \text{Lin}\{\, e_n : n \in \mathbb{N}\,\}$$

Si definimos el **soporte** de una sucesión $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ como el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x(n) \neq 0\}$, es claro que $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ está formado por las sucesiones de soporte finito. Equivalentemente, para una sucesión $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, se tiene $x \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ si, y sólo si, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x(n) = 0$ para $n > m$.

Sabemos que $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})} \subset l_p$ y vamos a comprobar que, de hecho, $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ es denso en l_p. La forma de aproximar cada sucesión $x \in l_p$ mediante sucesiones de soporte finito es fácil de adivinar: basta usar la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} x(n)\, e_n$. Si para cada $n \in \mathbb{N}$ llamamos $s_n = \sum\limits_{j=1}^{n} x(j)\, e_j$ a la n-ésima suma parcial de dicha serie, es claro que s_n tiene soporte finito, pues $s_n(k) = 0$ para $k > n$. Pero también es claro que $s_n(k) = x(k)$ para $k \leqslant n$, con lo que se tiene

$$\big(\, \| x - s_n \|_p \big)^p = \sum_{k=n+1}^{\infty} |\, x(k)\,|^p \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

El resto de una serie convergente es una sucesión convergente a cero, luego $\big\{\, \| x - s_n \|_p \big\} \to 0$. Esto prueba que $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ es denso en l_p, pero de hecho tenemos algo más concreto:

- *Para $1 \leqslant p < \infty$, cada $x \in l_p$ se expresa en la forma*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)\, e_n \tag{8}$$

como suma de una serie que converge en l_p. Además, dicho desarrollo en serie es único en el siguiente sentido: si $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$, donde $\alpha_n \in \mathbb{K}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y la serie converge en l_p, entonces $\alpha_k = x(k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Hemos probado ya la validez del desarrollo (8), luego sólo queda comprobar su unicidad. Sea $\{\alpha_n\}$ la sucesión de escalares del enunciado y fijemos $k \in \mathbb{N}$ para probar que $\alpha_k = x(k)$. Si para cada $n \in \mathbb{N}$ escribimos $y_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j e_j$, tenemos por hipótesis $\big\{\, \| y_n - x \|_p \big\} \to 0$ y la desigualdad (7) nos dice que $\big\{ y_n(k) \big\} \to x(k)$, pero es claro que para $n \geqslant k$ se tiene $y_n(k) = \alpha_k$, luego $\big\{\, y_n(k)\, \big\} \to \alpha_k$ y concluimos que $\alpha_k = x(k)$ como se quería. ■

Siempre para $1 \leqslant p < \infty$, se tiene $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})} \neq l_p$, pues tomando por ejemplo $x(n) = 2^{-n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene $x \in l_p$, pero $x \notin \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$. Así pues, el espacio de Banach l_p contiene un subespacio $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$, que no es cerrado. Por tanto $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$, con la norma inducida por l_p, es un espacio normado no completo.

El resultado anterior nos va a permitir ahora describir la forma en que el espacio l_p depende del parámetro p, o lo que viene a ser lo mismo, aclarar la relación entre los espacios l_p para distintos valores de p. Para ello, supondremos en lo que sigue que $1 \leqslant p < q < \infty$.

Para $x \in l_p$ escribimos $x = \|x\|_p\, u$ donde $u \in l_p$ y $\|u\|_p = 1$. De (7) deducimos que, para $k \in \mathbb{N}$ se tiene $|u(k)| \leqslant 1$, luego

$$\big|u(k)\big|^q = \big|u(k)\big|^{q-p}\,\big|u(k)\big|^p \leqslant \big|u(k)\big|^p \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

El criterio de comparación para series de términos positivos nos dice que $u \in l_q$ y $\|u\|_q \leqslant 1$. Deducimos que también $x \in l_q$ con $\|x\|_q = \|x\|_p \|u\|_q \leqslant \|x\|_p$. Hemos obtenido así una primera relación entre los espacios l_p, que se resume en la siguiente implicación:

$$1 \leqslant p < q < \infty, \quad x \in l_p \quad \Longrightarrow \quad x \in l_q, \quad \|x\|_q \leqslant \|x\|_p \tag{9}$$

Así pues, para $1 \leqslant p < q < \infty$, vemos que l_p está contenido en l_q. Tal inclusión es estricta como muestran las series armónicas. En concreto, definiendo $x(n) = n^{-1/p}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es claro que $x \in l_q$ pero $x \notin l_p$. Puesto que $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ es denso en l_q y está contenido en l_p, vemos que también l_p es un subespacio denso en l_q.

Debe quedar claro que l_p está contenido en l_q como espacio vectorial, pero en l_p usamos la norma $\|\cdot\|_p$, que no coincide con la norma inducida por l_q, que es la restricción a l_p de la norma $\|\cdot\|_q$. Estas dos normas en l_p no son equivalentes, pues $\|\cdot\|_p$ es completa, pero la norma inducida por l_q no lo es, ya que l_p no es cerrado en l_q como acabamos de ver. Tenemos así el primer ejemplo de dos normas en un mismo espacio vectorial, que no son equivalentes. De hecho, la desigualdad de (9) nos dice que en l_p, la topología de la norma $\|\cdot\|_p$ contiene estrictamente a la inducida por l_q.

2.3.3. Espacios de sucesiones acotadas

En la discusión anterior sobre espacios de sucesiones, ha quedado excluido el caso $p = \infty$, que ahora vamos a estudiar. Para $N \in \mathbb{N}$, recordemos que l_∞^N es el espacio de Banach que se obtiene dotando a $\mathbb{K}^N$ de la norma del máximo $\|\cdot\|_\infty$. Es natural considerar un espacio de sucesiones en el que podemos definir una norma análoga. Basta trabajar con sucesiones acotadas y, aunque una tal sucesión puede no tener un término cuyo valor absoluto o módulo sea máximo, siempre podemos usar un supremo. Denotamos por l_∞ el conjunto de todas las sucesiones acotadas de escalares, simbólicamente,

$$l_\infty = \big\{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \,:\, \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\} < \infty\big\}$$

Es evidente que l_∞ es un espacio vectorial, de nuevo subespacio de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, y probaremos sin dificultad el siguiente resultado:

- *l_∞ es un espacio de Banach con la norma dada por*

$$\big\|x\big\|_\infty = \sup\big\{\,|x(n)| : n \in \mathbb{N}\big\} \qquad \forall x \in l_\infty$$

Está claro que $\|\cdot\|_\infty$ es una norma en l_∞, cuya complitud vamos a comprobar. Si $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy en l_∞, para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n,m \in \mathbb{N}, \; n,m \geqslant n_0 \implies \|x_n - x_m\|_\infty < \varepsilon \implies \big|x_n(k) - x_m(k)\big| < \varepsilon \;\; \forall k \in \mathbb{N} \tag{10}$$

Para todo $k \in \mathbb{N}$, vemos claramente que $\{x_n(k)\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{K}$, luego converge, lo que nos permite definir $x(k) = \lim_{n\to\infty} x_n(k)$. Obtenemos así una sucesión $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, y la demostración se concluirá comprobando que $x \in l_\infty$ y $\{\|x_n - x\|_\infty\} \to 0$. Dado $\varepsilon > 0$ tenemos $n_0 \in \mathbb{N}$ verificando (10) y fijamos $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant n_0$. Para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\left| x_n(k) - x(k) \right| = \lim_{m\to\infty} \left| x_n(k) - x_m(k) \right| \leqslant \varepsilon$$

luego la sucesión $x_n - x$ está acotada, de donde $x = x_n - (x_n - x) \in l_\infty$. Pero de hecho tenemos que $\|x_n - x\|_\infty \leqslant \varepsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$ que verifique $n \geqslant n_0$. Esto prueba que $\{\|x_n - x\|_\infty\} \to 0$ como se quería. ■

En el espacio l_∞ seguimos teniendo los vectores unidad $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$. Por razones que se irán comprendiendo más adelante, cuando el espacio $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ de las sucesiones de soporte finito se considera como subespacio de l_∞, se le denota por c_{00}. A diferencia de lo que ocurría para $p < \infty$, vamos a comprobar que c_{00} no es denso en l_∞. De hecho vamos a describir explícitamente el cierre de c_{00} en l_∞.

Si $x \in \overline{c_{00}}$ y fijamos $\varepsilon > 0$, ha de existir $y \in c_{00}$ tal que $\|x - y\|_\infty < \varepsilon$. Como y tiene soporte finito, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $y(n) = 0$ para $n \geqslant m$. Entonces, también para $n \geqslant m$ tenemos claramente $|x(n)| = |x(n) - y(n)| \leqslant \|x - y\|_\infty < \varepsilon$. Esto prueba que $\lim_{n\to\infty} x(n) = 0$, lo cual es válido para todo $x \in \overline{c_{00}}$. Deducimos que c_{00} no es denso en l_∞, pues abundan las sucesiones acotadas que no convergen a cero.

Denotamos por c_0 al subespacio de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ formado por las sucesiones convergentes a cero:

$$c_0 = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \lim_{n\to\infty} x(n) = 0 \right\}$$

Como toda sucesión convergente está acotada, c_0 es un subespacio de l_∞, que consideramos como espacio normado, con la restricción de la norma $\|\cdot\|_\infty$. Acabamos de ver que $\overline{c_{00}} \subset c_0$ y enseguida vamos a comprobar que esta inclusión es una igualdad. De hecho veremos que los vectores unidad se comportan en c_0 de forma análoga a como lo hacían en l_p para $1 \leqslant p < \infty$. Toda la información se recoge en el siguiente enunciado:

- *El espacio c_0, de las sucesiones de escalares convergentes a cero, es un subespacio cerrado de l_∞, y por tanto un espacio de Banach, cuya norma viene dada por*

$$\|x\|_\infty = \max \left\{ |x(n)| : n \in \mathbb{N} \right\} \qquad \forall x \in c_0 \tag{11}$$

Además, cada $x \in c_0$ se expresa en la forma

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)\, e_n \tag{12}$$

como suma de una serie que converge en c_0, y en particular c_{00} es denso en c_0. Por último, el desarrollo en serie anterior es único, es decir: si $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$, donde $\alpha_n \in \mathbb{K}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y la serie converge en c_0, entonces $\alpha_k = x(k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Conviene empezar probando el desarrollo (12). Fijado $x \in c_0$, escribimos $s_n = \sum_{k=1}^{n} x(k)\, e_k$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y se trata de probar que $\{\|x - s_n\|_\infty\} \to 0$. Para $n, k \in \mathbb{N}$ se tiene $s_n(k) = x(k)$ cuando $k \leqslant n$, mientras que $s_n(k) = 0$ si $k > n$, luego

$$\|x - s_n\|_\infty = \sup \big\{ |x(k)| : k \in \mathbb{N},\ k > n \big\} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dado $\varepsilon > 0$, existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $|x(k)| < \varepsilon$ para $k \geqslant m$. La igualdad anterior nos dice entonces que para $n \geqslant m$ se tiene $\|x - s_n\|_\infty \leqslant \varepsilon$, luego $\{\|x - s_n\|_\infty\} \to 0$, como se quería.

Como $s_n \in c_{00}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos $x \in \overline{c_{00}}$, lo cual es válido para todo $x \in c_0$, luego vemos que $c_0 \subset \overline{c_{00}}$, pero ya teníamos la otra inclusión, así que $c_0 = \overline{c_{00}}$. Por tanto, c_0 es un subespacio cerrado de l_∞, luego c_0 es un espacio de Banach con la norma inducida por l_∞.

Para tener (11), dado $x \in c_0$, debemos ver que el supremo que define a $\|x\|_\infty$ es un máximo, cosa obvia si $x = 0$. En otro caso, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $|x(n)| < \|x\|_\infty / 2$ para $n > m$. Está claro entonces que $\|x\|_\infty = |x(k)|$ para algún $k \in \mathbb{N}$ con $k \leqslant m$, como queríamos.

Sólo queda la unicidad del desarrollo (12). Para $x \in c_0$, supongamos que $\big\{ \|x - y_n\|_\infty \big\} \to 0$, donde $y_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$ para todo $n \in \mathbb{N}$, con $\alpha_k \in \mathbb{K}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Fijado $k \in \mathbb{N}$, tenemos claramente $|x(k) - y_n(k)| \leqslant \|x - y_n\|_\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $\{y_n(k)\} \to x(k)$, pero es claro que $y_n(k) = \alpha_k$ para $n \geqslant k$, luego $\{y_n(k)\} \to \alpha_k$, de donde $\alpha_k = x(k)$ como queríamos. ■

Veamos finalmente la relación entre los espacios l_p con $1 \leqslant p < \infty$ y los recién estudiados para $p = \infty$. Para $x \in l_p$, la serie $\sum_{n \geqslant 1} |x(n)|^p$ es convergente, luego $\lim_{n \to \infty} |x(n)|^p = 0$, o lo que es lo mismo, $x \in c_0$. Además, sabemos que $|x(n)| \leqslant \|x\|_p$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_p$. Así pues, la relación buscada es la siguiente

$$1 \leqslant p < \infty, \quad x \in l_p \qquad \Longrightarrow \qquad x \in c_0, \quad \|x\|_\infty \leqslant \|x\|_p$$

La inclusión de l_p en c_0 es estricta, pues tomando $x(n) = 1 / \log(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene $x \in c_0$ pero $x \notin l_p$. La situación de l_p en c_0 es análoga a la que tenía en l_q para $p < q < \infty$. Concretamente, l_p es un subespacio denso en c_0, pues contiene a c_{00}, pero no es cerrado. Con la norma inducida por c_0, vemos que l_p es un espacio normado no completo, cuya norma no es equivalente a $\|\cdot\|_p$. De hecho, la topología de l_p contiene estrictamente a la inducida por c_0.

2.4. Bases de Schauder y espacios de Banach separables

Considerando el espacio de Banach $X = l_p$ con $1 \leqslant p < \infty$, o bien $X = c_0$, observemos la situación en X de los vectores unidad. Aunque son linealmente independientes, no forman una base algebraica de X, pues el subespacio que engendran es $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})} \neq X$. Sin embargo, la sucesión $\{e_n\}$ se comporta en cierto modo como una base, pues cada vector $x \in X$ se expresa de manera única como una especie de “combinación lineal infinita” de los términos de nuestra sucesión: $x = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)\, e_n$, expresión que tiene sentido porque la serie converge en la topología del espacio de Banach X. Ello motiva la siguiente definición.

Una sucesión $\{u_n\}$ en un espacio de Banach X, es una **base de Schauder** de X, cuando para cada $x \in X$ existe una única sucesión $\{\alpha_n\}$ de escalares tal que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n \tag{13}$$

serie que converge en la topología de X. Se dice que (13) es el desarrollo en serie de x con respecto a la base de Schauder $\{u_n\}$.

Por supuesto, la sucesión $\{e_n\}$ de los vectores unidad es una base de Schauder, tanto de l_p para $1 \leqslant p < \infty$, como de c_0, llamada **base de vectores unidad** de l_p o c_0.

El concepto de base de Schauder es uno de los más útiles e importantes en el estudio de los espacios de Banach, pero por ahora sólo haremos alguna observación sencilla sobre dicho concepto. En lo que sigue fijamos una base de Schauder $\{u_n\}$ de un espacio de Banach X, escribimos $U = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$, y consideramos el subespacio engendrado $Y = \operatorname{Lin} U \subset X$.

Cada vector $y \in Y$ es combinación lineal de vectores de U, luego puede escribirse en la forma $y = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n$ donde $\alpha_n \in \mathbb{K}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : \alpha_n \neq 0\}$ es finito, lo que obviamente hace que la serie converja. Hemos obtenido así el desarrollo en serie de y con respecto a $\{u_n\}$, que por hipótesis es único, lo que tiene dos consecuencias. Por una parte, el desarrollo en serie de cada vector $y \in Y$ con respecto a $\{u_n\}$ se reduce a una suma finita. Por otra, la expresión de cada vector $y \in Y$ como combinación lineal de vectores de U también es única. Esto significa que los vectores de U forman una base del espacio vectorial Y, es decir, son linealmente independientes y, en particular, $u_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, Y tiene dimensión infinita y numerable, es decir, como espacio vectorial se puede identificar con $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$.

La definición de base de Schauder implica claramente que Y es denso en X y vamos a comprobar que $Y \neq X$. Para ello consideramos la serie $\sum_{n \geqslant 1} x_n$ donde $x_n = 2^{-n} u_n / \|u_n\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Es una serie absolutamente convergente, ya que $\|x_n\| = 2^{-n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego por ser X un espacio de Banach, del criterio de complitud deducimos que dicha serie es convergente. Escribiendo

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \|u_n\|} u_n$$

tenemos claramente el desarrollo en serie de x con respecto a $\{u_n\}$ en el que ninguno de los escalares que aparecen se anula. Esto implica que $x \notin Y$, pues en otro caso dicho desarrollo se reduciría a una suma finita como hemos visto antes. Así pues, una base de Schauder de un espacio de Banach X nunca es una base algebraica de X. Más adelante probaremos un resultado más general: un espacio de Banach no puede tener dimensión infinita y numerable.

Por contener un subespacio denso de dimensión numerable, todo espacio de Banach con base de Schauder tendrá una propiedad topológica, que ahora vamos a comentar. Recordemos que un espacio topológico es **separable** cuando contiene un subconjunto denso, numerable. Para espacios métricos, esta propiedad tiene una útil caracterización:

- *Un espacio métrico X es separable si, y sólo si, su topología tiene una base numerable. En tal caso, todo conjunto no vacío $Y \subset X$ es separable con la topología inducida.*

Naturalmente, nos interesa sobre todo el caso particular de un espacio normado, en el que la separabilidad se caracteriza como sigue.

- *Un espacio normado es separable si, y sólo si, tiene un subespacio denso, de dimensión numerable.*

Una implicación es casi evidente: si X es un espacio normado separable y E es un conjunto numerable, denso en X, basta tomar $Y = \operatorname{Lin} E$ para tener un subespacio Y, que obviamente tiene dimensión numerable y es denso en X. Lo interesante es el recíproco, cuya demostración es un poco más laboriosa.

Supongamos que X es un espacio normado, sea Y un subespacio denso en X, de dimensión numerable, que puede ser finita, y sea U un conjunto numerable tal que $Y = \operatorname{Lin} U$. Para probar que X es separable, usaremos también un conjunto numerable Δ, denso en $\mathbb{K}$. Por ejemplo, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ puede ser $\Delta = \mathbb{Q}$, mientras que para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, podemos tomar $\Delta = \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$. Fijado $n \in \mathbb{N}$, consideramos el conjunto E_n de todas las combinaciones lineales de n vectores cualesquiera de U, con coeficientes en Δ, es decir:

$$E_n = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \delta_k u_k \ : \ n \in \mathbb{N}, \ \ \delta_1, \ldots, \delta_n \in \Delta, \ \ u_1, \ldots, u_n \in U \right\}$$

Vemos que E_n es numerable, pues existe claramente una aplicación sobreyectiva del conjunto numerable $\Delta^n \times U^n$ sobre E_n. Además, usando que Δ es denso en $\mathbb{K}$, comprobamos fácilmente que $\overline{E_n}$ contiene a todas las combinaciones lineales de n elementos cualesquiera de U.

Lo anterior es válido para todo $n \in \mathbb{N}$, luego el conjunto $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ es numerable, por ser una unión numerable de conjuntos numerables. Pero además, como $\overline{E_n} \subset \overline{E}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, deducimos que $\overline{E}$ contiene a todas las combinaciones lineales de elementos de U, es decir, se tiene $Y = \operatorname{Lin} U \subset \overline{E}$. Finalmente, como Y es denso en X, vemos que $X = \overline{E}$, luego E es un conjunto numerable denso en X. Por tanto, X es separable, como queríamos demostrar. ■

Así pues, todo espacio de Banach con base de Schauder es separable y, en particular, los espacios de Banach l_p con $1 \leqslant p < \infty$ y c_0 son separables. Durante algún tiempo, en todos los espacios de Banach separables conocidos, se disponía de una base de Schauder, lo que llevó al propio Stefan Banach a preguntar si en todo espacio de Banach separable se puede encontrar una base de Schauder. El problema, abierto durante más de cuarenta años, fue resuelto en 1973 por el matemático sueco Per Enflo, construyendo una amplia gama de espacios de Banach separables sin base de Schauder. Volviendo a cuestiones más sencillas, vemos a continuación un ejemplo de espacio de Banach que no es separable.

- *El espacio de Banach l_∞, de las sucesiones acotadas de escalares, no es separable.*

Usaremos un hecho bien conocido: el conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$, no es numerable. Para cada $J \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, denotemos por $\chi_J \in l_\infty$ a la función característica de J, es decir, la sucesión definida por

$$\chi_J(n) = 1 \ \ \forall n \in J \qquad \text{y} \qquad \chi_J(n) = 0 \ \ \forall x \in \mathbb{N} \setminus J$$

Sea ahora B_J la bola abierta en l_∞ de centro χ_J y radio $1/2$. Para $J,K \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ con $J \neq K$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|\chi_J(n) - \chi_K(n)| = 1$, luego $\|\chi_J - \chi_K\|_\infty \geqslant 1$, de donde $B_J \cap B_K = \emptyset$. Así pues, $\{B_J : J \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\}$ es una familia no numerable de subconjuntos abiertos de l_∞, que son dos a dos disjuntos. Esto impide que l_∞ pueda ser separable, como vamos a ver.

Si E es un conjunto denso en l_∞, para cada $J \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ se tiene $E \cap B_J \neq \emptyset$, lo que nos permite elegir $y_J \in E \cap B_J$. Claramente la aplicación $J \mapsto y_J$ de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ en E, es inyectiva, luego E no es numerable. Hemos probado que ningún subconjunto denso de l_∞ puede ser numerable, es decir, que l_∞ no es separable. ■

2.5. Espacios de funciones continuas

Es fácil generalizar la definición del espacio l_∞ considerando, en vez de sucesiones acotadas, funciones acotadas en un conjunto arbitrario. Más concretamente, si Γ es un conjunto no vacío, consideramos el espacio vectorial producto $\mathbb{K}^\Gamma$, formado por todas las funciones de Γ en $\mathbb{K}$, con operaciones definidas puntualmente, es decir, para $x,y \in \mathbb{K}^\Gamma$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ se tiene:

$$\big(x+y\big)(\gamma) = x(\gamma) + y(\gamma) \qquad \text{y} \qquad \big(\lambda x\big)(\gamma) = \lambda x(\gamma) \qquad \forall \gamma \in \Gamma$$

Denotaremos por $l_\infty(\Gamma)$ al conjunto de todas las funciones acotadas de Γ en $\mathbb{K}$, que es evidentemente un subespacio de $\mathbb{K}^\Gamma$:

$$l_\infty(\Gamma) = \big\{x \in \mathbb{K}^\Gamma \; : \; \sup\{|x(\gamma)| : \gamma \in \Gamma\} < \infty\big\}$$

Es claro que, definiendo

$$\big\|x\big\|_\infty = \sup\big\{\,|x(\gamma)\,| : \gamma \in \Gamma\big\} \qquad \forall x \in l_\infty(\Gamma)$$

se obtiene una norma en $l_\infty(\Gamma)$. Exactamente igual que hicimos en el caso $\Gamma = \mathbb{N}$, se comprueba que dicha norma es completa, obteniendo el siguiente resultado.

- *Si Γ es un conjunto no vacío arbitrario, el espacio $l_\infty(\Gamma)$, de todas las funciones acotadas de Γ en $\mathbb{K}$, es un espacio de Banach, cuya norma viene dada por*

$$\big\|x\big\|_\infty = \sup\big\{\,|x(\gamma)\,| : \gamma \in \Gamma\big\} \qquad \forall x \in l_\infty(\Gamma)$$

Como casos particulares que ya conocíamos, tenemos $l_\infty(\mathbb{N}) = l_\infty$ y, si para $N \in \mathbb{N}$ fijo, tomamos $\Gamma = \{k \in \mathbb{N} : k \leqslant N\}$, es claro que $l_\infty(\Gamma) = l_\infty^N$.

Volviendo al caso general, conviene observar la convergencia en $l_\infty(\Gamma)$. Si $x_n \in l_\infty(\Gamma)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y $x \in l_\infty(\Gamma)$, fijados $n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$, la desigualdad $\|x_n - x\|_\infty \leqslant \varepsilon$ equivale a que se tenga $|x_n(\gamma) - x(\gamma)| \leqslant \varepsilon$ para todo $\gamma \in \Gamma$. Por tanto, la convergencia de $\{x_n\}$ a x se expresa de la siguiente forma

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, m \in \mathbb{N} \; : \; n \geqslant m \quad \Longrightarrow \quad |x_n(\gamma) - x(\gamma)| \leqslant \varepsilon \quad \forall \gamma \in \Gamma$$

y esto significa que la sucesión de funciones $\{x_n\}$ converge uniformemente a x en Γ. Así pues, la convergencia en el espacio de Banach $l_\infty(\Gamma)$ equivale a la convergencia uniforme en Γ.

Nos interesa sobre todo un subespacio de $l_\infty(\Gamma)$ que aparece de forma natural cuando Γ está provisto de una topología adecuada. Cambiamos la notación, para usar la más habitual.

Si K es un espacio topológico compacto y de Hausdorff, es bien sabido que toda función continua $f : K \to \mathbb{K}$ está acotada, y la función $|f|$ tiene máximo en K. Por tanto, podemos considerar el subespacio de $l_\infty(K)$ formado por todas las funciones continuas en K con valores escalares, al que denotamos por $C(K)$. Como la convergencia en $l_\infty(K)$ es la uniforme, que preserva la continuidad, $C(K)$ es subespacio cerrado de $l_\infty(K)$, luego espacio de Banach con la norma inducida. Resaltamos la nueva gama de espacios de Banach que acaba de aparecer.

- *Si K es un espacio topológico compacto y de Hausdorff, entonces el espacio $C(K)$, de todas las funciones continuas en K y con valores escalares, es un espacio de Banach con la norma dada por:*

$$\|f\|_\infty = \text{máx}\left\{|f(t)| : t \in K\right\} \qquad \forall f \in C(K)$$

Cabe destacar por ejemplo el caso en que $K = [0,1]$ con su topología usual, la inducida por $\mathbb{R}$. Por un conocido teorema de Weierstrass, para cada $f \in C[0,1]$ existe una sucesión de funciones polinómicas que converge a f uniformemente en $[0,1]$. Por tanto, $C[0,1]$ tiene un subespacio denso de dimensión numerable, es decir, es un espacio de Banach separable.

2.6. Los espacios de Lebesgue

Para presentar una nueva gama de espacios de Banach, usaremos la medida y la integral de Lebesgue en el intervalo $[0,1]$, que suponemos conocidas. Las propiedades fundamentales de la integral de Lebesgue, recogidas en los teoremas de convergencia, son las que permiten obtener la complitud de los espacios que vamos a presentar. De hecho, se podría trabajar con la medida de Lebesgue en cualquier subconjunto medible de $\mathbb{R}^N$, con $N \in \mathbb{N}$ arbitrario, o incluso con cualquier otra medida, obteniendo resultados similares en algunos aspectos, aunque no en todos. Sin embargo, preferimos discutir un ejemplo concreto.

Trabajaremos con funciones medibles de $[0,1]$ en $\mathbb{K}$, identificando funciones que coincidan casi por doquier (abreviado c.p.d.), esto es, que coincidan salvo en un conjunto de medida nula. Denotamos por L al espacio vectorial formado por tales *funciones*. En rigor, los elementos de este espacio son clases de equivalencia, pero casi siempre las manejaremos como si fuesen funciones, con las debidas precauciones.

2.6.1. Los espacios L_p para $1 \leqslant p < \infty$

Si $\varphi \in L$ y $\varphi(t) \in \mathbb{R}_0^+$ para casi todo (abreviado p.c.t.) $t \in [0,1]$, siempre tiene sentido la integral de φ sobre $[0,1]$, o sobre subconjuntos medibles de dicho intervalo, que puede ser ∞. Fijado p con $1 \leqslant p < \infty$, para $f \in L$ se tiene $|f|^p \in L$, luego podemos definir,

$$L_p = \left\{ f \in L : \int_0^1 |f(t)|^p \, dt < \infty \right\} \tag{14}$$

y comprobaremos enseguida que L_p es un subespacio de L.

Para $f,g \in L_p$ podemos escribir $[0,1] = A \cup B$ donde A y B son conjuntos medibles y disjuntos, tales que $|g| \leqslant |f|$ c.p.d. en A, mientras que $|f| < |g|$ c.p.d. en B, con lo que también tenemos $|f+g|^p \leqslant 2^p\,|f|^p$ c.p.d. en A y $|f+g|^p \leqslant 2^p\,|g|^p$ c.p.d. en B. Usando propiedades elementales de la integral, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f(t)+g(t)|^p\,dt &= \int_A |f(t)+g(t)|^p\,dt + \int_B |f(t)+g(t)|^p\,dt\\ &\leqslant 2^p \int_A |f(t)|^p\,dt + 2^p \int_B |g(t)|^p\,dt < \infty\end{aligned}$$

y esto prueba que $f+g \in L_p$. Por otra parte, es evidente que $\lambda f \in L_p$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$. Por tanto, L_p es un espacio vectorial, subespacio de L.

Con el fin de convertir a L_p en un espacio normado, definimos:

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p} \qquad \forall f \in L_p \tag{15}$$

y se trata de probar que $\|\cdot\|_p$ es una norma en L_p. Para cualesquiera $\lambda \in \mathbb{K}$ y $f \in L_p$, se tiene evidentemente $\|\lambda f\|_p = |\lambda|\,\|f\|_p$. Además, si $f \in L_p$ verifica que $\|f\|_p = 0$, se ha de tener $f = 0$ c.p.d., pero esto significa que f es el vector cero en L_p. Por supuesto, esta era la razón para identificar funciones que coinciden c.p.d. y trabajar con clases de equivalencia. Por tanto, sólo queda comprobar que $\|\cdot\|_p$ verifica la desigualdad triangular. Ello requiere nuevas versiones de las desigualdades de Hölder y Minkowski.

Desigualdad integral de Hölder. *Si* $1 < p < \infty$, $f \in L_p$ *y* $g \in L_{p^*}$, *se tiene:*

$$fg \in L_1 \qquad \text{con} \qquad \|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p\,\|g\|_{p^*}$$

Demostración. Si $\|f\|_p = 0$, tenemos $f = 0$ c.p.d., luego $fg = 0$ c.p.d. y no hay nada que demostrar. Por tanto, suponemos que $\|f\|_p = \alpha \in \mathbb{R}^+$, y análogamente, que $\|g\|_{p^*} = \beta \in \mathbb{R}^+$.

La desigualdad de Young nos permite entonces escribir

$$\frac{1}{\alpha\beta}|f(t)g(t)| \leqslant \frac{|f(t)|^p}{p\,\alpha^p} + \frac{|g(t)|^{p^*}}{p^*\,\beta^{p^*}} \qquad \text{p.c.t. } t \in [0,1]$$

de donde deducimos claramente la desigualdad buscada:

$$\frac{1}{\alpha\beta}\int_0^1 |f(t)g(t)|\,dt \leqslant \frac{1}{p\,\alpha^p}\int_0^1 |f(t)|^p\,dt + \frac{1}{p^*\,\beta^{p^*}}\int_0^1 |g(t)|^{p^*}\,dt = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1 \quad \blacksquare$$

El siguiente razonamiento también nos recordará al usado para obtener la desigualdad de Minkowski en su primera versión.

Desigualdad integral de Minkowski. *Para cualesquiera* $f,g \in L_p$, *se tiene:*

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$$

Demostración. Suponemos que $p > 1$ pues en otro caso el resultado es evidente. Usaremos la desigualdad obvia

$$|f+g|^p \leqslant |f|\,|f+g|^{p-1} + |g|\,|f+g|^{p-1}$$

y aplicaremos la desigualdad integral de Hölder a los dos sumandos del segundo miembro. Observamos que $|f+g|^{p-1} \in L_{p^*}$, ya que

$$\int_0^1 \left(|f(t)+g(t)|^{p-1}\right)^{p^*} dt = \int_0^1 |f(t)+g(t)|^p\, dt = \left(\|f+g\|_p\right)^p < \infty$$

con lo que al aplicar la mencionada desigualdad obtenemos:

$$\left(\|f+g\|_p\right)^p = \|\,|f+g|^p\,\|_1 \leqslant \left(\|f\|_p + \|g\|_p\right)\left(\|f+g\|_p\right)^{p/p^*}$$

Si $\|f+g\|_p = 0$ no hay nada que demostrar y, en otro caso, dividimos ambos miembros de la última desigualdad por $\left(\|f+g\|_p\right)^{p/p^*} > 0$. Como $p - (p/p^*) = 1$, obtenemos exactamente el resultado deseado. ■

Comprobado que $\|\cdot\|_p$ es una norma en L_p, la siguiente cuestión clave es su complitud. Se trata de un resultado básico en la teoría de la integración que no vamos a demostrar.

Teorema de Riesz-Fischer. *Para $1 \leqslant p < \infty$, el espacio L_p definido en (14), dotado de la norma $\|\cdot\|_p$ dada por (15), es un espacio de Banach.*

Los espacios recién presentados, para la medida de Lebesgue en $[0,1]$ o para cualquier otra medida, se conocen como **espacios de Lebesgue**. Su complitud tiene útiles consecuencias, que convirtieron la integral de Lebesgue en herramienta indispensable del Análisis Matemático, pero también mostraron la utilidad del estudio abstracto de los espacios de funciones. Es por ello que la integral de Lebesgue y el teorema de Riesz-Fischer se consideran como dos de las claves que dieron lugar al nacimiento del Análisis Funcional.

Para entender mejor la estructura de los espacios de Lebesgue, conviene conocer, igual que con los espacios de sucesiones, un subespacio común, denso en todos ellos. Dada una función continua $f \in C[0,1]$, y $1 \leqslant p < \infty$, es claro que la clase de equivalencia de f pertenece a L_p. Además, el conjunto $\{t \in [0,1] : f(t) \neq 0\}$ es abierto, luego si tiene medida nula, ha de ser vacío. Dicho de otra forma, si $f = 0$ c.p.d., entonces f es idénticamente nula. Por tanto, si a cada función continua asociamos su clase de equivalencia, obtenemos una aplicación lineal e inyectiva de $C[0,1]$ en L_p. Como espacio vectorial, podemos por tanto identificar $C[0,1]$ con el subespacio de L_p formado por las clases de equivalencia que contienen una (y sólo una) función continua, y escribir $C[0,1] \subset L_p$.

Obviamente, la norma inducida por L_p en $C[0,1]$ no coincide con la natural de $C[0,1]$, la norma del máximo, que lo convierte en espacio de Banach. De hecho, ambas normas no son equivalentes, como consecuencia del siguiente resultado básico, que tampoco demostraremos.

- *Para $1 \leqslant p < \infty$ se tiene que $C[0,1]$ es denso en L_p*

2.6.2. Funciones esencialmente acotadas

Veamos ahora el espacio de Lebesgue que corresponde al caso $p = \infty$. Es fácil modificar la noción de función acotada, de forma que tenga sentido para clases de equivalencia de funciones medibles en $[0,1]$. Para $f \in L$, no tiene sentido decir que f está acotada, pues ello depende claramente de la función que elijamos como representante de la clase de equivalencia f. Pero podemos preguntarnos si f está acotada c.p.d., que es la propiedad con la que vamos a trabajar.

Si $\varphi \in L$ y $\varphi(t) \in \mathbb{R}_0^+$ p.c.t. $t \in [0,1]$, no es difícil comprobar que existe una mínima constante $M \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$, verificando que $\varphi(t) \leqslant M$ p.c.t. $t \in [0,1]$. Dicha constante recibe el nombre de **supremo esencial** de φ y se denota por: $\operatorname{ess\,sup} \varphi$. Así pues,

$$\operatorname{ess\,sup} \varphi = \text{mín} \left\{ M \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\} \, : \, \varphi(t) \leqslant M \text{ p.c.t. } t \in [0,1] \right\}$$

Decimos que $f \in L$ es una **función esencialmente acotada**, cuando $\operatorname{ess\,sup} |f| < \infty$, o si se quiere, cuando existe $M \in \mathbb{R}_0^+$ tal que $|f(t)| \leqslant M$ p.c.t. $t \in [0,1]$. Denotamos por L_∞ al conjunto de todas las funciones esencialmente acotadas,

$$L_\infty = \left\{ f \in L : \operatorname{ess\,sup} |f| < \infty \right\}$$

que es claramente un subespacio de L. De nuevo se trata de clases de equivalencia, pero las manejamos como funciones. Para convertir a L_∞ en un espacio normado, definimos

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} |f| \qquad \forall f \in L_\infty$$

y se comprueba sin ninguna dificultad que $\|\cdot\|_\infty$ es una norma en L_∞. La complitud es una vez más nuestro objetivo, para obtener:

- *L_∞ es un espacio de Banach con la norma $\|\cdot\|_\infty$.*

Para razonar con claridad, distinguimos entre funciones y clases de equivalencia. Si $\{F_n\}$ es una sucesión de Cauchy en L_∞, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos claramente elegir una función f_n en la clase de equivalencia F_n, de forma que se verifiquen todas las desigualdades siguientes:

$$|f_n(t)| \leqslant \|F_n\|_\infty \quad \text{y} \quad |f_n(t) - f_m(t)| \leqslant \|F_n - F_m\|_\infty \qquad \forall t \in [0,1], \ \forall n,m \in \mathbb{N}$$

Entonces $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones acotadas en $[0,1]$, pero de hecho vemos que $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy en el espacio de Banach $l_\infty[0,1]$. Por tanto $\{f_n\}$ converge en $l_\infty[0,1]$, es decir, uniformemente en $[0,1]$, a una función acotada f. Como f es medible, da lugar a una clase de equivalencia $F \in L_\infty$. Finalmente, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene evidentemente

$$\|F_n - F\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} |F_n - F| \leqslant \sup \left\{ |f_n(t) - f(t)| \, : \, t \in \Omega \right\}$$

luego de $\{f_n\} \to f$ en $l_\infty[0,1]$, deducimos que $\{F_n\} \to F$ en L_∞. ■

Como subespacio de L_∞, encontramos de nuevo al espacio de funciones continuas $C[0,1]$, pero la situación es muy diferente a la que teníamos para $p < \infty$.

Si $f \in C[0,1]$ y $M \in \mathbb{R}_0^+$, el conjunto $\{t \in [0,1] : |f(t)| > M\}$ es abierto, luego si tiene medida nula, ha de ser vacío. Dicho de otra forma, de $|f(t)| \leqslant M$ p.c.t. $t \in [0,1]$, se deduce que $|f(t)| \leqslant M$ para todo $t \in [0,1]$. Tenemos por tanto que

$$\text{ess sup}\,|f| = \text{máx}\,\{|f(t)| : t \in [0,1]\} \qquad \forall f \in C[0,1]$$

Esto significa que, considerando a $C[0,1]$ como espacio de Banach con la norma del máximo, al asociar a cada función continua la clase de equivalencia a la que pertenece, se obtiene una aplicación lineal e isométrica de $C[0,1]$ en L_∞. Por tanto, el espacio de Banach $C[0,1]$ es isométricamente isomorfo a un subespacio de L_∞, que obligadamente ha de ser cerrado.

2.6.3. Relaciones entre los espacios de Lebesgue

La dependencia del espacio L_p con respecto al parámetro p es exactamente la opuesta de la que teníamos para los espacios de sucesiones.

- *Para* $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$, *se tiene:*

$$f \in L_q \quad \Longrightarrow \quad f \in L_p\,, \quad \|f\|_p \leqslant \|f\|_q \tag{16}$$

Suponiendo primero que $q < \infty$, usaremos la desigualdad integral de Hölder, pero con el exponente $r = q/p > 1$. Observamos claramente que

$$\int_0^1 \left(|f(t)|^p\right)^r dt = \int_0^1 |f(t)|^q\,dt = \left(\|f\|_q\right)^q < \infty$$

luego $|f|^p \in L_r$ con $\big\||f|^p\big\|_r = \left(\|f\|_q\right)^{q/r} = \left(\|f\|_q\right)^p$.

Por otra parte, tomamos $g(t) = 1$ p.c.t. $t \in [0,1]$, con lo que evidentemente tenemos

$$\int_0^1 |g(t)|^{r^*}\,dt = 1\,, \qquad \text{luego} \qquad g \in L_{r^*}\,, \ \|g\|_{r^*} = 1$$

La desigualdad integral de Hölder nos dice que $|f|^p g \in L_1$, es decir, $f \in L_p$, con

$$\left(\|f\|_p\right)^p = \big\||f|^p g\big\|_1 \leqslant \big\||f|^p\big\|_r\,\|g\|_{r^*} = \left(\|f\|_q\right)^p$$

y tenemos (16). El caso $q = \infty$ es aún más sencillo, pues para $f \in L_\infty$ se tiene

$$\int_0^1 |f(t)|^p\,dt \leqslant \left(\|f\|_\infty\right)^p < \infty$$

luego $f \in L_p$ con $\|f\|_p \leqslant \|f\|_\infty$. ∎

De nuevo para $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$, vamos a comprobar ahora que la inclusión $L_q \subset L_p$ es estricta. Con un poco más de esfuerzo, vamos a obtener un resultado bastante mejor.

- *Si* $1 \leqslant p < \infty$, *existe* $f \in L_p$ *tal que* $f \notin L_q$ *para* $p < q \leqslant \infty$

Empezamos considerando la función medible $g : [0,1] \to \mathbb{R}_0^+$ definida por

$$g(t) = \frac{1}{t\left(\log t\right)^2} \quad \forall t \in]0, 1/2] \qquad \text{y} \qquad g(t) = 0 \quad \forall t \in]1/2, 1] \cup \{0\}$$

Fijado $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant 3$, el cambio de variable $t = 1/s$ nos permite escribir

$$\int_{1/n}^{1} g(t)\,dt = \int_{1/n}^{1/2} \frac{dt}{t\left(\log t\right)^2} = \int_2^n \frac{ds}{s\left(\log s\right)^2} = \sum_{k=2}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{ds}{s\left(\log s\right)^2}$$

Para $k \in \mathbb{N}$ con $2 \leqslant k \leqslant n-1$ y $s \in [k, k+1]$ se tiene $s\left(\log s\right)^2 \geqslant k\left(\log k\right)^2$, de donde

$$\int_{1/n}^{1} g(t)\,dt = \sum_{k=2}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{ds}{s\left(\log s\right)^2} \leqslant \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k\left(\log k\right)^2}$$

El teorema de la convergencia monótona nos permite ahora concluir que

$$\int_0^1 g(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_{1/n}^{1} g(t)\,dt \leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k\left(\log k\right)^2} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\left(\log k\right)^2} < \infty$$

pues sabemos que la serie de Riemann $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{k\left(\log k\right)^2}$ es convergente.

Por otra parte, fijemos $r \in \mathbb{R}$ con $1 < r < 2$ y sea de nuevo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant 3$. El mismo cambio de variable usado antes nos permite ahora escribir

$$\int_{1/n}^{1} g(t)^r\,dt = \int_{1/n}^{1/2} \frac{dt}{t^r\left(\log t\right)^{2r}} = \int_2^n \frac{ds}{s^{2-r}\left(\log s\right)^{2r}} = \sum_{k=2}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{ds}{s^{2-r}\left(\log s\right)^{2r}}$$

Para $s \in [k, k+1]$ con $k = 2, \ldots, n-1$, usamos que $s^{2-r}\left(\log s\right)^{2r} \leqslant (k+1)^{2-r}\left(\log(k+1)\right)^{2r}$, con lo cual obtenemos ahora

$$\int_{1/n}^{1} g(t)^r\,dt \geqslant \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^{2-r}\left(\log(k+1)\right)^{2r}} = \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k^{2-r}\left(\log k\right)^{2r}}$$

Esta vez la serie de Riemann $\displaystyle\sum_{k\geqslant 3} \frac{1}{k^{2-r}\left(\log k\right)^{2r}}$ diverge, ya que $2-r < 1$, y el teorema de la convergencia monótona nos da

$$\int_0^1 g(t)^r\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_{1/n}^{1} g(t)^r\,dt \geqslant \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k^{2-r}\left(\log k\right)^{2r}} = \infty$$

En resumen viendo ya a g como clase de equivalencia, hemos probado que $g \in L_1$ pero $g \notin L_r$ para $1 < r < 2$. Usando (17) tenemos que $g \notin L_r$ para $1 < r \leqslant \infty$. Ahora, para $1 \leqslant p < \infty$ basta tomar $f = g^{1/p}$. En efecto, como $g \in L_1$ se tiene $f \in L_p$, y si $p < q < \infty$, tomando $r = q/p > 1$ tenemos $g \notin L_r$, luego $f \notin L_q$ y, con más razón, $f \notin L_\infty$. ■

Así pues, para $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$, la relación entre los espacios L_p y L_q es la misma que había entre los espacios de sucesiones l_p y l_q, pero con la inclusión en sentido opuesto. Concretamente, L_q es un subespacio denso de L_p, porque contiene a $C[0,1]$, pero $L_q \neq L_p$. Por tanto L_q, con la norma inducida por L_p, es un espacio normado no completo, cuya topología está contenida estrictamente en la de la norma $\|\cdot\|_q$.

2.6.4. Relación con los espacios de sucesiones

El siguiente resultado nos da una clara relación entre dos de las gamas de espacios de Banach que hemos presentado.

- *Para* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *se tiene que* l_p *es isométricamente isomorfo a un subespacio de* L_p.

Sea $\{J_n\}$ una sucesión de intervalos abiertos no vacíos, contenidos en $[0,1]$ y dos a dos disjuntos. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\chi_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ la función característica de J_n y $\rho_n \in \mathbb{R}^+$ la longitud de J_n. Por ejemplo, para todo $n \in \mathbb{N}$ podemos tomar

$$J_n = \left] \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right[\qquad \text{y} \qquad \rho_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

En el caso $p < \infty$, fijado $x \in l_p$, consideramos la función $f_x : [0,1] \to \mathbb{R}_0^+$ dada por

$$f_x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(n)}{\rho_n^{1/p}} \chi_n \tag{17}$$

La serie converge puntualmente porque, fijado $t \in [0,1]$, al estar usando intervalos dos a dos disjuntos, vemos que el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : \chi_n(t) \neq 0\}$ tiene a lo sumo un elemento. Por la misma razón se tiene también que

$$|f_x|^p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x(n)|^p}{\rho_n} \chi_n$$

Entonces f es medible, por ser el límite puntual de una sucesión de funciones medibles, y el teorema de la convergencia monótona nos permite escribir

$$\int_{\Omega} |f(t)|^p \, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x(n)|^p}{\rho_n} \int_0^1 \chi_n(t) \, dt = \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < \infty$$

Viendo a f_x como clase de equivalencia, tenemos por tanto $f_x \in L_p$, lo cual es válido para toda sucesión $x \in l_p$. Pero de hecho vemos que $\|f_x\|_p = \|x\|_p$ para todo $x \in l_p$, donde no hay problema en denotar por $\|\cdot\|_p$ a la norma de L_p y también a la de l_p. La aplicación $x \mapsto f_x$ es evidentemente lineal, luego es un isomorfismo isométrico de l_p sobre un subespacio de L_p.

En el caso $p = \infty$, para cada $x \in l_\infty$, en vez de (17) definimos

$$f_x = \sum_{n=1}^{\infty} x(n) \chi_n$$

De nuevo la serie anterior converge puntualmente en $[0,1]$, luego f_x es medible. También es claro que $|f_x(t)| \leqslant \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\} = \|x\|_\infty$ para todo $t \in [0,1]$. Por tanto, viendo f_x como clase de equivalencia, tenemos $f_x \in L_\infty$, con $\|f_x\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} |f_x| \leqslant \|x\|_\infty$. Además, dado $n \in \mathbb{N}$, tenemos por una parte $f_x(t) = x(n)$ p.c.t. $t \in J_n$, y por otra $|f_x(t)| \leqslant \|f_x\|_\infty$ también p.c.t. $t \in J_n$. Como J_n tiene medida positiva, se deberá tener $|x(n)| \leqslant \|f_x\|_\infty$, lo cual es válido para todo $n \in \mathbb{N}$. Concluimos que $\|f_x\|_\infty = \|x\|_\infty$ para toda sucesión $x \in l_\infty$, luego la aplicación $x \mapsto f_x$ es un isomorfismo isométrico de l_∞ sobre un subespacio de L_∞. ■