

Análisis Matemático II

Soluciones a los ejercicios del tema 13

1. Probar que el conjunto

$$E = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \min \{ e^y, 1, e^{1-y} \} \} \subset \mathbb{R}^2$$

es medible y calcular su área.

Solución

La función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, dada por $f(y) = \min \{ e^y, 1, e^{1-y} \}$ para todo $y \in \mathbb{R}$, es continua, luego la función $(x, y) \rightarrow f(y) - x$, de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R} , también lo es. Deducimos que el conjunto

$$E = (\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}) \cap \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(y) - x \geq 0 \}$$

es cerrado, por ser intersección de dos cerrados, luego es medible. Para calcular el área de E integraremos la longitud de sus secciones horizontales.

Para todo $y \in \mathbb{R}$ se tiene claramente $E^y = [0, f(y)]$, luego $\lambda_1(E^y) = f(y)$. Por tanto, el teorema de Tonelli nos dice que

$$\lambda_2(E) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda_1(E^y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) dy$$

Para calcular esta integral observamos que

$$\begin{aligned} y \in]-\infty, 0[&\implies e^y \leq 1 \leq e^{1-y} \implies f(y) = e^y \\ y \in [0, 1] &\implies 1 \leq e^y, 1 \leq e^{1-y} \implies f(y) = 1 \\ y \in]1, +\infty[&\implies e^{1-y} \leq 1 \leq e^y \implies f(y) = e^{1-y} \end{aligned}$$

de donde deducimos que

$$\begin{aligned} \lambda_2(E) &= \int_{-\infty}^0 e^y dy + \int_0^1 1 dy + \int_1^{+\infty} e^{1-y} dy \\ &= \left[e^y \right]_{-\infty}^0 + 1 + \left[-e^{1-y} \right]_1^{+\infty} = 3 \end{aligned}$$

■

2. En cada uno de los siguientes casos, probar que la función f es integrable en Ω y calcular su integral.

$$a) \Omega = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, y^2 \leq 2x \},$$

$$f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

$$b) \Omega = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 \leq 2x \},$$

$$f(x, y) = x \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

$$c) \Omega = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < y < z \},$$

$$f(x, y, z) = e^{-(x+y+z)} \quad \forall (x, y, z) \in \Omega$$

Solución

a) Evidentemente, el conjunto Ω es cerrado y acotado, luego compacto. Como f es continua, está acotada en Ω , luego $f \in \mathcal{L}_1(\Omega)$.

Calculamos ahora las secciones horizontales del conjunto Ω . Para $(x, y) \in \Omega$ vemos que $y^2 \leq 2x \leq 4$ luego $|y| \leq 2$. Por tanto, dado $y \in \mathbb{R}$, tenemos $\Omega^y = \emptyset$ salvo que se tenga $|y| \leq 2$, en cuyo caso $\Omega^y = [y^2/2, 2]$. Por tanto, usando el teorema de Fubini, obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{x d(x, y)}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} &= \int_{-2}^2 \left(\int_{y^2/2}^2 \frac{x dx}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} \right) dy \\ &= \int_{-2}^2 \left[\sqrt{1 + x^2 + y^2} \right]_{x=y^2/2}^{x=2} dy = \\ &= \int_{-2}^2 \sqrt{5 + y^2} dy - \int_{-2}^2 \sqrt{1 + (y^4/4) + y^2} dy \end{aligned} \quad (1)$$

y se trata ahora de calcular las dos integrales simples que acaban de aparecer.

Por una parte tenemos

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 \sqrt{1 + (y^4/4) + y^2} dy &= \int_{-2}^2 \sqrt{(1 + (y^2/2))^2} dy = \int_{-2}^2 (1 + y^2/2) dy \\ &= \left[y + \frac{y^3}{6} \right]_{-2}^2 = \frac{20}{3} \end{aligned}$$

Para la otra integral, puesto que la función $y \mapsto \sqrt{5 + y^2}$ es continua en \mathbb{R} , podemos usar la versión elemental del teorema de cambio de variable, con la función

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = \frac{\sqrt{5}}{2}(e^t - e^{-t}) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

que es de clase C^1 .

Para $t \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\varphi(t) = 2 \iff \sqrt{5}(e^t - e^{-t}) = 4 \iff \sqrt{5}e^{2t} - 4e^t - \sqrt{5} = 0$$

La última igualdad se cumple cuando $e^t = \sqrt{5}$, es decir, $t = (1/2) \log 5$. Escribiendo para abreviar $r = (1/2) \log 5$, hemos visto que $\varphi(r) = 2$ y, puesto que φ es una función impar, tenemos también $\varphi(-r) = -2$.

Por otra parte, siempre para todo $t \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\begin{aligned} \sqrt{5 + \varphi(t)^2} &= \sqrt{5} \sqrt{1 + (1/4)(e^{2t} + e^{-2t} - 2)} \\ &= \sqrt{5} \sqrt{(1/4)(e^{2t} + e^{-2t} + 2)} = \frac{\sqrt{5}}{2}(e^t + e^{-t}) \end{aligned}$$

mientras que $\varphi'(t) = \frac{\sqrt{5}}{2}(e^t + e^{-t})$. En resumen, mediante el cambio de variable indicado, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 \sqrt{5 + y^2} dy &= \frac{5}{4} \int_{-r}^r (e^t + e^{-t})^2 dt \\ &= \frac{5}{4} \int_{-r}^r (e^{2t} + e^{-2t} + 2) dy = \left[\frac{5}{8} e^{2t} - \frac{5}{8} e^{-2t} + \frac{5}{2} t \right]_{-r}^r \\ &= \frac{5}{4} e^{2r} - \frac{5}{4} e^{-2r} + 5r = 6 + \frac{5}{2} \log 5 \end{aligned}$$

donde hemos usado que $e^{2r} = 5$ y $e^{-2r} = 1/5$. Una vez calculadas las integrales simples que aparecen en (1), podemos concluir que

$$\int_{\Omega} \frac{x d(x, y)}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} = \frac{5}{2} \log 5 - \frac{2}{3} \quad \blacksquare$$

b) La condición $x^2 + y^2 \leq 2x$ equivale a $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$, luego Ω se obtiene como intersección de dos círculos de radio 1, uno centrado en el origen y el otro en el punto $(1, 0)$. Esto permite entender gráficamente el razonamiento que después haremos. De momento, Ω es cerrado y acotado, luego es compacto. Como f es continua, está acotada en Ω , y por tanto $f \in \mathcal{L}_1(\Omega)$. Para calcular su integral usaremos el teorema de Fubini, empezando por estudiar las secciones horizontales de Ω .

Para $(x, y) \in \Omega$ se tiene que $2x \geq x^2 + y^2 \geq 0$, luego $x \geq 0$, y de $x^2 + y^2 \leq 1$ se deduce que $y^2 \leq 1$ y $x \leq \sqrt{1 - y^2} \leq 1$. Entonces la condición $(x-1)^2 \leq 1 - y^2$ equivale a que se tenga $1 - x \leq \sqrt{1 - y^2}$, es decir, $1 - \sqrt{1 - y^2} \leq x$. En resumen, para $(x, y) \in \Omega$ se tiene

$$1 - \sqrt{1 - y^2} \leq x \leq \sqrt{1 - y^2} \quad (2)$$

Recíprocamente, si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ verifica (2), tenemos claramente $0 \leq x \leq 1$, con lo que deducimos por una parte que $x^2 \leq 1 - y^2$, y por otra que $0 \leq 1 - x \leq \sqrt{1 - y^2}$, de donde $(x - 1)^2 + y^2 \leq 1$, así que $(x, y) \in \Omega$.

Finalmente, de (2) se deduce que $1 \leq 2\sqrt{1 - y^2}$ de donde $y^2 \leq 3/4$, o lo que es lo mismo, $|y| \leq \sqrt{3}/2$. Por tanto, hemos probado que

$$\Omega = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq \sqrt{3}/2, \quad 1 - \sqrt{1 - y^2} \leq x \leq \sqrt{1 - y^2} \}$$

Las secciones horizontales de Ω son ya fáciles de calcular. Para $y \in \mathbb{R}$ con $|y| > \sqrt{3}/2$ se tiene que $\Omega^y = \emptyset$. Por el contrario, cuando $|y| \leq \sqrt{3}/2$, tenemos

$$\Omega^y = [\alpha(y), \beta(y)] \quad \text{con} \quad \alpha(y) = 1 - \sqrt{1 - y^2} \quad \text{y} \quad \beta(y) = \sqrt{1 - y^2}$$

Podemos ya usar el teorema de Fubini para obtener que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} x \, d(x, y) &= \int_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2} \left(\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} x \, dx \right) dy \\ &= \int_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{\alpha(y)}^{\beta(y)} dy = \frac{1}{2} \int_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2} (\beta(y)^2 - \alpha(y)^2) dy \end{aligned}$$

Observamos ahora en primer lugar que

$$\beta(y)^2 - \alpha(y)^2 = (1 - y^2) - (1 + (1 - y^2) - 2\sqrt{1 - y^2}) = 2\sqrt{1 - y^2} - 1$$

Por otra parte, mediante el cambio de variable $y = \sin t$, obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2} \sqrt{1 - y^2} \, dy &= \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \cos^2 t \, dt = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos(2t)}{2} \right) dt \\ &= \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} \right]_{-\pi/3}^{\pi/3} = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

donde hemos usado que $\sin(-\pi/3) = -\sqrt{3}/2$ y $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$, así como que, para todo $t \in [-\pi/3, \pi/3]$ se tiene $\cos t > 0$.

Usando las tres igualdades anteriores concluimos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} x \, d(x, y) &= \frac{1}{2} \int_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2} (2\sqrt{1 - y^2} - 1) \, dy \\ &= \int_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2} \sqrt{1 - y^2} \, dy - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \end{aligned} \quad \blacksquare$$

c) Es claro que f es una función continua, luego medible, que sólo toma valores positivos, así que podemos usar el teorema de Tonelli, para calcular la integral de f sobre Ω . Entonces f será integrable en Ω si, y sólo si, dicha integral es finita.

Empezamos calculando las secciones verticales del conjunto Ω , que es medible, por ser abierto en \mathbb{R}^3 . Fijado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ se tiene claramente que $\Omega_{(x,y)} = \emptyset$, salvo que se tenga $0 < x < y$, en cuyo caso vemos que $\Omega_{(x,y)} =]y, +\infty[$. Por tanto, considerando el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y\}$, que a su vez es un abierto de \mathbb{R}^2 , el teorema de Tonelli nos dice que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} e^{-(x+y+z)} d(x, y, z) &= \int_A \left(\int_y^{+\infty} e^{-(x+y+z)} dz \right) d(x, y) \\ &= \int_A \left[-e^{-(x+y+z)} \right]_{z=y}^{+\infty} d(x, y) = \int_A e^{-(x+2y)} d(x, y) \end{aligned}$$

Para calcular la integral doble que nos ha aparecido, usamos ahora las secciones verticales del conjunto A . Para $x \in \mathbb{R}_0^-$ tenemos $A_x = \emptyset$ mientras que, para $x \in \mathbb{R}^+$ vemos que $A_x =]x, +\infty[$. Por tanto, el teorema de Tonelli nos dice que

$$\begin{aligned} \int_A e^{-(x+2y)} d(x, y) &= \int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} e^{-(x+2y)} dy \right) dx \\ &= \int_0^{+\infty} \left[-\frac{e^{-(x+2y)}}{2} \right]_{y=x}^{+\infty} dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-3x}}{2} dx \\ &= \left[-\frac{e^{-3x}}{6} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{6} < \infty \end{aligned}$$

Esto prueba que f es integrable sobre Ω con integral $1/6$. ■

3. En cada uno de los siguientes casos, estudiar la integrabilidad de la función f en el conjunto Ω .

$$a) \quad \Omega =]0, \pi/2[\times \mathbb{R}^+, \quad f(x, y) = \frac{\cos(xy)}{(1+y^2)\sqrt{\sin x}} \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

$$b) \quad \Omega = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \quad f(x, y) = (x-y)e^{-(x-y)^2} \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

$$c) \quad \Omega = \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = \frac{\cos x + \cos y + \cos z}{(1+x^2+y^2+z^2)^3} \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

Solución

a) Observamos que Ω es abierto, luego medible, y que f es continua, luego también es medible. Para todo $(x, y) \in \Omega$ se tiene

$$|f(x, y)| = \frac{|\cos(xy)|}{(1+y^2)\sqrt{\sin x}} \leq \frac{1}{(1+y^2)\sqrt{\sin x}}$$

y usando el teorema de Tonelli deducimos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f(x, y)| d(x, y) &\leq \int_{\Omega} \frac{d(x, y)}{(1+y^2)\sqrt{\sin x}} \\ &= \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{+\infty} \frac{dy}{(1+y^2)\sqrt{\sin x}} \right) dx \\ &= \left(\int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2} \right) \left(\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} \right) \end{aligned}$$

Por una parte, el criterio de integrabilidad nos dice que

$$\int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2} = \left[\arctan y \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

Por otra, tomando $J =]0, \pi/2]$, vamos a ver que la función $h : J \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $h(x) = 1/\sqrt{\sin x}$ para todo $x \in J$, es integrable en J . De entrada h es continua, luego localmente integrable, en J . Usamos el criterio de comparación con la función potencia de exponente $-1/2$, que es integrable en J . Se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|h(x)|}{x^{-1/2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{x}{\sin x}} = 1$$

y el criterio de comparación nos dice que h es integrable en J .

Usando lo anterior concluimos que

$$\int_{\Omega} |f(x, y)| d(x, y) \leq \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\sin x}} < \infty$$

de modo que $f \in \mathcal{L}_1(\Omega)$. ■

b) De nuevo, el conjunto Ω es medible, por ser abierto, y la función f es medible, por ser continua. Vamos a calcular las integrales iteradas de f .

Dado $y \in \mathbb{R}^+$, la sección horizontal de f en y , dada por $f^y(x) = (x-y)e^{-(x-y)^2}$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$, sólo toma valores negativos en el intervalo $]0, y[$, y sólo positivos en la semirrecta $]y, +\infty[$ lo que nos permite aplicarle el criterio de integrabilidad. Obtenemos que f^y es integrable en \mathbb{R}^+ con

$$\int_0^{+\infty} (x-y) e^{-(x-y)^2} dx = \left[-\frac{e^{-(x-y)^2}}{2} \right]_{x=0}^{+\infty} = \frac{1}{2} e^{-y^2}$$

y esto es válido para todo $y \in \mathbb{R}^+$. Como la función $y \mapsto e^{-y^2}$ es integrable en \mathbb{R} , y por tanto en \mathbb{R}^+ , obtenemos la existencia de una integral iterada de f , dada por

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} (x-y) e^{-(x-y)^2} dx \right) dy = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \alpha \in \mathbb{R}^+$$

De hecho sabemos que $\alpha = \sqrt{\pi}/4$, pero sólo usaremos que $\alpha \neq 0$.

Puesto que $f(y, x) = -f(x, y)$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^+$, si ahora repetimos el razonamiento anterior, intercambiando los papeles de las variables x e y , obtenemos que también existe la otra integral iterada de f , que vendrá dada por

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} (x-y) e^{-(x-y)^2} dy \right) dx = -\alpha$$

Puesto que $\alpha \neq 0$, hemos visto que las dos integrales iteradas de f existen pero no coinciden. El teorema de Fubini nos permite concluir que f no es integrable en Ω . ■

c) La función f es medible, por ser continua. Además, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ se tiene claramente que

$$|f(x, y)| \leq \frac{3}{(1+x^2+y^2+z^2)^3} \leq \frac{3}{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)}$$

de donde, usando el teorema de Tonelli, deducimos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} |f(x, y)| d(x, y, z) &\leq \int_{\mathbb{R}^3} \frac{3 d(x, y, z)}{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)} \\ &= 3 \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)} \right) dy \right) dx \\ &= 3 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2} \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{1+z^2} \right) = 3\pi^3 < \infty \end{aligned}$$

y esto prueba que $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^3)$. ■

4. Probar que el conjunto

$$E = \{ (x, y, z) \in (\mathbb{R}_0^+)^3 : x + y + z \leq 1 \} \subset \mathbb{R}^3$$

es medible y calcular su volumen.

Solución

El conjunto E es cerrado, por ser la intersección de cuatro semi-espacios cerrados, luego es medible. Para calcular su volumen empezamos observando la longitud de sus secciones verticales.

Consideremos el conjunto $A = \{ (x, y) \in (\mathbb{R}_0^+)^2 : x + y \leq 1 \}$ que también es cerrado, pero en \mathbb{R}^2 . Se tiene evidentemente que $E_{(x,y)} = \emptyset$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus A$, mientras que

$$E_{(x,y)} = [0, 1 - x - y] \quad \forall (x, y) \in A$$

El teorema de Tonelli, en el caso de la función característica de E nos dice que

$$\lambda_3(E) = \int_A \lambda_1(E_{(x,y)}) d(x, y) = \int_A (1 - x - y) d(x, y)$$

La integral doble anterior se calcula usando de nuevo el teorema de Tonelli, mediante las secciones verticales del conjunto A . Es claro que $A_x = \emptyset$ salvo que $x \in [0, 1]$, en cuyo caso $A_x = [0, 1 - x]$. Por tanto se tiene

$$\begin{aligned} \int_A (1 - x - y) d(x, y) &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (1 - x - y) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left[y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{1-x} dx \\ &= \int_0^1 \left((1-x) - x(1-x) - \frac{(1-x)^2}{2} \right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2} dx = \left[-\frac{(1-x)^3}{6} \right]_0^1 = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Concluimos de esta forma que el volumen de E es $1/6$. ■