Análisis Matemático II

Soluciones a los ejercicios del tema 14

1. En cada uno de los siguientes casos, probar que la función f es integrable en el conjunto A y calcular su integral:

a) $A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 > 1 \,, \quad y > 0 \right\}$

$f(x,y) = \dfrac{x+y}{\left(x^2 + y^2\right)^{\alpha}} \qquad \forall\,(x,y) \in A \qquad (\alpha \in \mathbb{R}\,, \quad \alpha > 3/2)$

b) $A = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 < x^2 + y^2 < 1 \,, \quad z > 1 \right\}$

$f(x,y,z) = z^{\alpha} \left(x^2 + y^2\right)^{\beta} \quad \forall\,(x,y,z) \in A \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}\,, \quad \alpha < -1 < \beta)$

c) $A = \left\{ (x,y,z) \in (\mathbb{R}^+)^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 > 1 \right\}$

$f(x,y,z) = \dfrac{x\,y\,z}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^4} \qquad \forall\,(x,y,z) \in A$

Solución

a) El conjunto A es abierto, luego medible, y la función f también es medible, por ser continua. Para estudiar su integrabilidad usamos el cambio de variable a coordenadas polares. Para

$$x = \rho \cos\theta\,, \quad y = \rho \operatorname{sen}\theta \quad \text{con} \quad \rho \in \mathbb{R}^+\,, \quad \theta \in]-\pi\,, \pi[$$

se tiene $x^2 + y^2 = \rho^2$ luego la condición $x^2 + y^2 > 1$ equivale a $\rho > 1$ mientras que $y > 0$ si, y sólo si, $\operatorname{sen}\theta > 0$ lo que equivale a $0 < \theta < \pi$. Por tanto, el conjunto de las coordenadas polares de puntos de A viene dado por $E =]1\,, +\infty[\times]0\,, \pi[$, y debemos considerar la función $g : E \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(\rho\,, \theta) = \rho\, f(\rho \cos\theta\,, \rho \operatorname{sen}\theta) = \frac{\rho^2\,(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)}{\rho^{2\alpha}} \qquad \forall\,(\rho\,, \theta) \in E$$

Usando el teorema de Tonelli, comprobamos que $g \in \mathcal{L}_1(E)$, ya que

$$\begin{aligned}\int_E |\,g(\rho,\theta)\,|\, d(\rho,\theta) &\le 2 \int_E \rho^{2-2\alpha}\, d(\rho,\theta) = 2 \int_0^{\pi} \left(\int_1^{+\infty} \rho^{2-2\alpha}\, d\rho \right) d\theta \\ &= 2\pi \left[\frac{\rho^{3-2\alpha}}{3-2\alpha} \right]_1^{+\infty} = \frac{2\pi}{2\alpha - 3} < \infty\end{aligned}$$

El teorema de cambio de variable nos dice que $f \in \mathcal{L}_1(A)$ y que la integral de f sobre A coincide con la de g sobre E, que calculamos usando el teorema de Fubini:

$$\begin{aligned}\int_A f(x,y)\,d(x,y) &= \int_E g(\rho,\theta)\,d(\rho,\theta) = \int_E \rho^{2-2\alpha}(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)\,d(\rho,\theta) \\ &= \int_0^{\pi}\left(\int_1^{+\infty}\rho^{2-2\alpha}\,d\rho\right)(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)\,d\theta \\ &= \frac{1}{2\alpha-3}\int_0^{\pi}(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)\,d\theta = \frac{2}{2\alpha-3}\end{aligned}$$

■

b) El conjunto A es abierto, luego medible, y la función f es continua y no toma valores negativos, luego es una función medible positiva. Para calcular su integral se usará el cambio de variable a coordenadas cilíndricas.

De nuevo, la condición $0 < x^2 + y^2 < 1$ equivale a $\rho < 1$ y, teniendo en cuenta la condición $z > 1$, vemos que el conjunto de las coordenadas cilíndricas de puntos de A viene dado por

$$E =]\,0\,,\,1\,[\,\times\,]-\pi\,,\,\pi\,[\,\times\,]\,1\,,\,+\infty\,[$$

en el que debemos considerar la función $g : E \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(\rho\,,\,\theta\,,\,z) = \rho\, f(\rho\cos\theta\,,\,\rho\operatorname{sen}\theta\,,\,z) = z^{\alpha}\rho^{2\beta+1} \qquad \forall\,(\rho\,,\,\theta\,,\,z) \in E$$

El teorema de cambio de variable para funciones medibles positivas, junto con el de Tonelli, nos dicen que

$$\begin{aligned}\int_A f(x,y,z)\,d(x,y,z) &= \int_E g(\rho,\theta,z)\,d(\rho,\theta,z) = \int_E z^{\alpha}\rho^{2\beta+1}\,d(\rho,\theta,z) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^1 \rho^{2\beta+1}\left(\int_1^{+\infty} z^{\alpha}\,dz\right)d\rho\right)d\theta \\ &= 2\pi\left[\frac{z^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_1^{+\infty}\left[\frac{\rho^{2\beta+2}}{2\beta+2}\right]_0^1 = -\frac{\pi}{(\alpha+1)(\beta+1)}\end{aligned}$$

y esto prueba en particular que $f \in \mathcal{L}_1(A)$. ■

c) De nuevo el conjunto A es abierto, luego medible, y la función f es continua y no toma valores negativos, luego es una función medible positiva. Para calcular su integral usamos el cambio de variable a coordenadas esféricas. Para

$$x = r\cos\theta\cos\varphi, \quad y = r\operatorname{sen}\theta\cos\varphi, \quad z = r\operatorname{sen}\varphi$$

con $r \in \mathbb{R}^+$, $\theta \in]-\pi\,,\,\pi\,[$ y $\varphi \in]-\pi/2\,,\,\pi/2\,[$, la condición $x^2+y^2+z^2 > 1$ equivale a $r > 1$, mientras que $z > 0$ si, y sólo si, $0 < \varphi < \pi/2$. Finalmente, las otras dos condiciones $x > 0$ e $y > 0$ se traducen en $\cos\theta > 0$ y $\operatorname{sen}\theta > 0$, luego se cumplen si, y sólo si $0 < \theta < \pi/2$. En resumen, vemos que el conjunto de las coordenadas esféricas de puntos de A viene dado por

$$E =]\,1\,,\,+\infty\,[\,\times\,]\,0\,,\,\pi/2\,[\,\times\,]\,0\,,\,\pi/2\,[$$

Además, debemos considerar la función $g : E \to \mathbb{R}$ definida por

$$\begin{aligned} g\big(r\,,\,\theta\,,\,\varphi\big) \;&=\; r^{\,2}\;\cos\varphi\; f\big(r\,\cos\theta\,\cos\varphi\,,\,r\,\operatorname{sen}\theta\,\cos\varphi\,,\,r\,\operatorname{sen}\varphi) \\ &=\; \frac{\cos\theta\;\operatorname{sen}\theta\;\cos^3\varphi\;\operatorname{sen}\varphi}{r^{\,3}} \qquad \forall\,\big(r\,,\,\theta\,,\,\varphi\big)\in E \end{aligned}$$

Usando el teorema de Tonelli y la regla de Barrow, obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_E g \;&=\; \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{\pi/2}\left(\int_1^{+\infty}\frac{\cos\theta\,\operatorname{sen}\theta\,\cos^3\varphi\,\operatorname{sen}\varphi}{r^{\,3}}\,dr\right)d\,\theta\right)d\,\varphi \\ &=\; \left(\int_1^{+\infty}\frac{dr}{r^{\,3}}\right)\left(\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,\operatorname{sen}\theta\,d\theta\right)\left(\int_0^{\pi/2}\cos^3\varphi\,\operatorname{sen}\varphi\,d\varphi\right) \\ &=\; \left[-\frac{1}{2\,r^{\,2}}\right]_1^{+\infty}\;\left[\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2}\;\left[-\frac{\cos^4\varphi}{4}\right]_0^{\pi/2} \;=\; \frac{1}{16} \end{aligned}$$

Así pues, usando el teorema de cambio de variable, obtenemos

$$\int_A f(x,y,z)\,d(x,y,z) \;=\; \int_E g(r,\theta,\varphi)\,d(r,\theta,\varphi) \;=\; \frac{1}{16}$$

y en particular hemos probado que $f\in\mathcal{L}_1(A)$. ■

2. En cada uno de los siguientes casos, estudiar la integrabilidad de la función f en el conjunto A:

a) $A \;=\; \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\,,\qquad f(x,y)\;=\;\dfrac{\operatorname{sen}x\;\operatorname{sen}y}{\big(x^{\,2}\,+\,y^{\,2}\big)^{3/2}}\quad\forall\,(x,y)\in A$

b) $A\;=\;\big\{\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\;:\;z\;>\;x^{\,2}+y^{\,2}\,\big\}$
$f(x,y,z)\;=\;\big(x^{\,3}\,+\,y^{\,3}\big)\,\cos\,(x\,y)\,e^{-z}\qquad\forall\,(x,y,z)\in A$

c) $A\;=\mathbb{R}^3,\quad f(x,y,z)\;=\;\dfrac{1}{\big(1\,+\,x^{\,2}\,+\,y^{\,2}\,+\,z^{\,2}\big)^{\alpha}}\quad\forall\,(x,y,z)\in A\quad(\alpha\in\mathbb{R}^+)$

Solución

a) Descomponemos el conjunto A en la forma $E\;=\;A_1\biguplus A_2$ donde

$$A_1=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,x^{\,2}+y^{\,2}\geq 1\big\}\quad\text{ y }\quad A_2=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,0<x^{\,2}+y^{\,2}<1\big\}$$

ambos conjuntos medibles, pues de hecho A_1 es cerrado y A_2 es abierto. Estudiaremos por separado la integrabilidad de f en A_1 y A_2. Para el primero se tiene claramente

$$|\,f(x,y)\,|\;\leq\;\frac{1}{\big(x^{\,2}+y^{\,2}\big)^{3/2}}\qquad\forall\,(x,y)\in A_1$$

Usamos un cambio de variable a coordenadas polares, considerando el conjunto

$$E_1 \, = \, [\, 1 \, , \, +\infty \, [\, \times \,] - \pi \, , \, \pi \, [$$

que es el conjunto de las coordenadas polares de los puntos de A_1

El teorema de cambio de variable para funciones medibles positivas, junto con el teorema de Tonelli nos dicen que

$$\begin{aligned} \int_{A_1} f \, \leq \, \int_{A_1} \frac{d(x,y)}{\left(x^2 + y^2\right)^{3/2}} \, &= \, \int_{E_1} \frac{d(\rho,\theta)}{\rho^2} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_1^{+\infty} \frac{d\,\rho}{\rho^2} \right) d\,\theta \, = \, 2\,\pi \left[-\frac{1}{\rho} \right]_1^{+\infty} \, = \, 2\,\pi \, < \, \infty \end{aligned}$$

Para trabajar en el conjunto A_2 usamos una acotación diferente. Del teorema del valor medio se deduce que $|\operatorname{sen} t\,| \, \leq \, |\,t\,|$ para todo $t \in \mathbb{R}$, y obtenemos que

$$|\,f(x,y)\,| \, \leq \, \frac{|\,x\,y\,|}{\left(x^2 + y^2\right)^{3/2}} \qquad \forall\,(x,y) \in A_2$$

Usamos de nuevo el cambio de variable a coordenadas polares, considerando el conjunto

$$E_2 \, =]\, 0, 1 \, [\, \times \,] - \pi \, , \, \pi \, [$$

que es el conjunto de las coordenadas polares de puntos de A_2 .

El teorema de cambio de variable para funciones medibles positivas, junto con una obvia desigualdad nos dicen ahora que

$$\begin{aligned} \int_{A_2} f \, \leq \, \int_{A_2} \frac{|\,x\,y\,|\,d(x,y)}{\left(x^2 + y^2\right)^{3/2}} \, &= \, \int_{E_2} \frac{\rho\,|\,\rho\,\cos\,\theta\,|\,|\,\rho\,\operatorname{sen}\,\theta\,|}{\rho^3} \, d(\rho,\theta) \\ &= \int_{E_2} |\cos\theta\,\operatorname{sen}\theta\,|\,d(\rho,\theta) \, \leq \, \int_{E_2} d(\rho,\theta) \, = \, \lambda_2(E_2) \, = \, 2\,\pi \, < \, \infty \end{aligned}$$

Hemos probado que f es integrable en A_1 y en A_2 , luego $f \in \mathcal{L}_1(A)$. ■

b) El conjunto A es abierto, luego medible y la función f también es medible, por ser continua. Para $(x,y,z) \in A$ usando las desigualdades

$$|\,x\,| \, \leq \, \sqrt{x^2 + y^2}\,, \quad |\,y\,| \, \leq \, \sqrt{x^2 + y^2}\,, \quad |\cos(x\,y)\,| \, \leq \, 1$$

obtenemos que, para todo $(x,y,z) \in A$ se tiene

$$|\,f(x,y,z)\,| \, \leq \, \left(|\,x\,|^3 \, + \, |\,y\,|^3\right) e^{-z} \, \leq \, 2\left(x^2 + y^2\right)^{3/2} e^{-z}$$

es decir, $|\,f(x,y,z)\,| \, \leq \, h(x,y,z)$, donde $h : A \to \mathbb{R}$ es la función dada por

$$h(x,y,z) \, = \, 2\left(x^2 + y^2\right)^{3/2} e^{-z} \qquad \forall\,(x,y,z) \in A$$

Vemos que h es continua y no toma valores negativos, luego es una función medible positiva. Probaremos que su integral sobre A es finita, de donde $f \in \mathcal{L}_1(A)$.

Para la integral de h, usaremos el cambio de variable a coordenadas cilíndricas. La condición $z > x^2 + y^2$ equivale obviamente a $z > \rho^2$, luego el conjunto de las coordenadas cilíndricas de puntos de A viene dado por

$$E = \left\{ (\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^+ \times]-\pi\,,\, \pi[\times \mathbb{R} \,:\, z > \rho^2 \right\}$$

y debemos considerar la función $g : E \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(\rho, \theta, \varphi) = \rho\, h(\rho \cos\theta\,,\, \rho \operatorname{sen}\theta\,,\, z) = 2\,\rho^4\, e^{-z} \qquad \forall\, (\rho, \theta, z) \in E$$

Para usar el teorema de Tonelli, observamos las secciones verticales del conjunto E. Concretamente, escribiendo $F = \mathbb{R}^+ \times]-\pi\,,\, \pi[$ se tiene

$$E_{(\rho,\theta)} =]\,\rho^2\,,\, +\infty\,[\quad \forall\, (\rho, \theta) \in F \qquad \text{y} \qquad E_{(\rho,\theta)} = \emptyset \quad \forall\, (\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 \setminus F$$

Así pues usando el teorema de cambio de variable y el de Tonelli, obtenenemos

$$\begin{aligned} \int_A h(x,y,z)\, d(x,y,z) &= \int_E g(\rho,\theta,z)\, d(\rho,\theta,z) = \int_F \left(\int_{\rho^2}^{+\infty} 2\,\rho^4\, e^{-z}\, dz \right) d(\rho,\theta) \\ &= \int_F 2\,\rho^4 \Big[-\, e^{-z} \Big]_{\rho^2}^{+\infty} d(\rho,\theta) = \int_F 2\,\rho^4\, e^{-\rho^2}\, d(\rho,\theta) \end{aligned}$$

Para estudiar esta última integral doble, volvemos a usar el teorema de Tonelli, obteniendo que:

$$\int_F 2\,\rho^4\, e^{-\rho^2}\, d(\rho,\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^{+\infty} 2\,\rho^4\, e^{-\rho^2}\, d\rho \right) d\theta = 4\,\pi \int_0^{+\infty} \rho^4\, e^{-\rho^2}\, d\rho$$

Sólo queda comprobar que esta última integral simple es finita, como haremos ahora.

Escribiendo $\phi(\rho) = \rho^4\, e^{-\rho^2}$ para todo $\rho \in \mathbb{R}_0^+$ tenemos que ϕ es localmente integrable en $\mathbb{R}_0^+$ y verifica:

$$\lim_{\rho \to +\infty} \frac{\phi(\rho)}{e^{-\rho}} = \lim_{\rho \to +\infty} \frac{\rho^4}{e^{\rho^2 - \rho}} = 0$$

donde hemos usado la escala de infinitos. Como la función $\rho \mapsto e^{-\rho}$ es integrable en $\mathbb{R}_0^+$, el criterio de comparación por paso al límite nos dice que ϕ también lo es. Resumiendo todo lo anterior, tenemos

$$\int_A |\, f(x,y,z)\,|\, d(x,y,z) \leq 4\,\pi \int_0^{+\infty} \rho^4\, e^{-\rho^2}\, d\rho < \infty$$

y hemos probado que $f \in \mathcal{L}_1(A)$. $\blacksquare$

c) Usamos el cambio de variable a coordenadas esféricas, considerando el conjunto

$$E = \mathbb{R}^+ \times]-\pi\,,\,\pi\,[\,\times\,]-\pi/2\,,\,\pi/2\,[$$

de todas las coordenadas esféricas de puntos de $\mathbb{R}^3$. Debemos también considerar la función $g : E \to \mathbb{R}$ dada por

$$\begin{aligned} g(r,\theta,\varphi) &= r^2 \cos\varphi \; f(r\,\cos\theta\,\cos\varphi\,,\, r\,\operatorname{sen}\theta\,\cos\varphi) \\ &= \frac{r^2 \cos\varphi}{(1+r^2)^\alpha} \qquad \forall\,(r,\theta,\varphi)\in E \end{aligned}$$

El teorema de cambio de variable para funciones medibles positivas, junto con el teorema de Tonelli, nos dicen que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} f &= \int_E \frac{r^2\,\cos\,\varphi\; d(r,\theta,\varphi)}{\left(1+r^2\right)^\alpha} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_0^{+\infty}\frac{r^2\,\cos\,\varphi\;dr}{\left(1+r^2\right)^\alpha}\right)d\varphi\right)d\theta \\ &= \left(\int_{-\pi}^{\pi} d\theta\right)\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\,\varphi\;d\varphi\right)\left(\int_0^{+\infty}\frac{r^2\,dr}{\left(1+r^2\right)^\alpha}\right) \\ &= 4\pi\int_0^{+\infty}\frac{r^2\,dr}{\left(1+r^2\right)^\alpha} \end{aligned}$$

Por tanto, $f\in\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^3)$ si, y sólo si, $h\in\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^+)$, donde $h(r) = r^2\left(1+r^2\right)^{-\alpha}$ para todo $r\in\mathbb{R}^+$.

Definiendo $h(0)=0$ convertimos h en una función continua, luego localmente integrable, en $\mathbb{R}_0^+$. En particular h es integrable en el intervalo $[\,0\,,\,1\,]$, luego será integrable en $\mathbb{R}^+$ si, y sólo si, lo es en $J = [\,1\,,\,+\infty\,[$. En esta nueva semirrecta podemos usar el criterio de comparación con la función $\psi : J\to\mathbb{R}$ dada por $\psi(r) = r^{2-2\alpha}$ para todo $r\in J$, que es localmente integrable y no se anula en J. Se tiene claramente que

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{|\,h(r)\,|}{|\,\psi(r)\,|} = \lim_{r\to+\infty}\frac{r^{2\alpha}}{\left(1+r^2\right)^\alpha} = 1$$

y el criterio de comparación nos dice que h es integrable en J si, y sólo si, lo es ψ, pero sabemos que esto equivale a que se tenga $2-2\alpha < -1$, es decir, $\alpha > 3/2$.

Concluimos de esta forma que $f\in\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^3)$ si, y sólo si, $\alpha > 3/2$. ■

3. Calcular el volumen de la llamada *bóveda de Viviani*:

$$B = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; (2x-1)^2 + 4y^2 \le 1\,,\;\; x^2 + y^2 + z^2 \le 1\,,\;\; z \ge 0 \right\}$$

Solución

El conjunto B es cerrado, luego medible, y tiene el mismo volumen que la subgráfica de la función $f : A \to \mathbb{R}$, donde

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; \big(2x-1\big)^2 + 4y^2 \le 1 \right\} \qquad \text{y}$$
$$f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2} \qquad \forall\,(x,y) \in A$$

ya que la diferencia entre ambos conjuntos tiene medida nula. Por tanto, se tiene

$$\lambda_3(B) = \int_A \sqrt{1-x^2-y^2}\; d(x,y)$$

Para calcular esta integral doble, usaremos el cambio de variable a coordenadas polares, por lo que deberemos encontrar el conjunto de las coordenadas polares de los puntos de A. Si $\rho \in \mathbb{R}^+$ y $\theta \in]-\pi\,,\pi\,[$, se tiene que $\big(\rho\cos\theta\,,\,\rho\operatorname{sen}\theta\big) \in A$ si, y sólo si,

$$\begin{aligned} 1 &\ge \big(2\rho\cos\theta - 1\big)^2 + 4\rho^2\operatorname{sen}^2\theta \\ &= 4\rho^2\cos^2\theta - 4\rho\cos\theta + 1 + 4\rho^2\operatorname{sen}^2\theta \\ &= 4\rho^2 - 4\rho\cos\theta + 1 = 4\rho\big(\rho - \cos\theta\big) + 1 \end{aligned}$$

lo que equivale a que se tenga $\rho \le \cos\theta$. Además, esta desigualdad sólo es posible cuando $\cos\theta \ge 0$, es decir, cuando $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$. Por tanto, el conjunto de las coordenadas polares de los puntos de A viene dado por

$$E = \left\{ (\rho,\theta) \;:\; -\pi/2 \le \theta \le \pi/2\,,\;\; 0 < \rho \le \cos\theta \right\}$$

Usando ya el teorema de cambio de variable, junto con el de Tonelli, obtenemos

$$\begin{aligned} \lambda_3(B) &= \int_A \sqrt{1-x^2-y^2}\; d(x,y) = \int_E \rho\sqrt{1-\rho^2}\; d(\rho,\theta) \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_0^{\cos\theta}\rho\sqrt{1-\rho^2}\; d\rho\right) d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[-\frac{1}{3}\big(1-\rho^2\big)^{3/2}\right]_0^{\cos\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\big(1 - |\operatorname{sen}\theta|^3\big)\, d\theta = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}|\operatorname{sen}\theta|^3\, d\theta \\ &= \frac{\pi}{3} - \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^3\theta\; d\theta = \frac{\pi}{3} - \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2}\big(1-\cos^2\theta\big)\operatorname{sen}\theta\; d\theta \\ &= \frac{\pi}{3} - \frac{2}{3}\left[\frac{\cos^3\theta}{3} - \cos\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{3\pi - 4}{9} \end{aligned}$$

■