

Análisis Matemático II

Tema 2: Ejercicios resueltos

1. Probar que la serie $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge absoluta y uniformemente en $\mathbb{R}$, siendo

$$f_n(x) = \frac{x}{n(1 + nx^2)} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Solución

Para cada $n \in \mathbb{N}$, la función f_n es derivable en $\mathbb{R}$ con

$$f'_n(x) = \frac{n(1 + nx^2) - 2n^2x^2}{n^2(1 + nx^2)^2} = \frac{n(1 - nx^2)}{n^2(1 + nx^2)^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Vemos que $f'_n(x) \leq 0$ si $|x| \geq 1/\sqrt{n}$, mientras que $f'_n(x) \geq 0$ si $|x| \leq 1/\sqrt{n}$. Deducimos claramente que:

- Por una parte, f_n es decreciente en $\left]-\infty, \frac{-1}{\sqrt{n}}\right]$, con lo cual:

$$0 \geq f_n(x) \geq f_n\left(\frac{-1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{-1}{2n\sqrt{n}} \quad \forall x \in \left]-\infty, \frac{-1}{\sqrt{n}}\right]$$

- Análogamente, f_n es decreciente en $\left[\frac{1}{\sqrt{n}}, +\infty\right]$, de donde:

$$0 \leq f_n(x) \leq f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2n\sqrt{n}} \quad \forall x \in \left[\frac{1}{\sqrt{n}}, +\infty\right]$$

- Finalmente, f_n es creciente en $\left[\frac{-1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ y obtenemos que

$$\frac{-1}{2n\sqrt{n}} = f_n\left(\frac{-1}{\sqrt{n}}\right) \leq f_n(x) \leq f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2n\sqrt{n}} \quad \forall x \in \left[\frac{-1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

Observando los tres casos anteriores, concluimos que

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{2n\sqrt{n}} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Puesto que la serie $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n\sqrt{n}}$ es convergente, el test de Weierstrass nos dice que la serie $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge absoluta y uniformemente en $\mathbb{R}$. ■

2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $g_n : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$g_n(x) = \frac{1}{n^x} \quad \forall x \in [1, +\infty[$$

Probar las siguientes afirmaciones:

- (a) Para $\rho \in \mathbb{R}$ con $\rho > 1$, la serie $\sum_{n \geq 1} g_n$ converge uniformemente en $[\rho, +\infty[$
- (b) La sucesión $\{g_n\}$ converge uniformemente a cero en $[1, +\infty[$
- (c) La serie $\sum_{n \geq 1} g_n$ no converge uniformemente en $]1, +\infty[$

Solución

(a) Para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $x \mapsto n^x = e^{x \log n}$ es creciente en $\mathbb{R}$, de donde deducimos que

$$|g_n(x)| = \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^\rho} \quad \forall x \in [\rho, +\infty[, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por ser $\rho > 1$, la serie armónica $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\rho}$ es convergente, luego la desigualdad anterior nos permite usar el test de Weierstrass, para concluir que la serie $\sum_{n \geq 1} g_n$ converge uniformemente en la semirrecta $[\rho, +\infty[$.

(b) Usando de nuevo que la función $x \mapsto n^x$ es creciente, tenemos que

$$|g_n(x)| = \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n} \quad \forall x \in [1, +\infty[, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

y como $\{1/n\} \rightarrow 0$, deducimos que la sucesión $\{g_n\}$ converge uniformemente a cero en $[1, +\infty[$.

(c) Razonando ahora por reducción al absurdo, supongamos que la serie $\sum_{n \geq 1} g_n$ convergiese uniformemente en $]1, +\infty[$.

Fijado $\varepsilon > 0$, existiría $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $m \leq p < q$ se tendría

$$\sum_{n=p+1}^q \frac{1}{n^x} < \varepsilon \quad \forall x \in]1, +\infty[$$

Fijados $p, q \in \mathbb{N}$ con $m \leq p < q$, de la desigualdad anterior obtendríamos que

$$\sum_{n=p+1}^q \frac{1}{n} = \lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n=p+1}^q \frac{1}{n^x} \leq \varepsilon$$

En resumen, de esta forma habríamos probado que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} : m \leq p < q \implies \sum_{n=p+1}^q \frac{1}{n} \leq \varepsilon$$

Si la afirmación anterior fuese cierta, la serie armónica $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ sería una sucesión de Cauchy, es decir, dicha serie convergería, lo cual es falso. Esta contradicción prueba que la serie $\sum_{n \geq 1} g_n$ no puede converger uniformemente en $]1, +\infty[$. ■

3. Estudiar la convergencia puntual, absoluta y uniforme de la serie de potencias

$$\sum_{n \geq 0} \frac{n!}{(n+1)^n} x^n$$

Solución

Conviene recordar que la sucesión $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right\}$ es creciente y converge a e . En particular, anotamos para uso posterior que

$$\left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1} \leq e \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1)$$

Denotando por $\{c_n\}$ a la sucesión de coeficientes de la serie dada, que son números positivos, para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{(n+1)! (n+1)^n}{n! (n+2)^{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{n+1} = \left[\left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1} \right]^{-1} \quad (2)$$

de donde deducimos claramente que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \frac{1}{e}$$

Usando ahora el criterio de la raíz para sucesiones, obtenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 1/e$. Por tanto, tenemos una serie de potencias con radio de convergencia e .

Así pues, la serie converge absolutamente en el intervalo abierto $J =]-e, e[$ y uniformemente en cada conjunto compacto contenido en dicho intervalo. También sabemos que la serie no converge en ningún punto de $\mathbb{R} \setminus \overline{J}$.

Para $x = \pm e$, usando primero (2) y después (1), se tiene claramente que

$$\frac{|c_{n+1} x^{n+1}|}{|c_n x^n|} = e \left[\left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1} \right]^{-1} \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Esto prueba que la sucesión $\{|c_n x^n|\}$ es creciente, luego no puede converger a cero. Por tanto, la serie $\sum_{n \geq 0} c_n x^n$ no converge en los puntos e y $-e$, luego su campo de convergencia puntual es el intervalo abierto J .

Finalmente, estudiamos la convergencia uniforme en J . Razonando por reducción al absurdo, supongamos que el término general de la serie converge uniformemente a cero en J . Entonces existe un $m \in \mathbb{N}$ y una sucesión $\{\rho_n\}$ de números reales positivos, con $\{\rho_n\} \rightarrow 0$, tales que, para $n \geq m$ se tiene

$$c_n |x|^n = |c_n x^n| \leq \rho_n \quad \forall x \in J$$

Para $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq m$ obtenemos entonces que

$$c_n e^n = \lim_{x \rightarrow e} c_n |x|^n \leq \rho_n$$

y como $\{\rho_n\} \rightarrow 0$, deducimos que $\{c_n e^n\} \rightarrow 0$. Esto es una contradicción, pues acabamos de ver que la sucesión $\{c_n e^n\}$ es creciente, luego no converge a cero. Así pues, el término general de la serie $\sum_{n \geq 0} c_n x^n$ no converge uniformemente a cero en J ,

luego dicha serie no converge uniformemente en J . ■