Tema 6

Continuidad uniforme

Como paso previo para el estudio del Cálculo Integral, discutimos en este tema una nueva propiedad que pueden tener las funciones reales de variable real, la continuidad uniforme. Será evidente que toda función uniformemente continua es continua y mostraremos con ejemplos que el recíproco no es cierto. El concepto de función lipschitziana permite obtener abundantes ejemplos de funciones uniformemente continuas. Como resultado más importante, probaremos el Teorema de Heine que, bajo ciertas condiciones, nos permitirá pasar de la continuidad a la continuidad uniforme.

6.1. Funciones uniformemente continuas

Si $f : A \to \mathbb{R}$ es una función continua, usando la caracterización $(\varepsilon - \delta)$ de la continuidad, tenemos:

$$\forall x \in A \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \,:\, y \in A\,,\ |y - x| < \delta \implies |f(y) - f(x)| < \varepsilon \tag{1}$$

Ni que decir tiene, δ depende de ε, pero también del punto $x \in A$ considerado. Fijado $\varepsilon > 0$, unos puntos de A pueden obligarnos a tomar δ mucho más pequeño que otros dependiendo, dicho intuitivamente, de la rapidez con que varía la función f cerca del punto que consideremos. Pues bien, cuando podamos conseguir que un mismo δ, que dependerá sólo de ε, sirva para todos los puntos del conjunto A, diremos que la función f es uniformemente continua en A.

Así pues, una función $f : A \to \mathbb{R}$ es *uniformemente continua* cuando, para cada $\varepsilon > 0$, puede encontrarse $\delta > 0$ tal que, si $x, y \in A$ verifican que $|y - x| < \delta$, entonces $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$. Simbólicamente:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \,:\, x, y \in A\,,\ |y - x| < \delta \implies |f(y) - f(x)| < \varepsilon \tag{2}$$

Obsérvese la sutil diferencia entre (1) y (2): como ya hemos explicado, en (1) permitimos que δ dependa de x y de ε, mientras que en (2) sólo puede depender de ε. Por supuesto, si f es uniformemente continua, podemos asegurar que f es continua, pero vemos enseguida que el recíproco no es cierto, con un contraejemplo nada rebuscado.

La función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dada por $f(x)=x^2$ para todo $x\in\mathbb{R}$, no es uniformemente continua. Si lo fuese, usando (2) con $\varepsilon=1$, existiría $\delta>0$ verificando que

$$x,y\in\mathbb{R},\ \ |y-x|<\delta \implies |y^2-x^2|<1$$

pero esto no es posible, pues fijado $n\in\mathbb{N}$ con $1/n<\delta$, tomaríamos $x=n$, $y=n+(1/n)$, para obtener $2+(1/n)^2=|y^2-x^2|<1$, flagrante contradicción. Obsérvese que la restricción de f a $\mathbb{R}^+$ tampoco es uniformemente continua. Puesto que la función identidad es uniformemente continua, vemos que el producto de dos funciones uniformemente continuas puede no serlo.

El razonamiento usado en el ejemplo anterior nos da la pista para caracterizar la continuidad uniforme mediante sucesiones:

- *Si una función $f:A\to\mathbb{R}$ es uniformemente continua, para cualesquiera dos sucesiones $\{y_n\}$ y $\{x_n\}$ de puntos de A tales que $\{y_n-x_n\}\to 0$, se tiene que $\{f(y_n)-f(x_n)\}\to 0$. Recíprocamente, si f no es uniformemente continua, existen $\varepsilon_0>0$ y dos sucesiones $\{y_n\}$ y $\{x_n\}$ de puntos de A verificando que $|y_n-x_n|<1/n$ y $|f(y_n)-f(x_n)|\geqslant\varepsilon_0$ para todo $n\in\mathbb{N}$.*

En el primer caso, dado $\varepsilon>0$, encontramos $\delta>0$ tal que, para $x,y\in A$ con $|y-x|<\delta$, se tenga $|f(y)-f(x)|<\varepsilon$. Como $\{y_n-x_n\}\to 0$, existirá entonces $m\in\mathbb{N}$ tal que, para $n\geqslant m$ se tenga $|y_n-x_n|<\delta$, luego $|f(y_n)-f(x_n)|<\varepsilon$. Así pues, $\{f(y_n)-f(x_n)\}\to 0$.

Recíprocamente, si f no es uniformemente continua, existe $\varepsilon_0>0$ tal que, para cada $\delta>0$ pueden encontrarse puntos $x,y\in A$ (que dependerán de δ) verificando que $|y-x|<\delta$ pero $|f(y)-f(x)|\geqslant\varepsilon_0$. Si para cada $n\in\mathbb{N}$ usamos lo anterior con $\delta=1/n$, obtenemos las dos sucesiones $\{y_n\}$ y $\{x_n\}$ requeridas. ■

6.2. Funciones lipschitzianas

Veamos ahora una propiedad sencilla que implica la continuidad uniforme. Se dice que una función $f:A\to\mathbb{R}$ es *lipschitziana* cuando existe una constante $M\geqslant 0$ verificando que:

$$|f(y)-f(x)|\leqslant M\,|y-x| \quad \forall x,y\in A \tag{3}$$

Claramente, existe una mínima constante $M_0\geqslant 0$ que verifica la desigualdad anterior,

$$M_0=\sup\left\{\frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|}\,:\,x,y\in A\,,\ \ x\neq y\right\}$$

y se dice que M_0 es la *constante de Lipschitz* de f, que toma su nombre del matemático alemán Rudolph Lipschitz (1832-1903).

De la desigualdad (3) deducimos que, dado $\varepsilon>0$, tomando $\delta>0$ de forma que $\delta M<\varepsilon$, se tendrá $|f(y)-f(x)|<\varepsilon$, siempre que $x,y\in A$ verifiquen $|y-x|<\delta$. Tenemos por tanto:

- *Toda función lipschitziana es uniformemente continua.*

El teorema del valor medio nos proporciona un criterio cómodo para saber si una función derivable en un intervalo es lipschitziana, basta ver si la función derivada está acotada:

- *Sea I un intervalo no trivial y $f \in C(I) \cap D(I^\circ)$. Las siguientes afirmaciones equivalen:*
  (i) *f es lipschitziana.*
  (ii) *f' está acotada, es decir, existe $M \geqslant 0$ tal que $|f'(x)| \leqslant M$ para todo $x \in I^\circ$.*
  Caso de que se verifiquen (i) y (ii), la constante de Lipschitz de f viene dada por

$$M_0 = \sup\{|f'(x)| : x \in I^\circ\} \tag{4}$$

$(i) \Rightarrow (ii)$. Si M_0 es la constante de Lipschitz de f, fijado $x \in I^\circ$ tenemos

$$\left|\frac{f(y) - f(x)}{y - x}\right| \leqslant M_0 \quad \forall y \in I \setminus \{x\}$$

de donde deducimos claramente que $|f'(x)| \leqslant M_0$. Por tanto f' está acotada y, escribiendo $M = \sup\{|f'(x) : x \in I^\circ\}$, tenemos ya la desigualdad $M \leqslant M_0$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Definiendo M como antes, para $x, y \in I$ con $x \neq y$, el Teorema del Valor Medio nos proporciona un punto intermedio $c \in I^\circ$ que nos permite escribir

$$|f(y) - f(x)| = |f'(c)|\,|y - x| \leqslant M\,|y - x|$$

Esto prueba que f es lipschitziana con constante de Lipschitz $M_0 \leqslant M$, la otra desigualdad que necesitábamos para probar (4). ■

En general, adivinamos una forma fácil de asegurarse la acotación de la derivada, basta suponer que la derivada es continua y trabajar en un intervalo cerrado y acotado, para poder aplicar el Teorema de Weierstrass:

- *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, $f \in D[a,b]$ y supongamos que $f' \in C[a,b]$. Entonces f es lipschitziana, con constante de Lipschitz $M_0 = \max\big\{|f'(x)| : x \in [a,b]\big\}$.*

Para concluir esta breve discusión de las funciones lipschitzianas, vemos un ejemplo de una función uniformemente continua que no es lipschitziana.

- *La función raíz cuadrada es uniformemente continua, pero no es lipschitziana.*

Para probar la continuidad uniforme, tomados $x, y \in \mathbb{R}_0^+$ con $x < y$, tenemos

$$\sqrt{y} - \sqrt{x} = \frac{y - x}{\sqrt{y} + \sqrt{x}} \leqslant \frac{y - x}{\sqrt{y - x}} = \sqrt{y - x}, \quad \text{es decir,} \quad |\sqrt{y} - \sqrt{x}| \leqslant \sqrt{|y - x|}$$

La última desigualdad es obvia si $y = x$, y no se altera al intercambiar x con y, luego es válida para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}_0^+$. Para conseguir que sea $|\sqrt{y} - \sqrt{x}| < \varepsilon$, bastará por tanto que se tenga $|y - x| < \varepsilon^2$.

Por otra parte, la función raíz cuadrada no es lipschitziana, ya que es continua en $\mathbb{R}_0^+$ y derivable en $\mathbb{R}^+ = (\mathbb{R}_0^+)^\circ$ pero su derivada no está acotada. ■

6.3. Teorema de Heine

Ha quedado claro anteriormente que una función derivable con derivada continua en un intervalo cerrado y acotado es uniformemente continua, pero podemos decir algo mejor:

Teorema. *Sean $a,b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, y $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces, f es uniformemente continua.*

Demostración. Suponer que f no es uniformemente continua nos llevará a contradicción. Existe un $\varepsilon_0 > 0$ y dos sucesiones $\{y_n\}$ y $\{x_n\}$ de puntos de $[a,b]$ tales que $\{y_n - x_n\} \to 0$ pero $|f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por el Teorema de Bolzano-Weierstrass, la sucesión $\{x_n\}$ admite una sucesión parcial $\{x_{\sigma(n)}\}$ que converge a un $x \in [a,b]$. Puesto que $\{y_n - x_n\} \to 0$, tenemos también $\{y_{\sigma(n)} - x_{\sigma(n)}\} \to 0$, luego $\{y_{\sigma(n)}\} \to x$. Como f es continua en el punto x, se tendrá que $\{f(x_{\sigma(n)})\} \to f(x)$ y también $\{f(y_{\sigma(n)})\} \to f(x)$, luego $\{f(y_{\sigma(n)}) - f(x_{\sigma(n)})\} \to 0$. Esto es una contradicción, ya que $|f(y_{\sigma(n)}) - f(x_{\sigma(n)})| \geqslant \varepsilon_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Este teorema nos permite poner de manifiesto que la continuidad uniforme, a diferencia de otras propiedades como la continuidad o la derivabilidad, no tiene carácter local, suele decirse que es una *propiedad global*. En efecto, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua, su restricción a cualquier intervalo cerrado y acotado será uniformemente continua. En particular, fijado un $\delta > 0$ arbitrario, tenemos que, para cada $x \in \mathbb{R}$, la restricción de f al intervalo $[x-\delta, x+\delta]$ es uniformemente continua. Sin embargo, esto no implica que f sea uniformemente continua.

6.4. Ejercicios

1. Probar que, si $f,g : A \to \mathbb{R}$ son funciones uniformemente continuas, entonces $f+g$ también lo es. Suponiendo además que f y g están acotadas, probar que también fg es uniformemente continua.

2. Consideremos la función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1/x$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$. Dado $\rho > 0$, probar que la restricción de f a la semirrecta $[\rho, +\infty[$ es lipschitziana, mientras que la restricción al intervalo $]0,\rho]$ no es uniformemente continua.

3. Sea I un intervalo no trivial y supongamos que todas las funciones continuas definidas en I son uniformemente continuas. Probar que I es cerrado y acotado.

4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y sea $\rho > 0$. Probar que, si la restricción de f al conjunto $\{x \in \mathbb{R} : |x| \geqslant \rho\}$ es uniformemente continua, entonces f es uniformemente continua.

5. Sean $a,b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ una función. Probar que equivalen las siguientes afirmaciones:

   (i) Existe una función continua $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = f(x)$ para todo $x \in]a,b[$.
   (ii) f es uniformemente continua.