

## Series de números reales

En este tema abordamos el estudio de otra noción fundamental en Análisis Matemático, la convergencia de series de números reales. De hecho, el concepto no es nuevo, pues veremos que una serie no es más que una sucesión definida de forma muy concreta a partir de otra, pero ocurre también que cualquier sucesión puede verse como una serie. Por tanto, al estudiar la convergencia de series no hacemos otra cosa que estudiar la convergencia de sucesiones, sólo que desde un punto de vista diferente. El interés del nuevo punto de vista consiste en que intentamos dar sentido a la idea intuitiva de “sumar todos los términos” de una sucesión. Parte de nuestro trabajo consistirá precisamente en comprender hasta qué punto la teoría que vamos a desarrollar responde a esa idea intuitiva.

### 9.1. Series convergentes

Sea  $\{x_n\}$  una sucesión de números reales e intentemos, como se ha dicho, dar sentido a la idea de “sumar todos los términos” de dicha sucesión, una “suma infinita”. Para ello podemos hacer sumas finitas, incrementando progresivamente el número de sumandos, lo que nos lleva a considerar *otra* sucesión:

$$x_1, (x_1 + x_2), (x_1 + x_2 + x_3), \dots, (x_1 + x_2 + \dots + x_n), \dots$$

Si esta nueva sucesión converge, parece plausible entender que su límite sea la “suma infinita” que íbamos buscando. Independientemente de que ésta sea o no una buena idea, que de eso hablaremos más adelante, de entrada es una idea muy sugerente que merece ser explorada.

Así pues, a cada sucesión de números reales  $\{x_n\}$ , asociamos la sucesión  $\{S_n\}$  definida por  $S_n = \sum_{k=1}^n x_k$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Se dice que  $\{S_n\}$  es la *serie de término general*  $\{x_n\}$ , que se denota por  $\sum_{n \geq 1} x_n$ . Así pues, simbólicamente:

$$\sum_{n \geq 1} x_n = \{S_n\} = \left\{ \sum_{k=1}^n x_k \right\}$$

Queda claro que una serie de números reales no es más que la sucesión de números reales que obtenemos de una forma muy concreta a partir de otra, llamada término general de la serie. Cualquier propiedad de las sucesiones se aplica automáticamente a las series, con lo que tiene sentido decir, por ejemplo, que una serie converge, diverge, es monótona, está acotada, etc.

Para destacar la propiedad que más nos interesa, la serie  $\sum_{n \geq 1} x_n$  será *convergente* cuando converja como sucesión que es. En tal caso, a su límite le llamamos *suma* de la serie y se denota por  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ , para sugerir la idea intuitiva de que estamos “sumando todos los términos” de la sucesión  $\{x_n\}$ . Así pues, cuando la serie  $\sum_{n \geq 1} x_n$  es convergente, tenemos, por definición:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_k$$

Nótese que al estudiar una serie trabajamos con dos sucesiones, el término general  $\{x_n\}$  y la propia serie  $\{S_n\}$ . Conviene por tanto usar una terminología que indique claramente a cual de ellas nos referimos en cada momento. Es pues coherente que al límite de la sucesión  $\{S_n\}$ , cuando existe, le hayamos llamado suma de la serie, para no confundirlo con el posible límite de la sucesión  $\{x_n\}$ , que pronto discutiremos.

Habitualmente, la palabra “término” se reserva también para la sucesión  $\{x_n\}$ , e incluso se habla de los *términos de la serie*  $\sum_{n \geq 1} x_n$  para referirse a los términos de la sucesión  $\{x_n\}$ . Por ejemplo, es frecuente decir que  $\sum_{n \geq 1} x_n$  es una *serie de términos no negativos*, para indicar que  $x_n \geq 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , en cuyo caso también se tiene que  $S_n \geq 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , pero lo que realmente importa es que la serie es creciente, es decir, la sucesión  $\{S_n\}$  es creciente, puesto que  $S_n \leq S_n + x_{n+1} = S_{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Necesitamos por tanto una denominación para referirnos a los términos de la sucesión  $\{S_n\}$ , sin que haya riesgo de confusión. Pues bien, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , se dice que  $S_n = \sum_{k=1}^n x_k$  es la *n-ésima suma parcial* de la serie  $\sum_{n \geq 1} x_n$ . De esta forma, los términos de la serie son los de la sucesión  $\{x_n\}$ , mientras que los términos de la sucesión  $\{S_n\}$  son las sumas parciales de la serie. Incluso se dice a veces que  $\{S_n\}$  es la *sucesión de sumas parciales* de la serie. Por ejemplo, si decimos que la serie  $\sum_{n \geq 1} x_n$  tiene *sumas parciales acotadas*, queremos indicar que la serie está acotada, es decir, que la sucesión  $\{S_n\}$  está acotada. Debe quedar claro que las expresiones comentadas son sólo formas de hablar: matemáticamente, una serie y la sucesión de sus sumas parciales son exactamente la misma cosa.

Conviene aclarar que una serie no es un tipo particular de sucesión, más concretamente, *toda sucesión de números reales puede verse como una serie*. En realidad, esta es una idea que ya conocemos: dada una sucesión  $\{y_n\}$ , basta tomar  $x_n = y_n - y_{n-1}$ , con el convenio  $y_0 = 0$ , para tener evidentemente  $y_n = \sum_{k=1}^n x_k$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , es decir,  $\{y_n\} = \sum_{n \geq 1} x_n = \sum_{n \geq 1} (y_n - y_{n-1})$ .

En resumen, toda serie es, por definición, una sucesión, y recíprocamente, toda sucesión puede verse como una serie. Por tanto, la convergencia de sucesiones y la de series, son nociones equivalentes, la única diferencia entre ellas es un cambio de lenguaje. El nuevo lenguaje de las series merece la pena principalmente por dos razones. Por una parte, las sucesiones más interesantes suelen aparecer en forma de serie y es frecuente que el término general de una serie sea una sucesión bastante sencilla, pero la serie sea una sucesión más complicada. Por otra, el lenguaje de las series permite plantear y contestar preguntas que en lenguaje de sucesiones no surgirían con tanta naturalidad.

De lo dicho se desprende que, al estudiar una serie  $\sum_{n \geq 1} x_n$ , lo que más nos debe interesar es la información sobre ella que podamos deducir directamente de la sucesión  $\{x_n\}$ , pues casi nunca dispondremos de una expresión cómoda para trabajar con las sumas parciales.

Veamos un resultado básico del tipo indicado: si la sucesión  $\{x_n\}$  no converge a cero, la serie  $\sum_{n \geq 1} x_n$  no puede ser convergente, equivalentemente:

- *El término general de una serie convergente es una sucesión convergente a cero.*

Suponiendo que la serie  $\{S_n\} = \sum_{n \geq 1} x_n$  converge, digamos  $\{S_n\} \rightarrow S \in \mathbb{R}$ , tenemos también  $\{S_{n+1}\} \rightarrow S$ , luego  $\{x_{n+1}\} = \{S_{n+1} - S_n\} \rightarrow 0$ , es decir,  $\{x_n\} \rightarrow 0$ . ■

Traducido al lenguaje de sucesiones, lo que acabamos de ver es igual de obvio: si  $\{y_n\}$  es una sucesión convergente, entonces  $\{y_n - y_{n-1}\} \rightarrow 0$ , equivalentemente,  $\{y_{n+1} - y_n\} \rightarrow 0$ .

Es natural preguntarse por el recíproco del resultado anterior, es decir, si la convergencia a cero del término general de una serie implica o no que la serie converja. En lenguaje de sucesiones, la pregunta sería si, dada una sucesión  $\{y_n\}$ , de ser  $\{y_{n+1} - y_n\} \rightarrow 0$  podemos o no deducir que  $\{y_n\}$  sea convergente. He aquí una pregunta sobre sucesiones, que hasta ahora no nos habíamos planteado, pero que surge de forma muy natural al estudiar las series. Vamos a ver enseguida, con un ejemplo importante, que la respuesta es negativa.

## 9.2. Primeros ejemplos de series

La serie  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$  recibe el nombre de *serie armónica* y se denota también por  $\{H_n\}$ :

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Obsérvese que la serie armónica es una sucesión algo complicada, calcular explícitamente la  $n$ -ésima suma parcial  $H_n$ , para valores grandes de  $n$ , es laborioso, y no disponemos de una expresión cómoda que nos permita decidir fácilmente si la serie converge o no. Sin embargo, el término general de la serie armónica es  $\{1/n\}$ , una sucesión bien sencilla que sabemos converge a cero. Pues bien, la serie armónica es un buen ejemplo de una serie no convergente, cuyo término general converge a cero:

- *La serie armónica diverge positivamente.*

La demostración se basa en la siguiente desigualdad, que comprobaremos por inducción:

$$H_{2^n} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{n}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1)$$

En efecto, para  $n = 1$  la desigualdad buscada es evidente y, supuesto que se verifica para un  $n \in \mathbb{N}$ , tenemos

$$H_{2^{n+1}} = H_{2^n} + \sum_{k=2^{n+1}}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{n}{2} + 2^n \frac{1}{2^{n+1}} = 1 + \frac{n+1}{2}$$

donde, para  $2^n + 1 \leq k \leq 2^{n+1}$ , hemos usado que  $1/k \geq 1/2^{n+1}$ . De (1) se deduce claramente que la sucesión  $\{H_{2^n}\}$  no está mayorada, luego  $\{H_n\}$  tampoco lo está. Como  $\{H_n\}$  es una sucesión creciente y no mayorada, tenemos  $\{H_n\} \rightarrow +\infty$ , como queríamos. ■

Como primer ejemplo de serie convergente, aunque sea bastante trivial, merece la pena ver que toda suma finita puede verse como suma de una serie. Dados  $p \in \mathbb{N}$  y  $x_1, x_2, \dots, x_p \in \mathbb{R}$ , consideremos la serie  $\{S_n\} = \sum_{n \geq 1} x_n$ , donde  $x_n = 0$  para  $n > p$ . Entonces, para  $n \geq p$  se tiene obviamente  $S_n = S_p$ , luego  $\{S_n\} \rightarrow S_p$ . Por tanto, la serie considerada es convergente con

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{k=1}^p x_k$$

Intuitivamente, esto es una absoluta ingenuidad: cualquier suma finita puede verse como la suma de una serie cuyos términos son todos nulos a partir de uno en adelante.

Enseguida vamos a presentar una amplia colección de series convergentes no triviales, es decir, con infinitos términos no nulos. Conviene aclarar previamente una notación que se usa a menudo para trabajar con ciertas series. Se trata solamente de considerar series cuyos términos se numeran de una forma diferente a la usada hasta ahora.

Dada una sucesión  $\{x_n\}$  tenemos la serie de término general  $\{x_n\}$ :

$$\sum_{n \geq 1} x_n = \left\{ \sum_{k=1}^n x_k \right\} = \{S_n\} \quad (1)$$

Pero fijado  $x_0 \in \mathbb{R}$ , nos puede interesar que las sumas parciales arranquen con  $x_0$  como primer sumando, en lugar de  $x_1$ . Para ello, denotamos por  $\sum_{n \geq 0} x_n$  a la serie  $\sum_{n \geq 1} x_{n-1}$ , explícitamente:

$$\sum_{n \geq 0} x_n = \sum_{n \geq 1} x_{n-1} = \left\{ \sum_{k=1}^n x_{k-1} \right\} = \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} x_k \right\} = \{\tilde{S}_n\} \quad (2)$$

Caso de que esta serie sea convergente, su suma se denotará por  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_{n-1}$ .

Obviamente las series que aparecen en (1) y (2) son distintas, pero conviene resaltar que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , la  $n$ -ésima suma parcial de ambas series involucra  $n$  sumandos. Además, tenemos claramente  $\tilde{S}_{n+1} = x_0 + S_n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , luego la convergencia de la sucesión  $\{S_n\}$  equivale a la de  $\{\tilde{S}_{n+1}\}$ , que a su vez equivale a la de  $\{\tilde{S}_n\}$ , en cuyo caso está clara la relación entre las sumas de ambas series:

- Sea  $x_n \in \mathbb{R}$  para todo  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Entonces la serie  $\sum_{n \geq 0} x_n$  converge si, y sólo si, la serie  $\sum_{n \geq 1} x_n$  converge, en cuyo caso se tiene:  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ .

Pues bien, dado  $x \in \mathbb{R}$ , la serie  $\sum_{n \geq 0} x^n = \sum_{n \geq 1} x^{n-1}$  recibe el nombre de *serie geométrica* de razón  $x$ . Su término general es la sucesión  $\{x^{n-1}\}$  que sabemos converge a cero si, y sólo si,  $|x| < 1$ . Deducimos que, si la serie geométrica de razón  $x$  es convergente, se ha de tener  $|x| < 1$ . En este caso, el recíproco también es cierto:

- Para  $x \in \mathbb{R}$  con  $|x| < 1$ , la serie geométrica de razón  $x$  es convergente, con

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Para comprobarlo, fijado  $x \in \mathbb{R}$  con  $|x| < 1$ , sumamos una progresión geométrica:

$$\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{x^n - 1}{x - 1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Usando ahora que  $\{x^n\} \rightarrow 0$ , obtenemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n - 1}{x - 1} = \frac{1}{1-x} \quad \blacksquare$$

Es útil considerar series cuyos términos se numeran de otras formas que aún no hemos manejado. Dada una sucesión  $\{x_n\}$  que como siempre da lugar a la serie definida en (1), en lugar de añadir un primer sumando  $x_0$  como hicimos en (2), nos puede interesar, fijado  $p \in \mathbb{N}$ , omitir los sumandos  $x_k$  con  $k \leq p$ , de forma que las sumas parciales arranquen con  $x_{p+1}$  como primer sumando. Para ello, denotamos por  $\sum_{n \geq p+1} x_n$  a la serie  $\sum_{n \geq 1} x_{p+n}$ , más explícitamente:

$$\sum_{n \geq p+1} x_n = \sum_{n \geq 1} x_{p+n} = \left\{ \sum_{k=1}^n x_{p+k} \right\} = \left\{ \sum_{k=p+1}^{p+n} x_k \right\} = \{\hat{S}_n\} \quad (3)$$

Caso de que esta serie sea convergente, su suma se denotará por  $\sum_{n=p+1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_{p+n}$ .

Nótese que, de nuevo, para cada  $n \in \mathbb{N}$  la  $n$ -ésima suma parcial  $\widehat{S}_n$  de la serie definida en (3) involucra  $n$  sumandos. Además, tenemos claramente

$$S_{p+n} = \sum_{k=1}^{p+n} x_k = \sum_{k=1}^p x_k + \sum_{k=p+1}^{p+n} x_k = \sum_{k=1}^p x_k + \widehat{S}_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

de donde deducimos claramente lo siguiente:

- Para toda sucesión  $\{x_n\}$ , y todo  $p \in \mathbb{N}$ , se tiene que la serie  $\sum_{n \geq p+1} x_n$  converge si y sólo si, la serie  $\sum_{n \geq 1} x_n$  converge, en cuyo caso se tiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{k=1}^p x_k + \sum_{n=p+1}^{\infty} x_n \quad (4)$$

Dicho intuitivamente, cualquiera que sea  $p \in \mathbb{N}$ , al suprimir los primeros  $p$  sumandos de una serie, obtenemos otra, cuya convergencia equivale a la de la serie de partida, y cuando ambas series convergen, sus sumas guardan la relación que cabía esperar, pues la igualdad (4) puede entenderse como una especie de propiedad “asociativa” de la suma de una serie.

Para entender la utilidad que puede tener usar series cuyos términos aparecen numerados de muy diversas formas, conviene insistir en lo recién comprobado. Sea pues  $\sum_{n \geq 1} x_n = \{S_n\}$  una serie convergente y denotemos por  $S$  a su suma. Hemos visto que entonces, la serie  $\sum_{n \geq p+1} x_n$  es convergente para todo  $p \in \mathbb{N}$  y (4) nos dice que

$$S - S_p = \sum_{k=p+1}^{\infty} x_k \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

El primer miembro de esta igualdad puede interpretarse como el error que se comete al tomar la  $p$ -ésima suma parcial de una serie como valor aproximado de la suma de la serie, y vemos que dicho error se expresa a su vez como la suma de otra serie. Por definición de la suma de una serie, sabemos que  $S = \lim_{p \rightarrow \infty} S_p$ , luego podemos conseguir que dicho error sea tan pequeño como queramos, sin más que tomar  $p$  suficientemente grande. Esto no es nada nuevo, pero tener la diferencia  $S - S_p$  expresada como la suma de una serie, permite con frecuencia resolver un problema práctico importante: saber cómo de grande debemos tomar  $p$  para asegurarnos que el error se mantenga dentro de un margen prefijado.

En otro orden de ideas, conviene comentar que, aunque la igualdad (4) requiere obviamente que  $x_n$  esté bien definido para todo  $n \in \mathbb{N}$ , la serie  $\sum_{n \geq p+1} x_n$  no involucra los valores de  $x_n$  para  $n \leq p$ , así que podemos estudiar su convergencia y, cuando sea posible, considerar su suma, sin concretar esos valores. A veces, damos una definición genérica de  $x_n$  que no tiene sentido para  $n \leq p$ , sin que ello cause ningún problema.

Por ejemplo, podemos considerar la serie

$$\sum_{n \geq 3} x_n = \sum_{n \geq 3} \frac{1}{(n-2)(n-1)}$$

a pesar de que  $x_n$  no tiene sentido para  $n = 1, 2$ . Como en este caso  $p = 2$ , tenemos

$$\sum_{n \geq 3} x_n = \sum_{n \geq 1} x_{n+2} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$$

serie que no ofrece ninguna dificultad. Ya que ha aparecido, vamos a ver que esta serie es convergente y calculamos su suma. Para ello, observamos que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

luego la serie considerada es convergente y podemos escribir

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-2)(n-1)}$$

La gama de series convergentes que hasta ahora conocemos puede ampliarse un poco con una sencilla observación:

- Sean  $\sum_{n \geq 1} x_n, \sum_{n \geq 1} y_n$  series convergentes y  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Entonces la serie  $\sum_{n \geq 1} (\alpha x_n + \beta y_n)$  es convergente con

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} y_n$$

La comprobación de este hecho es inmediata. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , escribimos

$$X_n = \sum_{k=1}^n x_k, \quad Y_n = \sum_{k=1}^n y_k, \quad Z_n = \sum_{k=1}^n (\alpha x_k + \beta y_k) = \alpha X_n + \beta Y_n$$

Por hipótesis las sucesiones  $\{X_n\}$  e  $\{Y_n\}$  son convergentes, luego  $\{Z_n\}$  converge y

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha x_n + \beta y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} X_n + \beta \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} y_n \quad \blacksquare$$

En particular, si  $\sum_{n \geq 1} x_n$  es convergente y  $\alpha \in \mathbb{R}$ , la serie  $\sum_{n \geq 1} \alpha x_n$  es convergente con

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha x_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

igualdad que se interpreta como una propiedad distributiva del producto de números reales con respecto a la suma de una serie.

Tomando  $\alpha = \beta = 1$ , la igualdad

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_n$$

nos da otra especie de “asociatividad” y “conmutatividad” de la suma de una serie.

Consideremos por ejemplo la serie  $\sum_{n \geq 1} \frac{2^{n-1} + 3^{n+1}}{5^n}$ . Usando el último resultado, esta serie es convergente y su suma viene dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} + 3^{n+1}}{5^n} = \frac{1}{5} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} + \frac{9}{5} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} = \frac{29}{6}$$

### 9.3. Ejercicios

- Sean  $\{x_n\}$  e  $\{y_n\}$  sucesiones de números reales verificando que existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que, para  $n > p$  se tiene  $x_n = y_n$ . Probar que la convergencia de  $\sum_{n \geq 1} x_n$  equivale a la de  $\sum_{n \geq 1} y_n$ .

En caso de que haya convergencia, explicar la relación entre las sumas de ambas series.

- Probar que la sucesión  $\left\{ \frac{(-1)^n n^2}{n^2 + 3n + 2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{2^{k+1}}{3^{k-1}} \right\}$  es convergente y calcular su límite.
- Supongamos que la serie  $\sum_{n \geq 1} (x_n + y_n)$  es convergente. ¿Qué se puede afirmar sobre la convergencia de las series  $\sum_{n \geq 1} x_n$  y  $\sum_{n \geq 1} y_n$ ?

- Probar que las siguientes series convergen y calcular sus sumas:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \sum_{n \geq 1} \frac{3n+4}{n^3+3n^2+2n} & \text{(b)} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+n\sqrt{n+1}}} \\ \text{(c)} \sum_{n \geq 2} \frac{4n+2}{n^3-n} & \text{(d)} \sum_{n \geq 3} \frac{3n^2+3n+1}{n(n+1)^3\sqrt{n+n^3(n+1)\sqrt{n+1}}} \end{array}$$

- Dados  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  y  $x \in \mathbb{R}^*$ , estudiar la convergencia de la serie  $\sum_{n \geq 0} \frac{\alpha x^{2n} + \beta}{x^n}$  y, cuando sea convergente, calcular su suma.