

Análisis Matemático II

Tema 1: Ejercicios resueltos

1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f_n(x) = \frac{\log(1 + nx)}{1 + nx} \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^+$$

Fijado un $\rho \in \mathbb{R}^+$, estudiar la convergencia uniforme de la sucesión $\{f_n\}$ en el intervalo $[0, \rho]$, y en la semirrecta $[\rho, +\infty[$.

Solución

Por la escala de infinitos, sabemos que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\log t}{t} = 0$. Por tanto, para $x \in \mathbb{R}^+$, de $\{1 + nx\} \rightarrow +\infty$ deducimos que $\{f_n(x)\} \rightarrow 0$. Como $f_n(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, concluimos que $\{f_n\}$ converge puntualmente a cero en $\mathbb{R}_0^+$.

Observamos también que $f_n(x) \geq 0$ para cualesquiera $x \in \mathbb{R}_0^+$ y $n \in \mathbb{N}$, y pasamos ya a estudiar la convergencia uniforme.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, la función f_n es derivable en $\mathbb{R}_0^+$ con

$$f'_n(x) = \frac{n - n \log(1 + nx)}{(1 + nx)^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^+$$

Por tanto, para $x \in \mathbb{R}_0^+$ se tiene que $f'_n(x) = 0$ si, y sólo si, $x = (e - 1)/n$. De hecho, para $x < (e - 1)/n$ se tiene que $f'_n(x) > 0$, mientras que $f'_n(x) < 0$ para $x > (e - 1)/n$. Deducimos que f_n es creciente en el intervalo $[0, (e - 1)/n]$ y decreciente en la semirrecta $[(e - 1)/n, +\infty[$.

Fijado $\rho \in \mathbb{R}^+$, tomamos $m \in \mathbb{N}$ con $(e - 1)/m < \rho$. Entonces, para $n \geq m$ se tiene también $(e - 1)/n < \rho$, luego $[\rho, +\infty[\subset [(e - 1)/n, +\infty[$, con lo que f_n es decreciente en la semirrecta $[\rho, +\infty[$. Por tanto, para $n \geq m$ se tiene que

$$|f_n(x)| = f_n(x) \leq f_n(\rho) \quad \forall x \in [\rho, +\infty[$$

En vista de la convergencia puntual, sabemos que $\{f_n(\rho)\} \rightarrow 0$, luego de la desigualdad anterior se deduce que $\{f_n\}$ converge uniformemente en la semirrecta $[\rho, +\infty[$.

Por otra parte, observamos que $f_n((e - 1)/n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Definimos entonces $x_n = (e - 1)/n$ para $n \geq m$ y, por ejemplo, $x_n = 0$ para $n < m$, obteniendo una sucesión $\{x_n\}$ de puntos del intervalo $[0, \rho]$ que verifica $f_n(x_n) = 1$ para $n \geq m$. Por tanto, la sucesión $\{f_n(x_n)\}$ no converge a cero, luego $\{f_n\}$ no converge uniformemente en $[0, \rho]$. ■

2. Probar que la sucesión $\{g_n\}$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$, siendo

$$g_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^{2n}} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Solución

Para $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$ con $|x| \leq 1$ se tiene que $1 \leq 1 + x^{2n} \leq 2$, de donde obtenemos $1 \leq g_n(x) \leq \sqrt[n]{2}$. Como $\{\sqrt[n]{2}\} \rightarrow 1$, deducimos que $\{g_n(x)\} \rightarrow 1$.

Por otra parte, para $x \in \mathbb{R}$ con $|x| > 1$, observamos que

$$g_n(x) = x^2 \sqrt[n]{\frac{1}{x^{2n}} + 1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

y como $\{1/x^{2n}\} \rightarrow 0$, deducimos que $\{g_n(x)\} \rightarrow x^2$.

En resumen, la sucesión $\{g_n\}$ converge puntualmente en $\mathbb{R}$ a la función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \max\{1, x^2\}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Además, observamos claramente que $g_n(x) \geq g(x)$ para cualesquiera $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$.

Para la convergencia uniforme, fijado $n \in \mathbb{N}$, usaremos la función $\varphi_n : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\varphi_n(t) = t^{1/n}$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$, que es derivable con

$$\varphi_n'(t) = \frac{1}{n t^{(n-1)/n}} \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$$

Para $x \in \mathbb{R}$ con $|x| \leq 1$, aplicamos a φ_n el teorema del valor medio, en el intervalo $[1, 1 + x^{2n}]$, obteniendo que existe $t \in \mathbb{R}$, con $1 \leq t \leq 1 + x^{2n}$ tal que

$$g_n(x) - g(x) = \sqrt[n]{1 + x^{2n}} - 1 = \varphi_n(1 + x^{2n}) - \varphi_n(1) = \frac{x^{2n}}{n t^{(n-1)/n}}$$

Como $x^{2n} \leq 1$ y $t \geq 1$, deducimos que

$$g_n(x) - g(x) \leq 1/n \quad \forall x \in [-1, 1]$$

Por otra parte, para $x \in \mathbb{R}$ con $|x| > 1$, usamos el intervalo $[x^{2n}, 1 + x^{2n}]$, obteniendo $s \in \mathbb{R}$ con $x^{2n} < s < 1 + x^{2n}$ tal que

$$g_n(x) - g(x) = \sqrt[n]{1 + x^{2n}} - x^2 = \varphi_n(1 + x^{2n}) - \varphi_n(x^{2n}) = \frac{1}{n s^{(n-1)/n}}$$

De nuevo tenemos $s \geq 1$ y deducimos que

$$g_n(x) - g(x) \leq 1/n \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$$

En resumen, hemos probado que

$$|g_n(x) - g(x)| = g_n(x) - g(x) \leq 1/n \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

de donde se deduce que $\{g_n\}$ converge a g uniformemente en $\mathbb{R}$. ■

3. Sea $\{h_n\}$ la sucesión de funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ definida por:

$$h_n(x, y) = \frac{xy}{n^2 + x^2 + y^2} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}$$

Probar que $\{h_n\}$ converge uniformemente en cada subconjunto acotado de $\mathbb{R}^2$, pero no converge uniformemente en $\mathbb{R}^2$.

Solución

Fijado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, es claro que $\{h_n(x, y)\} \rightarrow 0$, luego $\{h_n\}$ converge a cero puntualmente en $\mathbb{R}^2$.

Si A es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^2$, existe una constante $M \in \mathbb{R}^+$ verificando que $\max\{|x|, |y|\} \leq M$ para todo $(x, y) \in A$. Tenemos entonces que

$$|h_n(x, y)| = \frac{|xy|}{n^2 + x^2 + y^2} \leq \frac{M^2}{n^2} \quad \forall (x, y) \in A, \forall n \in \mathbb{N}$$

Como $\{M^2/n^2\} \rightarrow 0$, deducimos que $\{h_n\}$ converge a cero, uniformemente en A .

Tomando $x_n = y_n = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, obtenemos una sucesión $\{(x_n, y_n)\}$ de puntos de $\mathbb{R}^2$, tal que $h_n(x_n, y_n) = 1/3$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\{h_n(x_n, y_n)\}$ no converge a cero, deducimos que $\{h_n\}$ no converge uniformemente en $\mathbb{R}^2$. ■