

Análisis Matemático II

Tema 14: Ejercicios propuestos

1. En cada uno de los siguientes casos, probar que la función f es integrable en el conjunto A y calcular su integral:

a) $A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1, y > 0 \}$
$$f(x, y) = \frac{x + y}{(x^2 + y^2)^\alpha} \quad \forall (x, y) \in A \quad (\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 3/2)$$

b) $A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x^2 + y^2 < 1, z > 1 \}$
$$f(x, y, z) = z^\alpha (x^2 + y^2)^\beta \quad \forall (x, y, z) \in A \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < -1 < \beta)$$

c) $A = \{ (x, y, z) \in (\mathbb{R}^+)^3 : x^2 + y^2 + z^2 > 1 \}$
$$f(x, y, z) = \frac{xyz}{(x^2 + y^2 + z^2)^4} \quad \forall (x, y, z) \in A$$

2. En cada uno de los siguientes casos, estudiar la integrabilidad de la función f en el conjunto A :

a) $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $f(x, y) = \frac{\sin x \sin y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \quad \forall (x, y) \in A$

b) $A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > x^2 + y^2 \}$
$$f(x, y, z) = (x^3 + y^3) \cos(xy) e^{-z} \quad \forall (x, y, z) \in A$$

c) $A = \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = \frac{1}{(1 + x^2 + y^2 + z^2)^\alpha} \quad \forall (x, y, z) \in A \quad (\alpha \in \mathbb{R}^+)$

3. Calcular el volumen de la llamada *bóveda de Viviani*:

$$B = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (2x - 1)^2 + 4y^2 \leq 1, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0 \}$$