

Análisis Matemático II

Tema 2: Ejercicios propuestos

1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1 - x^n} \quad \forall x \in]-1, 1[$$

Probar que la serie $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge absolutamente en $] -1, 1[$ y uniformemente en cada compacto $K \subset] -1, 1[$, pero no converge uniformemente en $] -1, 1[$.

2. Fijado $\alpha \in \mathbb{R}^+$ se define:

$$g_n(x) = \frac{1}{n^\alpha} \arctan \frac{x}{n} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Probar que la serie de funciones $\sum_{n \geq 1} g_n$ converge absoluta y uniformemente en cada subconjunto acotado de $\mathbb{R}$ y que, si $\alpha > 1$, dicha serie converge absoluta y uniformemente en $\mathbb{R}$.

3. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se considera la función $h_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$h_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx) \log \left(1 + \frac{|x|}{n} \right) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Probar que la serie de funciones $\sum_{n \geq 1} h_n$ converge absoluta y uniformemente en cada subconjunto acotado de $\mathbb{R}$.

4. Estudiar la convergencia puntual, absoluta y uniforme de las siguientes series de potencias:

$$(a) \quad \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{\log(n+2)} \qquad (b) \quad \sum_{n \geq 0} \frac{n}{2^n} (x-1)^n$$