Tema 4

Supremo e ínfimo. Números irracionales

Completamos en este tema la presentación de los números reales, estudiando las propiedades más importantes de $\mathbb{R}$, las que se deducen del axioma del continuo. Para aplicar cómodamente dicho axioma usaremos las nociones de *supremo* e *ínfimo*, imprescindibles en Análisis.

La existencia de números *irracionales*, es decir, de números reales que no son racionales, será nuestro primer objetivo. Encontraremos de forma explícita una amplia gama de números irracionales.

Después intentaremos entender la distribución de los números racionales e irracionales sobre la recta real. Probaremos que todo número real se puede *aproximar* por números racionales.

Finalmente haremos un breve estudio de los subconjuntos de $\mathbb{R}$ que más utilidad tendrán en lo que sigue, los *intervalos*, y concluiremos probando que $\mathbb{R}$ no es numerable, con lo que quedará claro que los números irracionales abundan mucho más que los racionales.

4.1. Las nociones de supremo e ínfimo

El axioma del continuo tiene un significado intuitivo muy claro, pero casi nunca se usa tal como lo hemos enunciado. Para aplicarlo con más comodidad sirven las nociones que ahora vamos a presentar.

Dado un conjunto no vacío $A \subset \mathbb{R}$, se dice que A está *mayorado* cuando existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $y \geqslant a$ para todo $a \in A$. En tal caso decimos también que y es un *mayorante* de A, así que A está mayorado cuando admite un mayorante. Análogamente decimos que A está *minorado* cuando admite un *minorante*, esto es, un $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \leqslant a$ para todo $a \in A$. Cuando A está mayorado y también minorado, decimos que A está *acotado*.

Resaltamos la relación entre las nociones de mayorante y máximo, o de minorante y mínimo. La diferencia esencial estriba en que un mayorante o minorante de un conjunto no tiene por qué pertenecer al conjunto. De hecho, si un conjunto A de números reales tiene máximo, entonces $\max A$ es el único elemento de A que es mayorante de A. Análogamente, el mínimo de un conjunto, si existe, es el único minorante de dicho conjunto que pertenece al mismo.

Veamos algunos ejemplos sencillos de las nociones recién introducidas. El conjunto $\mathbb{R}$ no está mayorado ni minorado. El conjunto $\mathbb{R}^-$ está mayorado pero no minorado, el conjunto de sus mayorantes es $\mathbb{R}_0^+$ y ninguno de ellos pertenece a $\mathbb{R}^-$, de ahí que $\mathbb{R}^-$ no tenga máximo. El conjunto $\mathbb{R}_0^+$ no está mayorado, el conjunto de sus minorantes es $\mathbb{R}_0^-$, $0 = \text{mín}\,\mathbb{R}_0^+$ y todos los elementos de $\mathbb{R}^-$ son minorantes de $\mathbb{R}_0^+$ que no le pertenecen. Finalmente, el conjunto $A = \{a \in \mathbb{R} : 0 \leqslant a < 1\}$ está acotado, $\mathbb{R}_0^-$ es el conjunto de los minorantes de A y $0 = \text{mín}\,A$; el conjunto de los mayorantes de A es $\{y \in \mathbb{R} : y \geqslant 1\}$ y A no tiene máximo.

Es obvio que si y es un mayorante de un conjunto A y tomamos $z \in \mathbb{R}$ con $z > y$, también z es mayorante de A, pero al sustituir y por z hemos perdido información. Podríamos decir que un mayorante es tanto más útil cuanto más pequeño sea, lo que nos lleva a preguntarnos si el conjunto de los mayorantes tiene mínimo. Análogamente, para un conjunto minorado, podemos preguntarnos si el conjunto de sus minorantes tiene máximo. El axioma del continuo nos permitirá contestar afirmativamente ambas preguntas:

Teorema (Existencia de supremo e ínfimo). *Si A es un conjunto de números reales no vacío y mayorado, entonces el conjunto de los mayorantes de A tiene mínimo, que recibe el nombre de **supremo** del conjunto A y se representa por* $\sup A$.

*Análogamente, si A es un conjunto de números reales no vacío y minorado, entonces el conjunto de los minorantes de A tiene máximo, que recibe el nombre de **ínfimo** del conjunto A y se representa por* $\text{ínf}\,A$.

Demostración. En efecto, sea A un conjunto no vacío y mayorado de números reales, y sea B el conjunto de todos los mayorantes de A. Por definición de mayorante tenemos $a \leqslant b$ para cualesquiera $a \in A$ y $b \in B$. El axioma del continuo nos proporciona un $x \in \mathbb{R}$ verificando que $a \leqslant x \leqslant b$, también para todo $a \in A$ y todo $b \in B$. Pero entonces está claro que x es mayorante de A y es menor o igual que cualquier otro mayorante de A, luego es el mínimo del conjunto de los mayorantes de A, como queríamos. Para la existencia del ínfimo se razona de manera análoga, usando un conjunto minorado y el conjunto de sus minorantes. ■

Naturalmente, si A es un conjunto de números reales no vacío y acotado, entonces A tiene supremo e ínfimo, siendo evidente que: $\text{ínf}\,A \leqslant \sup A$.

La siguiente observación ayuda a comprender rápidamente la utilidad de las nociones de supremo e ínfimo. Si $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, está claro que un $y \in \mathbb{R}$ es mayorante de A si, y sólo si, $y \geqslant \sup A$, luego el conjunto de los mayorantes de A es $\{y \in \mathbb{R} : y \geqslant \sup A\}$. Por definición de mayorante, tenemos la siguiente equivalencia: $a \leqslant y \ \ \forall a \in A \iff \sup A \leqslant y$. Obsérvese que a la izquierda de esta equivalencia tenemos tantas desigualdades como elementos de A, pero mirando a la derecha, la noción de supremo nos ha permitido reducir todas esas desigualdades a una sola. Para el ínfimo tenemos por supuesto la equivalencia análoga: dados un conjunto no vacío $A \subset \mathbb{R}$ y un $x \in \mathbb{R}$, se tiene que $x \leqslant a \ \ \forall a \in A \iff x \leqslant \text{ínf}\,A$.

Aprovechando esta observación, veremos que el teorema anterior es equivalente al axioma del continuo, pero permite comprenderlo mejor. Sean pues A y B subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ tales que $a \leqslant b$ para todo $a \in A$ y todo $b \in B$. Claramente, todo elemento de B es mayorante de A y todo elemento de A es minorante de B. En particular, A está mayorado y B está minorado, luego el teorema anterior nos permite considerar el supremo de A y el ínfimo de B.

Más aún, dado $b \in B$, sabemos que b es mayorante de A, luego $\sup A \leqslant b$. Pero entonces vemos que $\sup A$ es minorante de B, luego $\sup A \leqslant \inf B$. Recíprocamente, si $\sup A \leqslant \inf B$, se tendrá $a \leqslant \sup A \leqslant \inf B \leqslant b$ para cualesquiera $a \in A$ y $b \in B$. De entrada, el teorema anterior nos ha permitido resumir la hipótesis sobre A y B en una sola desigualdad: $\sup A \leqslant \inf B$.

La tesis del axioma del continuo, que ahora queremos obtener, nos diría simplemente que existe $x \in \mathbb{R}$ que es a la vez mayorante de A y minorante de B, pero sin darnos más información, sin permitirnos decidir por ejemplo si x es único. Sin embargo, que x sea mayorante de A equivale a que se tenga $\sup A \leqslant x$, y que sea minorante de B equivale a $x \leqslant \inf B$. Así pues la condición que debe cumplir x es, ni más ni menos, que $\sup A \leqslant x \leqslant \inf B$. Por supuesto, al ser $\sup A \leqslant \inf B$, podemos asegurar que tal x existe y hemos deducido el axioma del continuo del teorema anterior. Pero ahora tenemos una información más precisa: si $\sup A = \inf B$, está claro que x es único, pero si $\sup A < \inf B$, conocemos todas las posibles elecciones de x.

4.2. Relación con las nociones de máximo y mínimo

Vamos ahora a explicar con detalle la relación entre las nociones de supremo y máximo, o de ínfimo y mínimo.

Si un conjunto no vacío $A \subset \mathbb{R}$ no está mayorado, no podrá tener máximo ni supremo, así que supongamos que A está mayorado, con lo que sabemos que tiene supremo y podrá tener máximo o no. Si A tiene máximo, entonces $\max A$ es un mayorante de A, pero como $\max A \in A$, todo mayorante de A será mayor o igual que $\max A$, así que $\sup A = \max A$ y en particular, $\sup A \in A$. Recíprocamente, si $\sup A \in A$, entonces $\sup A$ es un mayorante de A que pertenece al conjunto A, luego A tiene máximo, y de nuevo $\max A = \sup A$.

En resumen, para un conjunto $A \subset \mathbb{R}$, no vacío y mayorado, hemos comprobado que A *tiene máximo si, y sólo si,* $\sup A \in A$, *en cuyo caso* $\max A = \sup A$. Análogamente, un conjunto no vacío y minorado $A \subset \mathbb{R}$ *tiene mínimo si, y sólo si,* $\inf A \in A$, *en cuyo caso,* $\min A = \inf A$.

La relación recién comentada explica que usemos el supremo o el ínfimo de un conjunto como sucedáneo de un máximo o mínimo que no existe, o al menos no sabemos si existe. A este respecto puede ser útil un paralelismo que vamos a establecer entre la definición del máximo de un conjunto y una caracterización del supremo que se comprueba sin dificultad. Si $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\alpha = \max A \Leftrightarrow \begin{cases} a \leqslant \alpha \ \forall a \in A \\ \alpha \in A \end{cases} \qquad \alpha = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} a \leqslant \alpha \ \forall a \in A \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \ \exists a \in A : \alpha - \varepsilon < a \end{cases}$$

Mientras el máximo de un conjunto pertenece al conjunto, el supremo sólo ha de tener elementos del conjunto “tan cerca como se quiera”. La comparación entre mínimo e ínfimo es análoga:

$$\alpha = \min A \Leftrightarrow \begin{cases} a \geqslant \alpha \ \forall a \in A \\ \alpha \in A \end{cases} \qquad \alpha = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} a \geqslant \alpha \ \forall a \in A \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \ \exists a \in A : a < \alpha + \varepsilon \end{cases}$$

Un ejemplo que ya hemos usado anteriormente sirve para ilustrar las nociones de supremo e ínfimo y su relación con las de máximo y mínimo. Para el conjunto $A = \{a \in \mathbb{R} : 0 \leqslant a < 1\}$ se tiene que $\min A = \inf A = 0$, $\sup A = 1 \notin A$ y A no tiene máximo.

4.3. Raíz n-ésima

Como primera aplicación de la existencia de supremo, vamos a probar una importante propiedad de los números reales positivos:

Teorema (Existencia de raíz n-ésima). *Dado $n \in \mathbb{N}$, para cada $x \in \mathbb{R}^+$ existe un único $y \in \mathbb{R}^+$ tal que $y^n = x$. Se dice que y es la **raíz n-ésima** de x, simbólicamente: $y = \sqrt[n]{x}$.*

Demostración. Empezamos con dos observaciones sencillas. La primera es la siguiente:

$$\delta \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant \delta \leqslant 1 \implies (1+\delta)^k \leqslant 1 + 3^{k-1}\delta \quad \forall k \in \mathbb{N} \tag{1}$$

Esta desigualdad se comprueba fácilmente por inducción. Para $k = 1$ es evidente, de hecho tenemos la igualdad. Suponiendo que la desigualdad es cierta para un $k \in \mathbb{N}$, tenemos

$$\begin{aligned}(1+\delta)^{k+1} &= (1+\delta)^k(1+\delta) \leqslant (1+3^{k-1}\delta)(1+\delta)\\ &= 1+3^{k-1}\delta + \delta + 3^{k-1}\delta^2 \leqslant 1 + 3^{k-1}\delta + 3^{k-1}\delta + 3^{k-1}\delta = 1 + 3^k\delta\end{aligned}$$

donde hemos usado que $3^{k-1} \geqslant 1$ y que $\delta^2 \leqslant \delta$, por ser $0 \leqslant \delta \leqslant 1$. Tenemos así la desigualdad buscada para el número natural $k+1$.

Fijado ya $n \in \mathbb{N}$, vamos con la segunda observación:

$$\rho \in \mathbb{R},\ \rho > 1 \implies \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : (1+\delta)^n \leqslant \rho \tag{2}$$

En efecto, si $\rho > 1 + 3^{n-1}$, basta tomar $\delta = 1$ y aplicar la desigualdad (1). Si $\rho \leqslant 1 + 3^{n-1}$ tomamos $\delta = (\rho - 1)/3^{n-1}$, con lo que $0 \leqslant \delta \leqslant 1$ y (1) nos dice que $(1+\delta)^n \leqslant 1 + 3^{n-1}\delta = \rho$.

Entramos en la demostración propiamente dicha. Dado $x \in \mathbb{R}^+$, supongamos de momento que $x \geqslant 1$, lo que hace que el conjunto $A = \{z \in \mathbb{R}^+ : z^n \leqslant x\}$ no sea vacío, pues $1 \in A$. Además, para $z \in \mathbb{R}$ con $z > x$, se tiene $z^n > x^n \geqslant x$ y $z \notin A$, luego x es mayorante de A. Podemos pues definir $y = \sup A \geqslant 1$, y veremos que $y^n = x$, comprobando que, tanto si $y^n < x$ como si $y^n > x$, se llega a contradicción.

Suponiendo $y^n < x$ podemos aplicar (2) con $\rho = x/y^n > 1$, obteniendo un $\delta \in \mathbb{R}^+$ tal que $(1+\delta)^n \leqslant x/y^n$, es decir, $\big((1+\delta)y\big)^n \leqslant x$. Pero entonces la definición del conjunto A nos dice que $(1+\delta)y \in A$, de donde $(1+\delta)y \leqslant \sup A = y$, lo cual es una contradicción, porque $\delta \in \mathbb{R}^+$.

Suponiendo $y^n > x$ aplicamos también (2) pero con $\rho = y^n/x > 1$, obteniendo un $\delta \in \mathbb{R}^+$ que ahora verifica $(1+\delta)^n \leqslant y^n/x$. Escribiendo para abreviar $w = y/(1+\delta)$, tenemos $x \leqslant w^n$. Para $z \in A$ se tendrá $z^n \leqslant x \leqslant w^n$, luego $z \leqslant w$. Pero entonces w es un mayorante del conjunto A y por tanto $w \geqslant \sup A = y$, es decir, otra vez $y \geqslant (1+\delta)y$, la misma contradicción.

Queda pues comprobado que $y^n = x$, como queríamos.

Si $0 < x < 1$, tenemos $1/x > 1$ luego, por lo ya demostrado, existe $u \in \mathbb{R}^+$ tal que $u^n = 1/x$, y basta tomar $y = 1/u \in \mathbb{R}^+$ para tener $y^n = x$.

Finalmente, la unicidad de y está clara: para $z \in \mathbb{R}^+$ con $z \neq y$, o bien $z < y$, con lo que $z^n < y^n = x$, o bien $z > y$, con lo que $z^n > y^n = x$; en cualquier caso $z^n \neq x$. ■

Si $x \in \mathbb{R}^+$ y $n = 1$, la afirmación del teorema anterior es obvia: $\sqrt[1]{x} = x$. Para $n = 2$ tenemos la *raíz cuadrada* y escribimos $\sqrt{x}$ en lugar de $\sqrt[2]{x}$. Para $n = 3$ tenemos la *raíz cúbica* $\sqrt[3]{x}$, para $n = 4$ la *raíz cuarta* $\sqrt[4]{x}$, etc. Aunque el teorema anterior sólo nos da estas raíces para $x \in \mathbb{R}^+$, podemos buscar ahora, para cualesquiera $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, las soluciones reales de la ecuación $y^n = x$. En ciertos casos, esto nos permitirá extender la definición de raíz n-ésima.

Para $x = 0$, dicha ecuación tiene solución única, $y = 0$, luego es coherente definir $\sqrt[n]{0} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para $x \in \mathbb{R}^*$ hemos de distinguir dos casos:

Si n es par, tenemos $(-y)^n = y^n \geqslant 0$ para todo $y \in \mathbb{R}$. Por tanto, para $x \in \mathbb{R}^-$, la ecuación $y^n = x$ no tiene soluciones reales, mientras que para $x \in \mathbb{R}^+$, tiene exactamente dos: $y = \pm \sqrt[n]{x}$.

Si n es impar, es claro que $y^n \in \mathbb{R}^-$ para todo $y \in \mathbb{R}^-$, así como que $(-y)^n = -y^n$ para todo $y \in \mathbb{R}$. Por tanto, para $x \in \mathbb{R}^+$, la ecuación $y^n = x$ no tiene soluciones negativas, luego $y = \sqrt[n]{x}$ es su única solución real. Para $x \in \mathbb{R}^-$, vemos que la ecuación $y^n = x$ equivale a $(-y)^n = -x$, cuya única solución real es, según hemos visto, $y = -\sqrt[n]{-x}$. Por tanto, es coherente definir $\sqrt[n]{x} = -\sqrt[n]{-x}$, de forma que $\sqrt[n]{x}$ siga siendo la única solución real de la ecuación $y^n = x$.

Resumiendo toda la discusión anterior, para $n \in \mathbb{N}$, la *raíz n-ésima* de un número real x, denotada siempre por $\sqrt[n]{x}$, ha quedado definida en los siguientes casos:

- Cuando n es impar. Entonces, para todo $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt[n]{x}$ es el único $y \in \mathbb{R}$ que verifica $y^n = x$. Equivalentemente, para $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene que $y^n = x$ si, y sólo si, $y = \sqrt[n]{x}$.

- Cuando n es par y $x \in \mathbb{R}_0^+$, en cuyo caso $\sqrt[n]{x}$ es el único $y \in \mathbb{R}_0^+$ que verifica $y^n = x$, así que la igualdad $y = \sqrt[n]{x}$ equivale a dos condiciones: $y \geqslant 0$ y $x = y^n$.

4.4. Números irracionales

Recordemos que los números reales que no son racionales se denominan *irracionales*, así que el conjunto de los números irracionales es $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Para tener ejemplos, empezamos viendo que $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. El siguiente razonamiento se atribuye a Hipaso de Metaponto, miembro de la escuela pitagórica (siglo V a.C.).

Supongamos que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ para llegar a contradicción. Podemos entonces escribir $\sqrt{2} = p/q$ donde $p, q \in \mathbb{N}$ son primos entre sí, de forma que la fracción p/q sea irreducible. Puesto que $p^2 = 2q^2$, vemos que p^2 es par, luego p también es par. Escribiendo entonces $p = 2h$ con $h \in \mathbb{N}$, tendremos $2q^2 = p^2 = 4h^2$ de donde $q^2 = 2h^2$. Entonces q^2 es par, luego q es par y hemos llegado a una contradicción: p y q son pares, luego no son primos entre sí.

Usando esencialmente el mismo razonamiento, podemos llegar más lejos:

- *Dados $n, m \in \mathbb{N}$, $\sqrt[n]{m}$ es un número natural o un número irracional.*

Bastará probar que si $\sqrt[n]{m} \in \mathbb{Q}$, entonces $\sqrt[n]{m} \in \mathbb{N}$. Siguiendo la pista del razonamiento anterior, es natural expresar $\sqrt[n]{m}$ como una fracción irreducible, lo cual es bastante fácil, basta pensar que una fracción es irreducible cuando su denominador es el más pequeño posible.

Por hipótesis, el conjunto $\{k \in \mathbb{N} : k\sqrt[n]{m} \in \mathbb{N}\}$ no es vacío, lo que nos permite definir

$$q = \min\{k \in \mathbb{N} : k\sqrt[n]{m} \in \mathbb{N}\}$$

Tomando entonces $p = q\sqrt[n]{m}$, tenemos que $p \in \mathbb{N}$ y obviamente $\sqrt[n]{m} = p/q$. La demostración se concluirá probando que $q = 1$, con lo que $\sqrt[n]{m} = p \in \mathbb{N}$.

Supongamos por el contrario que $q > 1$, en cuyo caso ha de existir un número primo $s > 1$ que divide a q (si el propio q fuese primo tomaríamos $s = q$). Puesto que $p^n = mq^n$ vemos que s divide a p^n, pero al ser s un número primo, esto implica que s divide a p. Escribiendo $p = sh$ y $q = sk$ con $h,k \in \mathbb{N}$ tenemos evidentemente $\sqrt[n]{m} = h/k$, luego $k\sqrt[n]{m} = h \in \mathbb{N}$, es decir, k pertenece al conjunto cuyo mínimo es q, una contradicción: $k \geqslant q = sk > k$. ■

Podemos ya poner en marcha toda una "fábrica" de números irracionales. Fijados $n,k \in \mathbb{N}$, para cualquier $m \in \mathbb{N}$ que verifique $k^n < m < (k+1)^n$ tendremos $k < \sqrt[n]{m} < k+1$ luego $\sqrt[n]{m} \notin \mathbb{N}$, así que $\sqrt[n]{m} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Por ejemplo, tomando $n = 2$ y $k = 1$ obtenemos que $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ son números irracionales, con $k = 2$ obtenemos que $\sqrt{m} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ para $m = 5,6,7,8$, y así sucesivamente. Pero también podemos usar raíces cúbicas: $\sqrt[3]{m} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ para todo $m \in \mathbb{N}$ que verifique $1 < m < 8$, o bien $8 < m < 27$, etc.

Aún podemos incrementar nuestra colección de números irracionales si pensamos que, tomando $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ y $r,s \in \mathbb{Q}$ con $s \neq 0$, se tiene que $r + s\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. En efecto, si fuese $r + s\alpha = t \in \mathbb{Q}$ tendríamos $\alpha = (t-r)/s \in \mathbb{Q}$, una contradicción.

Tomando $s = 1$ en la afirmación anterior, vemos que la suma de un número racional con un irracional es irracional, mientras que tomando $r = 0$ obtenemos que el producto de un número irracional por un racional no nulo es irracional. Conviene aclarar que la suma de dos números irracionales puede ser racional o irracional. Por ejemplo, $1 + \sqrt{2}$ y $1 - \sqrt{2}$ son irracionales, pero su suma es 2. Por otra parte, $\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. También es claro que el producto de dos números irracionales puede ser racional o irracional.

4.5. Propiedad arquimediana

Es natural preguntarse cómo situar los números irracionales en la recta real, algo que ya hicimos con los racionales, mediante una fácil construcción geométrica. Obtendremos suficiente información como para seguir aceptando la interpretación geométrica de los números reales como puntos de una recta. Sin embargo, conviene comentar que el problema no es nada fácil: para la inmensa mayoría de los números irracionales no es posible construir geométricamente los correspondientes puntos de la recta. Por citar un ejemplo famoso, uno de los problemas clásicos de la geometría, que los matemáticos griegos dejaron sin resolver, el problema de la *duplicación del cubo*, consiste en construir geométricamente un segmento de longitud $\sqrt[3]{2}$ y hoy sabemos que eso no es posible.

Empezamos probando la *propiedad arquimediana* de $\mathbb{R}$: el conjunto $\mathbb{N}$ no está mayorado, es decir, para cada $x \in \mathbb{R}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > x$. Su interpretación geométrica es fácil de admitir: al subdividir un segmento en partes iguales, conseguimos segmentos tan pequeños como queramos. El sabio griego Arquímedes de Siracusa (287-212 a.C.) obtuvo gran provecho de esta propiedad.

Para $r \in \mathbb{Q}$ es fácil encontrar un número natural mayor que r: o bien $r \leqslant 0 < 1$, o bien $r = p/q$ con $p, q \in \mathbb{N}$, en cuyo caso $r < p + 1$. Para los irracionales esto no parece tan evidente, pero probaremos fácilmente algo más general:

Teorema. *Sea A un conjunto no vacío de números enteros.*

(i) *Si A está mayorado, entonces A tiene máximo. En particular,* $\mathbb{N}$ *no está mayorado.*
(ii) *Si A está minorado, entonces A tiene mínimo.*
(iii) *Si A está acotado, entonces A es finito.*

Demostración. Para probar (i) usamos la existencia de supremo: sea $z = \sup A$. Como $z - 1$ no es mayorante de A, existe $k \in A$ tal que $z - 1 < k$. Para $a \in A$, se tiene entonces $a \leqslant z < k + 1$ de donde, por ser a y k números enteros, deducimos que $a \leqslant k$. Hemos visto así que $k = \max A$. Está claro ahora que $\mathbb{N}$ no puede estar mayorado, puesto que no tiene máximo. La demostración de (ii) es análoga, usando la existencia de ínfimo. Alternativamente, basta aplicar (i) al conjunto mayorado $B = \{-a : a \in A\}$, y observar que $\min A = -\max B$.

Finalmente, si A está acotado, podemos tomar $p = \min A$ y definir $f(a) = a - p + 1$ para todo $a \in A$, obteniendo una aplicación $f : A \to \mathbb{N}$ que claramente es inyectiva, así que A es equipotente a $f(A)$ y bastará ver que $f(A)$ es finito. Ahora bien, tomando $q = \max A$ tenemos claramente $f(a) \leqslant q - p + 1$ para todo $a \in A$, luego $f(A)$ es finito por estar contenido en el conjunto finito $\{n \in \mathbb{N} : n \leqslant q - p + 1\}$. ■

Veamos una consecuencia fácil del teorema anterior que será muy útil. Fijado $x \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{k \in \mathbb{Z} : k \leqslant x\}$ no es vacío, pues tomando $n \in \mathbb{N}$ tal que $-x < n$, es claro que $-n$ pertenece a dicho conjunto. Tenemos así un conjunto de números enteros no vacío y mayorado, luego tiene máximo, que recibe el nombre de *parte entera* de x, y se denota por $E(x)$. Así pues:

$$E(x) = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leqslant x\} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Tenemos claramente que $E(x) \in \mathbb{Z}$ y $E(x) \leqslant x < E(x) + 1$. De hecho, es fácil ver que $E(x)$ se caracteriza por esas dos condiciones: es el único $k \in \mathbb{Z}$ que verifica $k \leqslant x < k + 1$.

Para $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, ya sabemos algo sobre la situación de x en la recta real: debe ser un punto del segmento de extremos $E(x)$ y $E(x) + 1$. Enseguida afinaremos mucho mejor esta información.

4.6. Densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$

Como principal consecuencia de la propiedad arquimediana, vamos a probar que entre cada dos números reales distintos, siempre existe un número racional. Es costumbre referirse a esta propiedad diciendo que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$.

Más concretamente, dado un conjunto $D \subset \mathbb{R}$, se dice que D es *denso* en $\mathbb{R}$ cuando, para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$, existe $d \in D$ tal que $x < d < y$. Pues bien, vamos a probar que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$ y, con poco esfuerzo adicional, veremos que también $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$.

Teorema (Densidad de $\mathbb{Q}$ y de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$). *Para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$, existen $r \in \mathbb{Q}$ y $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ verificando que $x < r < \beta < y$.*

Demostración. Para encontrar r, sea $n = E\big(1/(y-x)\big)+1$, que claramente verifica $n \in \mathbb{N}$ y $n > 1/(y-x)$, luego $1/n < y-x$. Tomando ahora $p = E(nx)+1 \in \mathbb{Z}$, comprobaremos enseguida que $x < p/n < y$, luego para $r = p/n$ tendremos $r \in \mathbb{Q}$ y $x < r < y$. En efecto:

$$x = \frac{nx}{n} < \frac{p}{n} \leqslant \frac{nx+1}{n} = x + \frac{1}{n} < x + (y-x) = y$$

Para encontrar β, aplicamos otra vez lo ya demostrado, para obtener $s \in \mathbb{Q}$ tal que $r < s < y$. Fijado $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ con $0 < \alpha < 1$ (por ejemplo $\alpha = \sqrt{2}-1$), basta tomar $\beta = r + (s-r)\alpha$, para tener claramente $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ y $r < \beta < s < y$. ■

La interpretación geométrica de la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ es bien clara: en cualquier segmento cuyos extremos no coincidan, podemos encontrar puntos que se corresponden con números racionales. La siguiente consecuencia inmediata del teorema anterior es importante, pues pone de manifiesto cómo podemos obtener todos los números reales a partir de los racionales:

- *Para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene:* $\sup\{r \in \mathbb{Q} : r < x\} = x = \inf\{s \in \mathbb{Q} : s > x\}$.

Veamos una igualdad, la otra se prueba de forma análoga. El conjunto $A = \{r \in \mathbb{Q} : r < x\}$ no es vacío y x es mayorante de A. Poniendo $z = \sup A$, tenemos $z \leqslant x$, pero si fuese $z < x$, la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ nos daría un $r \in \mathbb{Q}$ tal que $z < r < x$, pero entonces $r \in A$ y z no sería mayorante de A, una contradicción. Luego $z = x$ como queríamos. ■

Volvamos a la interpretación geométrica de los números reales. Situados sobre la recta los números racionales, queremos convencernos de que cada número real se corresponde con un único punto de la recta, y viceversa. Para que se entienda la explicación que sigue, conviene recordar que el axioma del continuo se interpreta con una propiedad muy intuitiva de la recta, que debemos admitir: la recta no tiene "huecos". Lógicamente, debemos admitir también la interpretación geométrica de la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, ya comentada.

Pues bien, dado $x \in \mathbb{R}$, los conjuntos $A_x = \{r \in \mathbb{Q} : r < x\}$ y $B_x = \{s \in \mathbb{Q} : s > x\}$ están situados sobre la recta, de forma que A_x está enteramente a la izquierda de B_x. Como la recta no tiene huecos, entre A_x y B_x ha de haber un punto P de la recta. Pero si Q fuese otro punto en la misma situación, en el segmento de extremos P y Q no habríamos situado números racionales, contra lo que habíamos admitido. Por tanto P es único y es claramente el punto de la recta donde debemos situar el número real x. Es ahora fácil convencerse de que, de esta forma tenemos una correspondencia biunívoca entre números reales y puntos de la recta.

Admitido que todos los puntos de una recta se corresponden con números reales, vemos que la longitud de cualquier segmento puede expresarse como un número real (positivo). De manera más general, en vez de la longitud, podemos considerar otras magnitudes físicas: tiempo, masa, energía, temperatura, carga eléctrica, etc. Los números reales permiten *medir* cualquier cantidad de una magnitud física, es decir, cuantificar la relación entre dicha cantidad y una fija que se toma como unidad. Tenemos así una interpretación *física* de los números reales. Obsérvese que para magnitudes con signo, como la carga eléctrica, necesitamos usar también los números reales negativos.

4.7. Intervalos

Vamos a presentar una colección de subconjuntos de $\mathbb{R}$, que usaremos con frecuencia. Reciben el nombre genérico de *intervalos* y tienen una interpretación geométrica bien clara. Además de $\mathbb{R}$ y el conjunto vacío, que ambos son intervalos, tenemos:

- Los segmentos, o *intervalos acotados*, cuyos *extremos* pueden ser dos puntos cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$, con $a \leqslant b$. Pueden ser de cuatro tipos:
    - *Cerrado:* $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$
    - *Abierto:* $]a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
    - *Semiabierto por la izquierda:* $]a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$
    - *Semiabierto por la derecha:* $[a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$
- Las *semirrectas*, cuyo *origen* es un punto cualquiera $a \in \mathbb{R}$. También hay cuatro tipos:
    - *Hacia la derecha, cerrada:* $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x\}$
    - *Hacia la derecha, abierta:* $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$
    - *Hacia la izquierda, cerrada:* $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant a\}$
    - *Hacia la izquierda, abierta:* $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$

Como es la primera vez que aparecen, debe quedar claro que los símbolos, $-\infty$ y $+\infty$ son exactamente eso, símbolos, sin más significado que el que les demos en cada momento.

Obsérvese que, para $a \in \mathbb{R}$, se tiene $[a,a] = \{a\}$ mientras que $]a,a[= [a,a[=]a,a] = \emptyset$. Se entiende por intervalo *no trivial* un intervalo que no es vacío ni se reduce a un punto. Así pues, los intervalos no triviales son: la recta, todas las semirrectas y todos los segmentos cuyos extremos sean distintos.

Vamos a obtener ahora una útil caracterización de los intervalos, es decir, un criterio que nos permite decidir si un subconjunto de $\mathbb{R}$ es o no un intervalo, independientemente del tipo de intervalo de que se trate. Dicho de forma intuitiva, un subconjunto de $\mathbb{R}$ es un intervalo cuando, siempre que contenga dos puntos distintos, ha de contener todos los intermedios:

- *Dado un conjunto $I \subset \mathbb{R}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
    (i) *I es un intervalo*
    (ii) *Para cualesquiera $x, y \in I$ con $x < y$, si $z \in \mathbb{R}$ verifica $x < z < y$, entonces $z \in I$.*

La afirmación $(i) \Rightarrow (ii)$ es casi evidente. Si $I = \emptyset$ o $I = \mathbb{R}$, es obvio que I verifica (ii). En otro caso I viene definido por una o dos desigualdades (según se trate de una semirrecta o de un segmento) que pueden ser estrictas o no. Ahora bien, para $x, y \in I$ con $x < y$, si $z \in \mathbb{R}$ verifica $x < z < y$, puesto que tanto x como y cumplen las desigualdades que definen a I, es claro que también z ha de verificarlas, luego $z \in I$. Por ejemplo, en el caso $I = [a,b[$ con $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, tendríamos $a \leqslant x < z < y < b$, luego $z \in I$. Los demás casos son análogos.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Supongamos que $I \subset \mathbb{R}$ verifica la condición (ii) para ver que I es un intervalo, cosa que obviamente ocurre cuando $I = \emptyset$. Para $I \neq \emptyset$ pueden darse cuatro casos, según I esté o no mayorado y minorado:

(a) I no está mayorado ni minorado. Dado $z \in \mathbb{R}$, puesto que z no puede ser minorante ni mayorante de I, existirá un $x \in I$ tal que $x < z$, así como un $y \in I$ tal que $z < y$. Deducimos de (ii) que $z \in I$, pero $z \in \mathbb{R}$ era arbitrario, luego $I = \mathbb{R}$ es un intervalo.

(b) I está minorado pero no mayorado. Tomamos $a = \text{ínf}\, I$ siendo claro que $I \subset [a, +\infty[$. Por otra parte, para $z \in]a, +\infty[$ se tiene que z no puede ser minorante de I, luego existe $x \in I$ tal que $x < z$. Pero z tampoco puede ser mayorante de I luego existe $y \in I$ tal que $z < y$. La condición (ii) nos dice que $z \in I$, con lo que tenemos $]a, +\infty[\subset I \subset [a, +\infty[$. Ahora sólo pueden darse dos casos: o bien $a \in I$, con lo que $I = [a, +\infty[$, o bien $a \notin I$, en cuyo caso $I =]a, +\infty[$. Por tanto, I es una semirrecta hacia la derecha.

(c) I está mayorado pero no minorado. Un razonamiento análogo al caso anterior, tomando $a = \sup I$ prueba que I es una semirrecta hacia la izquierda: $I =]-\infty, a[$ o $I =]-\infty, a]$.

(d) I está acotado. Tomamos $a = \text{ínf}\, I$, $b = \sup I$, para probar que I es un intervalo acotado con extremos a y b. Si $z \in]a, b[$, z no podrá ser mayorante ni minorante de I, luego existirán $x, y \in I$ tales que $x < z < y$; pero entonces $z \in I$, luego $]a, b[\subset I \subset [a, b]$. Esto deja sólo cuatro posibilidades: $I =]a, b[$, $I = [a, b[$, $I =]a, b]$ o $I = [a, b]$. ■

Como ejemplo que ilustra bien la utilidad de la caracterización recién obtenida, podemos probar fácilmente lo siguiente:

- *La intersección de cualquier familia de intervalos es un intervalo. Más concretamente, si Λ es un conjunto no vacío y, para cada $\lambda \in \Lambda$ tenemos un intervalo $I_\lambda \subset \mathbb{R}$, entonces el conjunto $I = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ es un intervalo.*

En efecto, dados $x, y \in I$, $z \in \mathbb{R}$, con $x < z < y$, debemos ver que $z \in I$. Pero esto es evidente: para todo $\lambda \in \Lambda$, tenemos que $x, y \in I_\lambda$, luego $z \in I_\lambda$ por ser I_λ un intervalo. ■

4.8. Intervalos encajados

El insigne matemático alemán Georg Cantor (1845-1918) descubrió una útil propiedad de la recta real que enseguida vamos a demostrar, y la usó para probar que $\mathbb{R}$ no es numerable.

Principio de los intervalos encajados. *Supongamos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos un intervalo cerrado y acotado $J_n = [a_n, b_n]$, con $a_n \leqslant b_n$, y cada uno de estos intervalos contiene al siguiente: $J_{n+1} \subset J_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces la intersección $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} J_n$ no es vacía, es decir, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \in J_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Empezamos observando mediante una obvia inducción, que para cualesquiera $n, k \in \mathbb{N}$, se tiene $J_{n+k} \subset J_n$ es decir:

$$a_n \leqslant a_{n+k} \leqslant b_{n+k} \leqslant b_n \qquad \forall n, k \in \mathbb{N}$$

Deducimos claramente que $a_i \leqslant b_j$ también para cualesquiera $i, j \in \mathbb{N}$. En efecto, si $i < j$, tomamos $n = i$ y $k = j - i$, obteniendo $a_i = a_n \leqslant b_{n+k} = b_j$. Si fuese $i > j$ tomaríamos $n = j$ y $k = i - j$ para obtener $a_i = a_{n+k} \leqslant b_n = b_j$. En el caso $i = j$ tenemos por hipótesis $a_i \leqslant b_i$.

Equivalentemente, si consideramos los conjuntos $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $B = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$, tenemos que $a \leqslant b$ para cualesquiera $a \in A$ y $b \in B$. El axioma del continuo nos asegura que existe un $x \in \mathbb{R}$ verificando que $a \leqslant x \leqslant b$ para cualesquiera $a \in A$ y $b \in B$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene entonces $a_n \leqslant x \leqslant b_n$, es decir, $x \in J_n$. ■

Veamos ahora cómo usó Cantor el principio anterior para probar que $\mathbb{R}$ no es numerable:

Teorema. *Todo intervalo no trivial es un conjunto no numerable.*

Demostración. Se basará en construir por inducción intervalos encajados, iterando un proceso sencillo: dados un intervalo $I = [a,b]$ con $a < b$ y un $z \in \mathbb{R}$, existe otro intervalo $J = [c,d] \subset I$ con $c < d$, tal que $z \notin J$. Esto es evidente: si $z \notin I$ se puede tomar $J = I$, si $z = a$ se toma $a < c < b$ y $d = b$, mientras que si $a < z \leqslant b$ basta tomar $c = a$ y $a < d < z$. En cualquier caso es $c < d$ y tomando $J = [c,d]$, se tiene $z \notin J \subset I$.

Pues bien, fijados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, para probar que $[a,b]$ no es numerable, veremos que una aplicación $f : \mathbb{N} \to [a,b]$ nunca puede ser sobreyectiva, es decir, $f(\mathbb{N}) \neq [a,b]$.

Empezamos usando el proceso descrito para obtener un intervalo J_1 como sigue:

$$J_1 = [a_1, b_1] \subset [a,b], \ \ a_1 < b_1, \ \ f(1) \notin J_1$$

Suponiendo que, para un $n \in \mathbb{N}$, disponemos ya de un intervalo $J_n = [a_n, b_n]$, con $a_n < b_n$, tal que $f(n) \notin J_n$, construimos el intervalo J_{n+1} de la siguiente forma:

$$J_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset J_n, \ \ a_{n+1} < b_{n+1}, \ \ f(n+1) \notin J_{n+1}$$

Por inducción, hemos definido una familia $\{J_n : n \in \mathbb{N}\}$ de intervalos cerrados y acotados, verificando que $J_{n+1} \subset J_n$ y que $f(n) \notin J_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. El principio de los intervalos encajados nos proporciona un $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \in J_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $x \in J_1 \subset [a,b]$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $x \neq f(n)$, ya que $x \in J_n$ mientras $f(n) \notin J_n$. Así pues, $x \in [a,b] \setminus f(\mathbb{N})$ y f no es sobreyectiva.

Finalmente, si H es un intervalo no trivial, existen $a, b \in H$ tales que $a < b$. Puesto que $[a,b] \subset H$ y sabemos ya que $[a,b]$ no es numerable, H tampoco puede serlo. ■

4.9. Números algebraicos y trascendentes

Resaltamos que el conjunto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ de los números irracionales no es numerable, pues si lo fuese, también lo sería $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$. De hecho, es fácil ver que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es equipotente a $\mathbb{R}$. Intuitivamente, podríamos decir que la inmensa mayoría de los números reales son irracionales.

Conviene resaltar que en realidad, para probar que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ no es numerable, no hemos usado que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \neq \emptyset$. Tenemos así una demostración alternativa, no sólo de la existencia, sino de la abundancia de números irracionales.

Aunque parezca sorprendente, a veces podemos probar que un conjunto no es numerable, luego intuitivamente muy grande, sin saber “a priori” que dicho conjunto no es vacío. En lo que sigue, vamos a ilustrar este procedimiento viendo que la inmensa mayoría de los números irracionales no se parecen en nada a los que ya conocemos.

Se dice que un número real es algebraico cuando se puede obtener como solución de una ecuación algebraica con coeficientes enteros. Expliquemos con más detalle lo que esto significa:

Por *polinomio con coeficientes enteros* entenderemos una función $P:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de la forma

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n \quad \forall z \in \mathbb{R} \tag{3}$$

donde $n\in\mathbb{N}$ y $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$. Cuando $a_n \neq 0$ decimos que el polinomio P tiene *grado* n. Para cada $n\in\mathbb{N}$, denotaremos por $\mathcal{P}_n$ al conjunto de los polinomios con coeficientes enteros de grado n y $\mathcal{P}$ será el conjunto de todos los polinomios con coeficientes enteros que no sean constantes, es decir, $\mathcal{P} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_n$.

Pues bien, se dice que $x\in\mathbb{R}$ es un *número algebraico*, cuando existe un polinomio $P\in\mathcal{P}$ tal que $P(x)=0$. Denotaremos por $\mathbb{A}$ al conjunto de los números algebraicos. Por ejemplo, es evidente que todo número racional es algebraico: $\mathbb{Q}\subset\mathbb{A}$. Dados $n,m\in\mathbb{N}$, también es claro que $x=\sqrt[n]{m}$ es un número algebraico, pues se verifica evidentemente que $m-x^n=0$. A partir de aquí, no es difícil adivinar que todos los números irracionales que hasta ahora conocemos son algebraicos. Se dice que un número real es *trascendente* cuando no es algebraico.

Aunque por el momento no podamos asegurar que existan números trascendentes, vamos a probar que la inmensa mayoría de los números reales son trascendentes:

- *El conjunto de los números algebraicos es numerable. Por tanto, el conjunto de los números trascendentes no es numerable.*

Empezamos viendo que, para todo $n\in\mathbb{N}$, el conjunto $\mathcal{P}_n$ es numerable. Para mayor comodidad, conviene considerar el conjunto $\mathcal{Q}_n$ de los polinomios de la forma (3), sin exigir que sea $a_n\neq 0$. Así pues $\mathcal{Q}_n$ está formado por todos los polinomios con coeficientes enteros de grado menor o igual que n, incluyendo los polinomios constantes. Puesto que evidentemente $\mathcal{P}_n\subset\mathcal{Q}_n$, bastará ver que $\mathcal{Q}_n$ es numerable para todo $n\in\mathbb{N}$, cosa que haremos por inducción.

Para $n=1$ basta pensar que $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ es numerable y que, si a cada $(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ asociamos el polinomio definido por $P(z)=a+bz$ para todo $z\in\mathbb{R}$, obtenemos una aplicación sobreyectiva de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ en $\mathcal{Q}_1$. Suponiendo que $\mathcal{Q}_n$ es numerable, se tendrá también que $\mathcal{Q}_n\times\mathbb{Z}$ es numerable. Entonces, si a cada $(Q,c)\in\mathcal{Q}_n\times\mathbb{Z}$ asociamos el polinomio definido por $P(z)=Q(z)+cz^{n+1}$ para todo $z\in\mathbb{R}$, obtenemos evidentemente una aplicación sobreyectiva de $\mathcal{Q}_n\times\mathbb{Z}$ en $\mathcal{Q}_{n+1}$, luego $\mathcal{Q}_{n+1}$ es numerable.

Sabiendo que $\mathcal{P}_n$ es numerable para todo $n\in\mathbb{N}$, deducimos que $\mathcal{P}$ es numerable, por ser una unión numerable de conjuntos numerables. Finalmente, basta tener en cuenta un hecho bien conocido: para cada $P\in\mathcal{P}$, el conjunto $C(P)=\{x\in\mathbb{R} : P(x)=0\}$ es finito. Por tanto, escribiendo $\mathbb{A}=\bigcup\limits_{P\in\mathcal{P}} C(P)$, observamos que $\mathbb{A}$ es una unión numerable de conjuntos finitos, luego es numerable. ■

La segunda parte del resultado anterior está muy clara: si el conjunto $\mathbb{R}\setminus\mathbb{A}$ de los números trascendentes fuese numerable, entonces $\mathbb{R}=\mathbb{A}\cup(\mathbb{R}\setminus\mathbb{A})$ también lo sería. Así pues, hemos probado que abundan los números trascendentes, sin dar un sólo ejemplo. De hecho, dar un ejemplo concreto de un número trascendente no es del todo fácil.

4.10. Ejercicios

1. Sea A un conjunto no vacío de números reales. En cada uno de los siguientes casos, decidir si el conjunto dado puede coincidir con el conjunto de todos los mayorantes de A:

$$a)\ \mathbb{R} \qquad b)\ \emptyset \qquad c)\ \mathbb{R}^+ \qquad d)\ \{x\in\mathbb{R} : 0\leqslant x<1\} \qquad e)\ \{x\in\mathbb{R} : 2\leqslant x\}$$

2. Sean A y B conjuntos de números reales tales que $A\cap B\neq\emptyset$.

   (i) Mostrar con un ejemplo que $A\cap B$ puede estar acotado, aunque A y B no estén mayorados ni minorados.

   (ii) Suponiendo que A y B están mayorados, probar que
   $$\sup(A\cap B)\leqslant \min\{\sup A\,,\,\sup B\}$$

   (iii) Probar que, si A y B están minorados, entonces
   $$\inf(A\cap B)\geqslant \max\{\inf A\,,\,\inf B\}$$

   (iv) Probar que, estando A y B acotados, las dos desigualdades obtenidas en (ii) y (iii) pueden ser estrictas.

3. Sean A y B conjuntos no vacíos de números reales y consideremos el conjunto
$$C=\{a-b : a\in A\,,\, b\in B\}$$
Probar que C está mayorado si, y sólo si, A está mayorado y B está minorado, en cuyo caso se tiene: $\sup(C)=\sup A-\inf B$.

4. Sean A y B conjuntos no vacíos de números reales positivos, y consideremos el conjunto:
$$C=\{ab : a\in A\,,\, b\in B\}$$

   (i) Probar que C está mayorado si, y sólo si, A y B están mayorados, en cuyo caso:
   $$\sup(C)=\sup A\cdot\sup B$$

   (ii) Probar también que $\inf(C)=\inf A\cdot\inf B$

5. Probar que el conjunto $A=\{x\in\mathbb{R} : |x^2-2x-1|<2|x-2|\}$ está acotado y calcular su supremo y su ínfimo.

6. Probar que:
$$\sqrt{n}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\leqslant 2\sqrt{n}\qquad\forall n\in\mathbb{N}$$

7. Probar por inducción que para $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{R}^+$ se tiene

$$\prod_{k=1}^{n} y_k = 1 \implies \sum_{k=1}^{n} y_k \geqslant n$$

dándose la igualdad si, y sólo si, $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 1$. Deducir la llamada “desigualdad de las medias”: para $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$, se tiene

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k$$

¿Cuándo se da la igualdad?

8. Probar que, para $n \in \mathbb{N}$ con $n > 1$, se tiene:

$$\prod_{k=1}^{n} (2k-1) < n^n \quad \text{y} \quad n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

9. Probar que $\dfrac{\sqrt{5}+2}{3\sqrt{5}+4}$ es un número irracional.

10. Probar que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es equipotente a $\mathbb{R}$.

11. En cada uno de los siguientes casos, comprobar que el conjunto que se indica está acotado, calcular su supremo e ínfimo, y dilucidar si tiene máximo y mínimo:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x < 2\}; \qquad B = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leqslant 3\}; \qquad C = \{x \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q} : x^2 \leqslant 2\}$$

12. Comprobar las siguientes igualdades:

$$\sup \left\{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} = 1; \qquad \text{ínf} \left\{\frac{1}{m} + \frac{1}{2^n} : m, n \in \mathbb{N}\right\} = 0$$

13. Probar que si I, J son intervalos verificando que $I \cap J \neq \emptyset$, entonces $I \cup J$ es un intervalo.

14. Sean A, B intervalos no vacíos y acotados, tales que $A \cap B \neq \emptyset$. Probar que

$$\text{ínf}(A \cap B) = \text{máx}\{\text{ínf} A, \text{ínf} B\} \quad \text{y} \quad \sup(A \cap B) = \text{mín}\{\sup A, \sup B\}$$

Comparar este resultado con el ejercicio 2.

15. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se consideran los intervalos $I_n =]0, 1/n]$ y $J_n = [n, +\infty[$. Obsérvese que $I_{n+1} \subset I_n$ y $J_{n+1} \subset J_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Probar que, sin embargo,

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} J_n = \emptyset$$

¿Qué relación guardan estos ejemplos con el principio de los intervalos encajados?