

Análisis Matemático II

Tema 13: Ejercicios propuestos

1. Probar que el conjunto

$$E = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \min\{e^y, 1, e^{1-y}\} \} \subset \mathbb{R}^2$$

es medible y calcular su área.

2. En cada uno de los siguientes casos, probar que la función f es integrable en Ω y calcular su integral.

a) $\Omega = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, y^2 \leq 2x \},$
$$f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

b) $\Omega = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 \leq 2x \},$
$$f(x, y) = x \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

c) $\Omega = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < y < z \},$
$$f(x, y, z) = e^{-(x+y+z)} \quad \forall (x, y, z) \in \Omega$$

3. En cada uno de los siguientes casos, estudiar la integrabilidad de la función f en el conjunto Ω .

a) $\Omega =]0, \pi/2[\times \mathbb{R}^+, f(x, y) = \frac{\cos(xy)}{(1 + y^2) \sqrt{\sin x}} \quad \forall (x, y) \in \Omega$

b) $\Omega = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, f(x, y) = (x - y) e^{-(x-y)^2} \quad \forall (x, y) \in \Omega$

c) $\Omega = \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = \frac{\cos x + \cos y + \cos z}{(1 + x^2 + y^2 + z^2)^3} \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

4. Probar que el conjunto

$$E = \{ (x, y, z) \in (\mathbb{R}_0^+)^3 : x + y + z \leq 1 \} \subset \mathbb{R}^3$$

es medible y calcular su volumen.