

Convergencia absoluta y series alternadas

Una vez que disponemos de diversos criterios de convergencia para series de términos no negativos, abordamos el estudio de la convergencia de series de números reales cualesquiera. Introducimos para ello la noción de convergencia absoluta y, usando el teorema de complitud de $\mathbb{R}$, probamos que toda serie absolutamente convergente es convergente. El recíproco no es cierto y para probarlo estudiamos las series alternadas, así llamadas porque el signo de sus términos va alternando. Presentamos un criterio de convergencia muy útil para el estudio de este tipo de series, el criterio de Leibniz, que permite mostrar abundantes ejemplos de series convergentes que no son absolutamente convergentes. Finalmente abordamos la pregunta de si la convergencia de una serie se conserva al permutar sus términos, lo que nos lleva a la noción de convergencia incondicional, que resulta ser equivalente a la convergencia absoluta.

11.1. Convergencia absoluta

Nos planteamos ya el problema general de estudiar la convergencia de cualquier serie $\sum_{n \geq 1} x_n$ de números reales. Si el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n < 0\}$ es finito, considerando la serie $\sum_{n \geq m} x_n$ para conveniente $m \in \mathbb{N}$, podemos aplicar los criterios de convergencia para series de términos no negativos que ya conocemos. Por otra parte, si es finito el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n > 0\}$, la observación anterior se aplica a la serie $\sum_{n \geq 1} (-x_n)$ cuya convergencia equivale como sabemos a la de $\sum_{n \geq 1} x_n$. Por tanto, nos interesa ahora el caso en que ambos conjuntos mencionados son infinitos, dicho de manera intuitiva, queremos estudiar las series “con infinitos términos positivos e infinitos términos negativos”. La estrategia inicial será considerar la serie de valores absolutos $\sum_{n \geq 1} |x_n|$, que es siempre una serie de términos no negativos.

Se dice que una serie de números reales $\sum_{n \geq 1} x_n$ es *absolutamente convergente* cuando la serie $\sum_{n \geq 1} |x_n|$ es convergente.

Por ejemplo, puesto que para $x \in \mathbb{R}$ se tiene $\sum_{n \geq 0} |x^n| = \sum_{n \geq 0} |x|^n$, la serie geométrica de razón x converge absolutamente si, y sólo si, $|x| < 1$. Así pues, para las series geométricas, convergencia y convergencia absoluta son nociones equivalentes.

En general, como la nomenclatura sugiere, la convergencia absoluta de una serie implica su convergencia. Este hecho es una consecuencia directa del teorema de complitud de $\mathbb{R}$:

Teorema. *Toda serie absolutamente convergente es convergente. Más concretamente, dada una sucesión $\{x_n\}$ de números reales, si la serie $\sum_{n \geq 1} |x_n|$ es convergente, entonces $\sum_{n \geq 1} x_n$ también es convergente y se verifica que*

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \quad (1)$$

Demostración. Consideremos las sumas parciales de ambas series:

$$S_n = \sum_{k=1}^n x_k \quad \text{y} \quad \sigma_n = \sum_{k=1}^n |x_k| \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Sean $p, q \in \mathbb{N}$ y supongamos de momento que $q < p$. Tenemos claramente

$$|S_p - S_q| = \left| \sum_{k=q+1}^p x_k \right| \leq \sum_{k=q+1}^p |x_k| = \sigma_p - \sigma_q = |\sigma_p - \sigma_q|$$

La desigualdad así obtenida es obvia cuando $p = q$ y no se altera al intercambiar p y q , luego es válida para cualesquiera $p, q \in \mathbb{N}$.

Por hipótesis, $\{\sigma_n\}$ es convergente, luego es una sucesión de Cauchy: para cada $\varepsilon > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $p, q \geq m$ se tiene $|\sigma_p - \sigma_q| < \varepsilon$. La desigualdad recién probada nos dice que para $p, q \geq m$ tendremos $|S_p - S_q| < \varepsilon$, luego $\{S_n\}$ también es una sucesión de Cauchy. El teorema de complitud de $\mathbb{R}$ nos asegura que $\{S_n\}$ es convergente, como queríamos.

Para obtener la desigualdad (1), pongamos $S = \sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$. Sabemos entonces que $\{|S_n|\} \rightarrow |S|$, pero es claro que $|S_n| \leq \sigma_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right| = |S| = \lim_{n \rightarrow \infty} |S_n| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \quad \blacksquare$$

Obsérvese que, una vez más, la suma de una serie se comporta como si se tratase de una suma finita. Según (1), el valor absoluto de la suma de una serie absolutamente convergente es menor o igual que la suma de la serie de los valores absolutos de sus términos.

El recíproco del teorema anterior no es cierto, enseguida veremos abundantes ejemplos de series convergentes que no convergen absolutamente.

11.2. Series alternadas

Volviendo en cierto modo a los comentarios hechos al principio, si queremos que una serie $\sum_{n \geq 1} x_n$ converja sin hacerlo absolutamente, los conjuntos $\{n \in \mathbb{N} : x_n < 0\}$ y $\{n \in \mathbb{N} : x_n > 0\}$ habrán de ser infinitos, pues en otro caso, o bien existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n| = x_n$ para $n \geq m$, o bien existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n| = -x_n$ para $n \geq m$. En ambos casos, la convergencia de la serie $\sum_{n \geq 1} |x_n|$ equivale a la de $\sum_{n \geq 1} x_n$. Es lógico, por tanto, pensar en series cuyos términos en lugares pares sean positivos y los de lugar impar negativos, o viceversa.

Una *serie alternada* es una serie de la forma $\sum_{n \geq 1} (-1)^n a_n$, o bien de la forma $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} a_n$, donde $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por ejemplo, la serie $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ recibe el nombre de *serie armónica alternada* y está claro que esta serie no converge absolutamente. Sin embargo, es convergente, como se deduce claramente del siguiente criterio de convergencia para series alternadas.

Criterio de Leibniz. Si $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente y $\{a_n\} \rightarrow 0$, entonces la serie $\sum_{n \geq 1} (-1)^n a_n$ es convergente.

Demostración. Debemos comprobar que la sucesión $\{S_n\} = \left\{ \sum_{k=1}^n (-1)^k a_k \right\}$ es convergente.

Usando que $\{a_n\}$ es decreciente y que $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, conseguimos la siguiente cadena de desigualdades, válidas para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} S_{2n-1} &\leq S_{2n-1} + a_{2n} - a_{2n+1} = S_{2n+1} \\ &\leq S_{2n+1} + a_{2n+2} = S_{2n+2} = S_{2n} - a_{2n+1} + a_{2n+2} \leq S_{2n} \end{aligned}$$

Destacando lo que nos interesa, hemos visto que

$$S_{2n-1} \leq S_{2n+1} \leq S_{2n+2} \leq S_{2n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, la sucesión $\{S_{2n-1}\}$ es creciente y $\{S_{2n}\}$ es decreciente. Pero, como consecuencia también tenemos

$$S_1 \leq S_{2n-1} \leq S_{2n} \leq S_2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

de modo que las sucesiones $\{S_{2n-1}\}$ y $\{S_{2n}\}$ están acotadas y, por tanto, ambas convergen. Puesto que $\{S_{2n}\} = \{S_{2n-1} + a_{2n}\}$ y $\{a_{2n}\} \rightarrow 0$, deducimos que $\lim \{S_{2n}\} = \lim \{S_{2n-1}\}$, luego $\{S_n\}$ es convergente, como se quería. ■

Así pues, la serie armónica alternada es convergente, pero no absolutamente convergente. Igual le ocurre, por ejemplo a la serie $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$, para cualquier $q \in \mathbb{N}$.

11.3. Convergencia incondicional

Completamos este tema discutiendo una pregunta que tenemos planteada desde el principio del estudio de las series: ¿es prudente dejarnos llevar por la intuición e interpretar la suma de una serie convergente como la suma de “todos” los términos de una sucesión?

Hemos visto en algún caso que la suma de una serie tiene propiedades análogas a las de una suma finita. Por ejemplo, hemos visto ciertas formas de distributividad y de asociatividad. Vamos a preguntarnos ahora por la posible conmutatividad, en un sentido muy general, de la suma de una serie. Si tal propiedad fuese cierta, al permutar de cualquier forma los sumandos, la convergencia de la serie debería mantenerse y la suma de la serie debería seguir siendo la misma. Vamos a comentar algunos resultados acerca de esta cuestión, aunque sin incluir todas las demostraciones. Empezamos planteando el problema con precisión.

En general una *permutación* de los elementos de un conjunto es una aplicación biyectiva del conjunto en sí mismo. Así pues, una *permutación de los números naturales* será una aplicación biyectiva $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Dada una sucesión de números reales $\{x_n\}$, usando una permutación π de los números naturales, podemos formar la sucesión $\{x_{\pi(n)}\}$ que intuitivamente se obtiene “permutando” los términos de la sucesión $\{x_n\}$.

Pues bien, si la serie $\sum_{n \geq 1} x_n$ es convergente y la suma de series tuviese la “conmutatividad” que pretendemos discutir, la serie “reordenada” $\sum_{n \geq 1} x_{\pi(n)}$ debería ser convergente y tener la misma suma que la serie de partida. En principio esto no está nada claro, ya que la relación entre las sumas parciales de ambas series no es sencilla.

Se dice que una serie de números reales $\sum_{n \geq 1} x_n$ es *incondicionalmente convergente* cuando, para cualquier permutación π de los números naturales, la serie $\sum_{n \geq 1} x_{\pi(n)}$ es convergente. Para resaltar la relación con la conmutatividad de la suma, se dice algunas veces que estas series son *conmutativamente* convergentes. Según la motivación anterior, deberíamos también exigir que la serie reordenada tenga la misma suma que la de partida, pero acabaremos viendo que esto ocurre automáticamente: cuando una serie converge incondicionalmente, la suma de la serie no depende de la reordenación que podamos considerar.

Es claro que toda serie incondicionalmente convergente es convergente, pues basta tomar $\pi(n) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para series de términos no negativos, vamos a ver que el recíproco también es cierto, obteniendo abundantes ejemplos de series incondicionalmente convergentes.

- *Toda serie convergente de términos no negativos es incondicionalmente convergente. De forma más concreta, si $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y la serie $\sum_{n \geq 1} a_n$ es convergente, para cualquier permutación π de los números naturales, se tiene que la serie $\sum_{n \geq 1} a_{\pi(n)}$ es convergente, verificándose además que $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

Considerando las sumas parciales de ambas series,

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k \quad \text{y} \quad T_n = \sum_{k=1}^n a_{\pi(k)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

aprovecharemos, como siempre que trabajamos con series de términos no negativos, que las sucesiones $\{S_n\}$ y $\{T_n\}$ son crecientes.

Por hipótesis $\{S_n\}$ es convergente, sea $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sup \{S_n : n \in \mathbb{N}\}$. Bastará probar que $\{T_n\}$ también está mayorada y que $S = \sup \{T_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Ahora bien, fijado $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $\{\pi(k) : k \leq n\}$ es finito, luego tendrá máximo, sea $p_n = \max \{\pi(k) : k \leq n\}$. Usando que $a_k \geq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, tenemos claramente

$$T_n = \sum_{k=1}^n a_{\pi(k)} \leq \sum_{k=1}^{p_n} a_k = S_{p_n} \leq S$$

La desigualdad así obtenida es válida para todo $n \in \mathbb{N}$ y demuestra ya que la sucesión $\{T_n\}$ está mayorada, luego la serie $\sum_{n \geq 1} a_{\pi(n)}$ es convergente. Pero la misma desigualdad también nos permite concluir que $\sup \{T_n : n \in \mathbb{N}\} \leq S$, es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Para obtener la otra desigualdad basta observar la simetría de la situación: la serie de partida $\sum_{n \geq 1} a_n$ también se obtiene reordenando la serie $\sum_{n \geq 1} a_{\pi(n)}$. Más concretamente, como sabemos ya que la serie de términos no negativos $\sum_{n \geq 1} b_n = \sum_{n \geq 1} a_{\pi(n)}$ es convergente, podemos aplicarle lo demostrado para $\sum_{n \geq 1} a_n$, pero usando π^{-1} , que también es una permutación de los números naturales, y obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \geq \sum_{n=1}^{\infty} b_{\pi^{-1}(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(\pi^{-1}(n))} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \blacksquare$$

Así pues, las cosas han empezado bastante bien, las series convergentes de términos no negativos verifican el tipo de conmutatividad que estamos estudiando, de forma completamente satisfactoria. Pero podemos ahora obtener fácilmente un resultado aún mejor:

■ *Toda serie absolutamente convergente es incondicionalmente convergente.*

Para probarlo, sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales tal que la serie $\sum_{n \geq 1} |x_n|$ es convergente y sea π cualquier permutación de los números naturales. El resultado anterior nos dice que la serie $\sum_{n \geq 1} |x_{\pi(n)}|$ es convergente, es decir, la serie $\sum_{n \geq 1} x_{\pi(n)}$ es absolutamente convergente, luego convergente. ■

Comparando los dos resultados anteriores, vemos que el primero afirma algo que no aparece en el segundo: la suma de la serie no depende de la reordenación que consideremos. Para tener la misma información en el segundo caso (más general) aprovechamos un sencillo artificio que será útil en otros contextos y que pasamos a explicar.

A cada número real x asociamos dos números no negativos, x^+ y x^- , como sigue:

$$x^+ = \frac{|x| + x}{2} = \max\{x, 0\} = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$x^- = \frac{|x| - x}{2} = -\min\{x, 0\} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Es evidente que, para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene:

$$x^+ \geq 0; \quad x^- \geq 0; \quad x^+ - x^- = x; \quad x^+ + x^- = |x|; \quad x^+ x^- = 0$$

Pasamos ya a obtener el resultado que habíamos previsto:

- Si la serie $\sum_{n \geq 1} x_n$ es absolutamente convergente, para toda permutación π de los números

$$\text{naturales, se tiene que } \sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

Para probarlo, consideremos las series $\sum_{n \geq 1} x_n^+$ y $\sum_{n \geq 1} x_n^-$. Como $0 \leq x_n^+ \leq |x_n|$ y $0 \leq x_n^- \leq |x_n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, el criterio de comparación nos dice que ambas series de términos no negativos son convergentes, luego son incondicionalmente convergentes y su suma no se altera al permutar sus términos. Concluimos entonces que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} x_n &= \sum_{n=1}^{\infty} (x_n^+ - x_n^-) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} x_n^- \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}^+ - \sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}^- = \sum_{n=1}^{\infty} (x_{\pi(n)}^+ - x_{\pi(n)}^-) = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)} \end{aligned}$$

como queríamos demostrar. ■

Para completar nuestra discusión acerca de la posible conmutatividad de las sumas de series, veremos que, recíprocamente a lo que ya sabemos, la convergencia incondicional de una serie implica su convergencia absoluta, con lo que ambos tipos de convergencia son equivalentes. Así pues, cuando una serie converge, pero no lo hace absolutamente, como le ocurría por ejemplo a la serie armónica alternada, su convergencia no es incondicional, podemos reordenarla para obtener una serie que no converge. Lo que es aún peor, incluso para las reordenaciones que den lugar a series convergentes, la suma de la serie puede variar, dependiendo de la permutación de los números naturales que usemos. Este resultado, que no vamos a demostrar, se debe al matemático alemán Bernhard Riemann (1826-1866) y puede enunciarse como sigue.

Teorema de Riemann. *Toda serie de números reales incondicionalmente convergente es absolutamente convergente.*

Además, si una serie $\sum_{n \geq 1} x_n$ converge pero no lo hace absolutamente, para cada $x \in \mathbb{R}$ se puede encontrar una permutación π de los números naturales tal que $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)} = x$.

Podría hacerse un estudio de la asociatividad para la suma de una serie convergente, análogo al que hemos hecho para la conmutatividad, llegando a una conclusión similar: cuando una serie converge absolutamente, se puede decir que la suma de la serie verifica tal asociatividad en un sentido muy general, pero cuando la convergencia no es absoluta las cosas se complican.

Como conclusión genérica, podemos decir que si la serie de término general $\{x_n\}$ converge absolutamente, está justificado pensar que la suma de la serie responde a la idea intuitiva de sumar todos los términos de la sucesión $\{x_n\}$, de hecho se dice en este caso que la sucesión $\{x_n\}$ es *sumable*. Ello se aplica en particular a las series convergentes de términos no negativos. Sin embargo, cuando la serie de término general $\{x_n\}$ es convergente, pero no absolutamente convergente, esa idea intuitiva, aunque siga siendo útil, debe manejarse con precaución.

11.4. Ejercicios de revisión

1. Sea $\sum_{n \geq 1} x_n$ una serie absolutamente convergente y $\{x_{\sigma(n)}\}$ una sucesión parcial de $\{x_n\}$.

Probar que la serie $\sum_{n \geq 1} x_{\sigma(n)}$ es convergente. Suponiendo sólo que $\sum_{n \geq 1} x_n$ es convergente,

¿se puede asegurar que $\sum_{n \geq 1} x_{\sigma(n)}$ también converge?

2. Dado $x \in \mathbb{R}$, estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{x^n + n^2}$

3. Estudiar la convergencia y la convergencia absoluta de las siguientes series:

$$(a) \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n n}{n^2 + 1} \quad (b) \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

4. Supongamos que una serie $\sum_{n \geq 1} x_n$ converge pero no lo hace absolutamente. ¿Qué se puede afirmar sobre las series $\sum_{n \geq 1} x_n^+$ y $\sum_{n \geq 1} x_n^-$?