Tema 1

Cuestiones básicas en espacios normados

La mayoría de los espacios de funciones, de cuyo estudio se ocupa el Análisis Funcional, son espacios vectoriales reales o complejos, provistos de una norma adecuada para trabajar en ellos, es decir, son *espacios normados*. De hecho, dicha norma casi siempre es completa, así que se trata de *espacios de Banach*. Por ello, nuestro estudio del Análisis Funcional se inicia recordando los conceptos de espacio normado y espacio de Banach, junto con algunas de las nociones básicas que se manejan en tales espacios y que en esencia deben ser conocidas.

1.1. Norma y distancia

Damos por conocida la noción de espacio vectorial sobre un cuerpo conmutativo. En lo que sigue trabajaremos siempre con espacios vectoriales reales o complejos. Usaremos la letra $\mathbb{K}$ para denotar indistintamente al cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales o al cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos. Por tanto, cualquier concepto o resultado tendrá casi siempre dos versiones, una cuando $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ (caso real) y otra para $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ (caso complejo).

Una **seminorma** en un espacio vectorial X es una función $\varphi : X \to \mathbb{R}$ verificando:

$$\begin{array}{rll} (i) & \varphi(x+y) \leqslant \varphi(x) + \varphi(y) & \forall x,y \in X \\ (ii) & \varphi(\lambda x) = |\lambda|\, \varphi(x) & \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in X \end{array}$$

Estas condiciones implican claramente que $\varphi(0)=0$ y $\varphi(x) \geqslant 0$ para todo $x \in X$, así que *una seminorma no puede tomar valores negativos.* Cuando la igualdad $\varphi(x)=0$ sólo se verifica para $x=0$, decimos que φ es una norma. Para $x \in X$, se suele escribir entonces $\|x\|$ en lugar de $\varphi(x)$.

Así pues, una **norma** en X es una función $x \mapsto \|x\|$, de X en $\mathbb{R}$, verificando:

$$\begin{array}{rll} (i) & \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\| & \forall x,y \in X \\ (ii) & \|\lambda x\| = |\lambda|\, \|x\| & \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in X \\ (iii) & x \in X,\ \|x\| = 0 \implies x = 0 & \end{array} \tag{1}$$

Un **espacio normado** es un espacio vectorial X dotado de una norma $\|\cdot\|$. Para cada $x \in X$, se dice también que $\|x\|$ es la norma del vector x, un número real no negativo que se interpreta geométricamente como la longitud de un segmento, y que no debemos confundir con la norma del espacio X, que es una función de X en $\mathbb{R}$.

Las propiedades (1), que ha de cumplir toda norma, tienen un significado geométrico que conviene resaltar. La condición (i) se conoce como **desigualdad triangular**, pues afirma que cada lado de un triángulo es menor o igual que la suma de los otros dos. La condición (ii) se interpreta mejor si la desdoblamos en dos casos particulares. Por una parte, para $\rho \in \mathbb{R}^+$, la aplicación $x \mapsto \rho x$, biyectiva de X en sí mismo, es la **homotecia** de razón ρ, y (ii) nos dice que la norma es *homogénea por homotecias*, ya que $\|\rho x\| = \rho\|x\|$ para cualesquiera $x \in X$ y $\rho \in \mathbb{R}^+$. Por otra parte, para $\mu \in \mathbb{K}$ con $|\mu| = 1$, la aplicación $x \mapsto \mu x$, también biyectiva, es un **giro**, y (ii) nos dice que la norma es *invariante por giros*, ya que $\|\mu x\| = \|x\|$ para cualesquiera $x \in X$ y $\mu \in \mathbb{K}$ con $|\mu| = 1$. Nótese que en el caso real sólo hablamos en realidad de un giro, pues se tiene $\mu = \pm 1$, y el caso $\mu = 1$ es trivial. Finalmente, (iii) es una condición de *no degeneración*, pues nos dice que la longitud de un segmento sólo puede ser cero cuando su origen y extremo coinciden, es decir, cuando se trata de un segmento degenerado.

En todo espacio normado X usamos siempre la **distancia** $d : X \times X \to \mathbb{R}$ definida por

$$d(x, y) = \|y - x\| \qquad \forall x, y \in X \tag{2}$$

Es fácil ver, usando las propiedades de la norma, que en efecto d es una distancia en X. Nótese que d permite a su vez recuperar la norma, pues se tiene $\|x\| = d(0, x)$ para todo $x \in X$.

Observemos también que la distancia d tiene un buen comportamiento con respecto a la estructura de espacio vectorial. Más concretamente, fijado $z \in X$, la aplicación $x \mapsto x + z$, de nuevo una biyección de X en sí mismo, es la **traslación** determinada por el vector z, y la distancia d es *invariante por traslaciones*, pues evidentemente verifica que:

$$d(x+z, y+z) = d(x, y) \qquad \forall x, y, z \in X$$

Por otra parte, la distancia d es *invariante por giros y homogénea por homotecias,* ya que

$$d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|\, d(x, y) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \ \forall x, y \in X$$

1.2. Topología de la norma

En cualquier espacio normado X, usando su distancia d dada por (2), podemos manejar todas las nociones propias de los espacios métricos. En particular, disponemos de la topología generada por la distancia d que suele denominarse **topología de la norma**. Salvo que se diga expresamente lo contrario, cualquier noción topológica que manejemos en un espacio normado se refiere siempre a la topología de la norma. Así pues, un conjunto $A \subset X$ es *abierto* cuando para cada $x \in A$, se puede encontrar un $r \in \mathbb{R}^+$ tal que la bola abierta de centro x y radio r está contenida en A. Por tanto, para cada $x \in X$, las bolas abiertas de centro x forman una base de entornos de x, e igual ocurre con las correspondientes bolas cerradas. El manejo de estos entornos básicos resulta especialmente cómodo con la notación que pasamos a explicar.

Si A y B son subconjuntos de un espacio vectorial X y $\Lambda \subset \mathbb{K}$, es natural escribir

$$A+B = \{x+y : x \in A,\ y \in B\} \qquad \text{y} \qquad \Lambda B = \{\lambda y : \lambda \in \Lambda,\ y \in B\}$$

Si $A = \{x\}$ tiene un sólo elemento, podemos escribir $x+B$ en lugar de $\{x\}+B$. Análogamente, cuando $\Lambda = \{\lambda\}$ tiene un sólo elemento, escribimos λB en vez de $\{\lambda\}B$.

Pues bien, consideremos la **bola unidad** de un espacio normado X, esto es, el conjunto

$$B = \{b \in X : \|b\| \leqslant 1\}$$

Es claro que, para $x \in X$ y $r \in \mathbb{R}^+$, el conjunto $x + rB$ es la bola cerrada de centro x y radio r. Así pues, cualquier bola cerrada se obtiene a partir de la bola unidad mediante una homotecia y una traslación. Análoga situación se tiene, obviamente, usando bolas abiertas: si llamamos U a la **bola abierta unidad** de X, esto es, $U = \{u \in X : \|u\| < 1\}$, es claro que $x + rU$ es la bola abierta de centro x y radio r.

Dos normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ en un mismo espacio vectorial X son **equivalentes** cuando dan lugar a la misma topología. Repasamos el siguiente resultado del que se deduce un cómodo criterio para decidir si dos normas son equivalentes:

- *Si $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son dos normas en un espacio vectorial X, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

  (i) *La topología de la norma $\|\cdot\|_1$ contiene a la de $\|\cdot\|_2$.*
  (ii) *Existe una constante $\rho \in \mathbb{R}^+$ tal que $\|x\|_2 \leqslant \rho\,\|x\|_1$ para todo $x \in X$.*

Para la demostración denotamos por B_1 y B_2 a las bolas unidad de X para las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ respectivamente.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Como B_2 es un entorno de cero para $\|\cdot\|_2$, de (i) deducimos que también lo es para $\|\cdot\|_1$, luego existe $\delta \in \mathbb{R}^+$ tal que $\delta B_1 \subset B_2$, es decir, $B_1 \subset \rho B_2$ donde $\rho = 1/\delta$. Para $x \in X$, escribiendo $x = \|x\|_1\, u$ con $u \in B_1$, tenemos $\|u\|_2 \leqslant \rho$, de donde deducimos claramente (ii), ya que $\|x\|_2 = \|u\|_2 \|x\|_1 \leqslant \rho\,\|x\|_1$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. De (ii) deducimos $B_1 \subset \rho B_2$, es decir, $(1/\rho)B_1 \subset B_2$. Si A es un subconjunto abierto de X para la norma $\|\cdot\|_2$ y $x \in A$, existe un $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $x + rB_2 \subset A$, de donde deducimos que $x + (r/\rho)B_1 \subset x + rB_2 \subset A$. Esto prueba que A es abierto para la norma $\|\cdot\|_1$, luego se cumple (i). ■

Del resultado anterior deducimos obviamente la siguiente caracterización:

- *Dos normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ en un mismo espacio vectorial X son equivalentes si, y sólo si, existen dos constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ tales que*

$$\alpha\,\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \beta\,\|x\|_1 \qquad \forall x \in X$$

Destacamos una consecuencia importante del criterio anterior, que se refiere al concepto de acotación en espacios normados.

Recordemos que un subconjunto A de un espacio métrico X está **acotado** cuando está contenido en una bola, en cuyo caso, podemos elegir libremente el centro de dicha bola, es decir, para cada $x \in X$, existe una bola de centro x que contiene al conjunto A. En particular, cuando X es un espacio normado, vemos que A está acotado si y sólo si, está contenido en una bola de centro cero, es decir, existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $\|x\| \leqslant M$ para todo $x \in A$, lo que se suele indicar escribiendo $\sup \{ \|x\| : x \in A \} < \infty$.

Es sabido que la acotación en un espacio métrico no es una propiedad topológica. Más concretamente, dos distancias en un mismo conjunto pueden ser equivalentes, es decir, generar la misma topología, y no dar lugar a los mismos conjuntos acotados. Sin embargo, del criterio recién probado para la equivalencia entre dos normas, deducimos obviamente que dos normas equivalentes dan lugar a los mismos conjuntos acotados:

- *Si $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son dos normas equivalentes en un espacio vectorial X, un subconjunto de X está acotado para la norma $\|\cdot\|_1$ si, y sólo si, está acotado para $\|\cdot\|_2$.*

Resaltemos ahora una propiedad de los espacios normados que usaremos con frecuencia.

- *En todo espacio normado X se tiene:*
$$\big| \|x\| - \|y\| \big| \leqslant \|x-y\| \qquad \forall x,y \in X \tag{3}$$
luego la norma de X es una función continua.

Para $x,y \in X$ la desigualdad triangular nos dice que $\|x\| \leqslant \|x-y\| + \|y\|$, o lo que es lo mismo, $\|x\| - \|y\| \leqslant \|x-y\|$, pero intercambiando los papeles de x e y, también tenemos que $\|y\| - \|x\| \leqslant \|y-x\| = \|x-y\|$, luego se verifica (3). Dicha desigualdad nos dice que la norma es una función lipschitziana, luego continua. ■

1.3. Subespacios y bases algebraicas

Fijemos un espacio vectorial X, para repasar algunas nociones algebraicas bien conocidas. Para abreviar, a los subespacios vectoriales de X les llamaremos simplemente subespacios, así que un **subespacio** de X es un conjunto no vacío $M \subset X$ tal que $\mathbb{K}M + M \subset M$.

Si ahora E es un subconjunto no vacío de X, denotaremos por $\operatorname{Lin} E$ al conjunto de todas las **combinaciones lineales** de vectores de E, es decir:

$$\operatorname{Lin} E = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \,:\, n \in \mathbb{N},\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K},\ x_1, x_2, \ldots, x_n \in E \right\}$$

Es claro que $\operatorname{Lin} E$ es un subespacio de X que contiene a E, así como que, todo subespacio de X, que contenga a E, ha de contener también a $\operatorname{Lin} E$. Así pues, $\operatorname{Lin} E$ es el mínimo subespacio de X que contiene a E, por lo que le llamamos **subespacio engendrado** por E.

Por otra parte, E es un conjunto de vectores **linealmente independientes** cuando ningún vector de E puede expresarse como combinación lineal de los restantes, es decir, cuando para todo $x \in E$ se tiene que $x \notin \operatorname{Lin} \big(E \setminus \{x\} \big)$.

Una **base** del espacio vectorial X es un conjunto E de vectores linealmente independientes tal que $\operatorname{Lin} E = X$. Ello equivale claramente a que cada vector de X se exprese, de manera única, como una combinación lineal de elementos de E, con coeficientes no nulos.

Del lema de Zorn se deduce que X siempre tiene una base, y de hecho, todo conjunto de vectores linealmente independientes de X está contenido en una base. Además, todas las bases son equipotentes, es decir, si E_1 y E_2 son bases de X, existe una aplicación biyectiva de E_1 sobre E_2. Ello permite definir la **dimensión** de X como el cardinal común a todas las bases de X. Esta noción general requiere la teoría de cardinales, pero aquí sólo usaremos los casos más sencillos. Concretamente, X tiene **dimensión finita**, cuando tiene una base finita, en cuyo caso la dimensión de X es el número elementos de cualquiera de sus bases. Análogamente, X tiene **dimensión numerable**, cuando tiene una base numerable, y obviamente se pueden dar dos casos: o bien X tiene dimensión finita, o bien todas sus bases son equipotentes a $\mathbb{N}$.

En adelante, a las bases de un espacio vectorial X, en el sentido que acabamos de recordar, las llamaremos **bases algebraicas**, para distinguirlas de otro tipo de bases que pronto vamos a presentar, y que son mucho más útiles en Análisis Funcional.

Si X es un espacio normado y M un subespacio de X, está claro que la norma de X, como función de X en $\mathbb{R}$ que es, se puede restringir a M, con lo que claramente se obtiene una norma en M, a la que llamamos **norma inducida** por X en M. Resaltamos así que la topología de M es la inducida por la topología de X, es decir, los subconjuntos abiertos de M son las intersecciones con M de los abiertos de X. Salvo que se diga lo contrario, todo subespacio M de un espacio normado X se considera siempre como espacio normado, con la norma inducida. No obstante, en ciertas situaciones veremos que puede ser preferible usar en M otra norma, distinta de la inducida por X, e incluso no equivalente a ella.

1.4. Espacios vectoriales topológicos

Como ocurría con la norma y con la distancia, la topología de un espacio normado tiene un buen comportamiento con respecto a las operaciones de espacio vectorial, como muestra el siguiente enunciado.

- *Si X es un espacio normado, la función suma $(x,y) \mapsto x+y$, de $X \times X$ en X, es continua, considerando en $X \times X$ la topología producto. El producto por escalares $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ también es una función continua de $\mathbb{K} \times X$ en X, considerando en $\mathbb{K}$ su topología usual y en $\mathbb{K} \times X$ la producto.*

La continuidad de la suma es consecuencia inmediata de la desigualdad triangular, pues se tiene claramente

$$\| (x+y) - (u+v) \| = \| x-u \| + \| y-v \| \qquad \forall x,y,u,v \in X$$

Por otra parte, para $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ y $x, u \in X$ tenemos

$$\| \lambda x - \mu u \| \leqslant \| \lambda (x-u) + (\lambda - \mu) u \| \leqslant |\lambda| \, \| x-u \| + |\lambda - \mu| \, \| u \|$$

de donde se deduce claramente la continuidad del producto por escalares. ■

Una topología en un espacio vectorial, aunque no proceda de una norma, puede hacer cierto el enunciado anterior. Concretamente, un **espacio vectorial topológico** (abreviado EVT) es, por definición, un espacio vectorial X en el que se dispone de una topología, con la que la suma y el producto por escalares son funciones continuas, usando la topología usual en $\mathbb{K}$ y, tanto en $X \times X$ como en $\mathbb{K} \times X$, la topología producto. Así pues, cualquier espacio normado es un ejemplo de EVT. Un espacio vectorial $X \neq \{0\}$, con la topología trivial $\{\emptyset, X\}$, es un ejemplo (trivial) de EVT cuya topología no procede de una norma. Obviamente existen ejemplos más interesantes, de hecho el concepto de EVT es el más importante del Análisis Funcional, pero por ahora nos interesan sólo los espacios normados.

Ciertas propiedades de los espacios normados se deducen del resultado anterior, por lo que son válidas en cualquier EVT. Destacaremos dos ejemplos relevantes.

- *Si X es un EVT, para cualesquiera $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ y $z \in X$, la aplicación $x \mapsto \lambda x + z$ es un homeomorfismo de X. Equivalentemente, las traslaciones, giros y homotecias son homeomorfismos de X.*

La continuidad de las operaciones de X hace que las aplicaciones $x \mapsto \lambda x$ y $x \mapsto x + z$ sean continuas. Si $f(x) = \lambda x + z$ para todo $x \in X$, deducimos que f es continua, como composición de funciones continuas. Además, f es biyectiva y $f^{-1}(x) = (1/\lambda)x - (z/\lambda)$ para todo $x \in X$. Lo demostrado para f se puede pues aplicar a f^{-1} para obtener que f^{-1} también es continua, luego f es un homeomorfismo. Como casos particulares, para $\lambda = 1$ tenemos las traslaciones, mientras que para $z = 0$, tenemos los giros si $|\lambda| = 1$, y las homotecias si $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Recíprocamente, f se obtiene componiendo una homotecia con un giro y una traslación. ■

- *En todo EVT, el cierre de un subespacio es a su vez un subespacio.*

Si X es un EVT y M un subespacio de X, queremos probar que $\overline{M}$ es subespacio de X. Denotando por $\sigma : X \times X \to X$ a la suma, y $\pi : \mathbb{K} \times X \to X$ al producto por escalares, que son funciones continuas, se trata de probar que $\sigma\left(\overline{M} \times \overline{M}\right) \subset \overline{M}$ y que $\pi\left(\mathbb{K} \times \overline{M}\right) \subset \overline{M}$.

Por ser M un subespacio de X tenemos $\sigma(M \times M) \subset M \subset \overline{M}$, de donde $M \times M \subset \sigma^{-1}\left(\overline{M}\right)$. Como, por ser σ continua, $\sigma^{-1}\left(\overline{M}\right)$ es cerrado, deducimos que $\overline{M} \times \overline{M} = \overline{M \times M} \subset \sigma^{-1}\left(\overline{M}\right)$, es decir, $\sigma\left(\overline{M} \times \overline{M}\right) \subset \overline{M}$. De forma similar, como $\pi\left(\mathbb{K} \times M\right) \subset M \subset \overline{M}$, vemos que el conjunto cerrado $\pi^{-1}(\overline{M})$ contiene a $\mathbb{K} \times M$, luego también a $\overline{\mathbb{K} \times M} = \mathbb{K} \times \overline{M}$, como se quería. ■

Contra lo que la intuición parece indicar, pronto veremos que un subespacio de un espacio normado puede no ser cerrado.

1.5. Complitud y espacios de Banach

Ni que decir tiene, la topología de un espacio normado X, como la de todo espacio métrico, se caracteriza mediante la convergencia de sucesiones. Recordamos que una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de X es **convergente**, cuando existe $x \in X$ tal que $\left\{ \|x_n - x\| \right\} \to 0$, en cuyo caso x es único, le llamamos **límite** de la sucesión $\{x_n\}$ y escribimos $\{x_n\} \to x$, o bien, $x = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

Para un conjunto $A \subset X$ y un punto $x \in X$, sabemos que $x \in \overline{A}$ si, y sólo si, existe una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A tal que $\{x_n\} \to x$. Por tanto, A es cerrado si, y sólo si, para toda sucesión convergente $\{x_n\}$ de puntos de A se tiene $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in A$. De esta forma, la convergencia de sucesiones caracteriza a los conjuntos cerrados, y por tanto a la topología de X.

Recordemos que una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de X es una sucesión de Cauchy cuando, para cada $\varepsilon > 0$, puede encontrarse $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n,m \geqslant n_0$ se tiene $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$. Es bien sabido que toda sucesión convergente es siempre una sucesión de Cauchy y, cuando se verifica el recíproco decimos que la norma de X es **completa**, o que el espacio normado X es completo. A los espacios normados completos también se les llama **espacios de Banach**, en honor del matemático polaco Stefan Banach (1892-1945), el padre del Análisis Funcional.

De manera más general, dado un subconjunto A de un espacio normado X, decimos que A es **completo** cuando toda sucesión de Cauchy de puntos de A converge a un punto de A; en tal caso, es claro que A tiene que ser cerrado en X. El recíproco es cierto cuando el propio X es completo, es decir: si A es un subconjunto de un espacio de Banach X, entonces A es completo si, y sólo si, A es cerrado en X.

El criterio probado anteriormente, para la equivalencia entre dos normas, implica claramente que dos normas equivalentes, en un mismo espacio vectorial, dan lugar a las mismas sucesiones de Cauchy, luego una de ellas es completa si, y sólo si, lo es la otra. Por tanto, un espacio de Banach lo sigue siendo cuando sustituimos su norma por otra equivalente a ella.

1.6. Series

Nociones conocidas sobre convergencia de series numéricas pueden extenderse fácilmente para aplicarlas a series en espacios normados. A cada sucesión $\{x_n\}$ de vectores de un espacio normado X asociamos la **serie** $\sum\limits_{n\geqslant 1} x_n$ de término general $\{x_n\}$, que es la sucesión $\{S_n\}$ definida por $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Cuando dicha serie converge, como sucesión que es, su límite recibe el nombre de **suma de la serie** y se denota por $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$. Más concretamente,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k$$

Si la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} x_n$ es convergente, como $x_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, deducimos claramente que $\{x_n\} \to 0$. Como bien sabemos, el recíproco es falso, incluso en el caso $X = \mathbb{R}$.

Por otra parte, decimos que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} x_n$ es **absolutamente convergente** cuando la serie numérica $\sum\limits_{n\geqslant 1} \|x_n\|$ es convergente. Por tratarse de una serie de términos positivos, esta última afirmación suele expresarse simplemente escribiendo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$.

Como ocurre con las series de números reales, en todo espacio de Banach, la convergencia absoluta de una serie implica su convergencia. Pero además, esta implicación caracteriza los espacios de Banach como probamos a continuación.

Criterio de complitud. *Un espacio normado X es completo si, y sólo si, verifica que toda serie absolutamente convergente de vectores de X es convergente.*

Demostración. Una implicación se prueba exactamente igual que en $\mathbb{R}$. Si $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ es una serie absolutamente convergente en un espacio de Banach X, para cada $n \in \mathbb{N}$ escribimos

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \qquad \text{y} \qquad \sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \| x_k \|$$

Para $m,n \in \mathbb{N}$ con $m < n$, la desigualdad triangular nos dice claramente que

$$\| S_n - S_m \| = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} x_k \right\| \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} \| x_k \| = \sigma_n - \sigma_m = |\sigma_n - \sigma_m|$$

desigualdad que es trivial cuando $n = m$ y no se altera al intercambiar m con n, luego es válida para cualesquiera $n,m \in \mathbb{N}$. Como por hipótesis, la sucesión $\{\sigma_n\}$ es de Cauchy, deducimos de dicha desigualdad que la sucesión $\{S_n\}$ también lo es. La complitud de X nos dice entonces que $\{S_n\}$ converge, es decir, la serie $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ es convergente, como queríamos.

Para probar la implicación recíproca, supongamos que X es un espacio normado en el que toda serie absolutamente convergente es convergente, y sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en X. Para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que, para $n,m \geqslant n_k$ se tiene $\| x_n - x_m \| < 1/2^k$. Definiendo por inducción $\sigma(1) = n_1$ y $\sigma(k+1) = \max \{ n_{k+1}, \sigma(k)+1 \}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, obtenemos una aplicación estrictamente creciente $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Para $k \in \mathbb{N}$ se tiene $\sigma(k+1) > \sigma(k) \geqslant n_k$ luego

$$\| x_{\sigma(k+1)} - x_{\sigma(k)} \| < \frac{1}{2^k} \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

Tomando $y_1 = x_{\sigma(1)}$ e $y_{n+1} = x_{\sigma(n+1)} - x_{\sigma(n)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, vemos que la serie $\sum_{n\geqslant 1} y_n$ es absolutamente convergente, luego es convergente. Pero observamos que dicha serie coincide con la sucesión $\{x_{\sigma(n)}\}$, pues para $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant 2$ se tiene claramente

$$\sum_{k=1}^{n} y_k = x_{\sigma(1)} + \sum_{k=2}^{n} \big(x_{\sigma(k)} - x_{\sigma(k-1)} \big) = x_{\sigma(1)} + x_{\sigma(n)} - x_{\sigma(1)} = x_{\sigma(n)}$$

Así pues, la sucesión $\{x_{\sigma(n)}\}$ es convergente, luego $\{x_n\}$ también lo es, por tratarse de una sucesión de Cauchy que posee una sucesión parcial convergente. Hemos probado así que toda sucesión de Cauchy en X es convergente, es decir, X es un espacio de Banach, como queríamos demostrar. ∎

Merece la pena resaltar la idea clave del último razonamiento: *toda sucesión de Cauchy en un espacio normado admite una sucesión parcial, que es una serie absolutamente convergente.*