Tema 12

Integrales dependientes de un parámetro

Vamos a estudiar brevemente un método para definir nuevas funciones, mediante la integral. Para ello no se usa un integrando fijo, sino una función que depende de una variable, a la que llamamos *parámetro*, que puede tomar valores en un conjunto, en principio arbitrario, que nada tiene que ver con el recinto de integración. La integral nos da entonces una función, definida en el conjunto de valores del parámetro, que es la que se conoce como una *integral dependiente de un parámetro*. Típicamente, estas integrales no pueden calcularse en términos de otras funciones conocidas, de ahí su utilidad para definir *nuevas* funciones. Esto hace necesario disponer de criterios que nos permitan estudiar determinadas propiedades de dichas funciones, como la continuidad o la derivabilidad. El teorema de la convergencia dominada nos va a permitir probar fácilmente criterios adecuados para ambas propiedades. Como ejemplo de una función muy relevante, que se puede definir como una integral dependiente de un parámetro, mencionaremos brevemente la *función Gamma de Euler*.

12.1. Noción de integral dependiente de un parámetro

Volvemos a trabajar con la integral de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$, pero conviene mantener el tipo de notación que hemos venido usando en $\mathbb{R}$. Para evitar repeticiones, en todo lo que sigue, Ω será un subconjunto medible de $\mathbb{R}^N$. Si $f \in \mathcal{L}^+(\Omega)$, o bien $f \in \mathcal{L}_1(\Omega)$, escribiremos

$$\int_\Omega f(y)\,dy \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega f$$

Como ocurría con funciones de una variable, esta notación tiene la ventaja de indicar muy claramente la función f que estamos integrando, sin necesidad de definirla por separado, puesto que muestra el valor de f en un punto genérico $y \in \Omega$. El símbolo dy, cuya utilidad ha debido quedar de manifiesto en el estudio de los cambios de variable, sirve además para distinguir la variable y, que solemos llamar *variable de integración*, de otras variables de las que puede depender la función f, a las que llamaremos *parámetros*.

Por poner un ejemplo sencillo, con funciones de una variable, en la integral $\int_1^2 y^x\,dy$, la variable de integración es y, luego el integrando es la función potencia de exponente x, con lo que la integral depende del parámetro x, que puede tomar cualquier valor real. En cambio, si escribimos $\int_1^2 y^x\,dx$, el integrando es la función exponencial de base y, así que la integral depende del parámetro y, que tomará valores positivos.

De manera más general, sea ahora X un conjunto no vacío arbitrario y $\Phi : X \times \Omega \to \mathbb{R}$ una función. Supongamos que, para cada $x \in X$, la función $y \mapsto \Phi(x,y)$ es integrable en Ω. Podemos entonces definir una función $\varphi : X \to \mathbb{R}$ escribiendo

$$\varphi\big(x\big) = \int_\Omega \Phi\big(x,y\big)\,dy \qquad \forall x \in X \tag{1}$$

Vemos que la variable de integración es y, luego la integral depende del parámetro x. Por ello decimos que la función φ es una *integral dependiente de un parámetro*.

A menudo, la función φ definida en (1) no puede expresarse en términos de funciones más elementales, pero ese es precisamente el caso más interesante, pues estaremos usando la integral para definir *nuevas* funciones. Claro está que entonces, necesitamos algún método para estudiar las propiedades de dichas funciones. Obtendremos condiciones suficientes para asegurar su continuidad, cuando X sea un espacio métrico, así como para obtener su derivabilidad y calcular su derivada, cuando X sea un subconjunto de $\mathbb{R}$.

Conviene anticipar la forma que van a tener dichas condiciones, que lógicamente se refieren a la función Φ que usamos en el integrando. Ya hemos mencionado que, para cada $x \in X$, la función $y \mapsto \Phi(x,y)$ debe ser integrable en Ω, para que podamos definir la función φ. Pero además, si queremos que φ sea continua o derivable, como función de la variable x que es, parece natural exigir que Φ tenga la misma propiedad como función de x, es decir, que para cada $y \in \Omega$, la función $x \mapsto \Phi(x,y)$ sea continua o derivable, respectivamente. De hecho, este tipo de condiciones aún no son suficientes y habrá que añadir una hipótesis clave, que permitirá usar el teorema de la convergencia dominada, para llegar al resultado que se busca.

12.2. Continuidad

Probamos el resultado referente a la continuidad de las funciones que nos interesan:

Teorema. *(Continuidad de la integral dependiente de un parámetro). Sea X un espacio métrico, $x_0 \in X$ y $\Phi : X \times \Omega \to \mathbb{R}$ una función que verifique las siguientes condiciones:*

(i) *Para cada $x \in X$, la función $y \mapsto \Phi\big(x,y\big)$ es medible*

(ii) *Para cada $y \in \Omega$, la función $x \mapsto \Phi\big(x,y\big)$ es continua en el punto x_0*

(iii) *Existe una función $g \in \mathcal{L}_1(\Omega)$ tal que $\big|\Phi\big(x,y\big)\big| \leqslant g(y)$ para todo $\big(x,y\big) \in X \times \Omega$*

Entonces la función $\varphi : X \to \mathbb{R}$, definida por $\varphi\big(x\big) = \int_\Omega \Phi\big(x,y\big)\,dy$ para todo $x \in X$, es continua en el punto x_0.

Demostración. En vista de (i) y (iii), para cada $x \in X$, la función $y \mapsto \Phi\big(x, y\big)$ es medible y verifica que $\big|\Phi\big(x, y\big)\big| \leqslant g(y)$ para todo $y \in \Omega$, luego es integrable en Ω. Esto hace que la definición de φ sea correcta.

Dada una sucesión $\{x_n\}$ en X, con $\{x_n\} \to x_0$, comprobaremos que $\big\{\varphi\big(x_n\big)\big\} \to \varphi\big(x_0\big)$. Para ello consideramos la sucesión $\{f_n\}$ de funciones de Ω en $\mathbb{R}$, y la función $f : \Omega \to \mathbb{R}$, definidas para todo $y \in \Omega$ por

$$f_n(y) = \Phi\big(x_n, y\big) \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \text{y} \qquad f(y) = \Phi\big(x_0, y\big)$$

Como se ha dicho, para cada $n \in \mathbb{N}$, la función f_n es medible y, en virtud de (iii), verifica que $|f_n| \leqslant g$. Además, fijado $y \in \Omega$, de (ii) deducimos que $\big\{\Phi\big(x_n, y\big)\big\} \to \Phi\big(x_0, y\big)$, es decir, $\big\{f_n(y)\big\} \to f(y)$. Por tanto, la sucesión $\{f_n\}$ converge a f puntualmente en Ω. Esto permite usar el teorema de la convergencia dominada para obtener que

$$\varphi\big(x_0\big) = \int_\Omega f(y)\,dy = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(y)\,dy = \lim_{n\to\infty} \varphi\big(x_n\big) \qquad \blacksquare$$

Ni que decir tiene, el teorema anterior puede usarse en todos los puntos de X. Supuesto que se verifican (i) y (ii), si en (ii) suponemos que, para cada $y \in \Omega$, la función $x \mapsto \Phi\big(x, y\big)$ es continua (en X), obtenemos obviamente que φ también es continua. Sin embargo, para obtener este resultado, frecuentemente conviene hacer uso del carácter local de la continuidad. Más concretamente, para cada punto $x \in X$, podemos fijar un entorno U de x y usar el teorema anterior tomando $X = U$. Esto facilita comprobar la condición (iii), que en la práctica es la única que suele dar trabajo. La ventaja es que dicha condición sólo hay que comprobarla en el conjunto $U \times \Omega$, y aunque U es variable, la función g puede perfectamente depender de U.

Conviene también observar que, teniendo en cuenta la relación entre continuidad y límite funcional, el resultado anterior puede usarse para calcular límites de funciones definidas como integrales dependientes de un parámetro. Para concretarlo, sea ahora X un subconjunto de otro espacio métrico y x_0 un punto de acumulación de X. Dada una función $\Phi : X \times \Omega \to \mathbb{R}$ que verifique las condiciones (i) y (iii) del enunciado anterior, supongamos en vez de (ii) que, para cada $y \in \Omega$, la función $x \mapsto \Phi\big(x, y\big)$ tiene límite en el punto x_0, al que podemos denotar por $\psi(y)$. Usando el resultado anterior, o si se prefiere, razonando igual que hemos hecho para demostrarlo, se obtiene que la función ψ es integrable en Ω y se tiene:

$$\lim_{x\to x_0} \int_\Omega \Phi\big(x, y\big)\,dy = \int_\Omega \psi(y)\,dy = \int_\Omega \left(\lim_{x\to x_0} \Phi\big(x, y\big)\right) dy$$

El resultado demostrado muestra así un aspecto interesante: nos da una condición suficiente para permutar un límite con una integral, igual que ocurría con los teoremas de convergencia, sólo que ahora se trata de un límite funcional y no del límite de una sucesión.

De hecho cuando X es un subconjunto no mayorado de $\mathbb{R}$, podemos razonar de manera análoga, sustituyendo x_0 por $+\infty$. Obtenemos que si $\Phi : X \times \Omega \to \mathbb{R}$ verifica como siempre las condiciones (i) y (iii), y para cada $y \in \Omega$ la función $x \mapsto \Phi\big(x, y\big)$ tiene límite en $+\infty$, entonces se tiene que

$$\lim_{x\to+\infty} \int_\Omega \Phi(x, y)\,dy = \int_\Omega \left(\lim_{x\to+\infty} \Phi\big(x, y\big)\right) dy$$

Por supuesto, hay un resultado análogo para límites en $-\infty$, cuando X es un subconjunto no minorado de $\mathbb{R}$. Pero es más interesante observar que lo recién comentado puede usarse en el caso $X = \mathbb{N}$ obteniendo, precisamente, el teorema de la convergencia dominada, del que a su vez habíamos deducido fácilmente el teorema anterior. Ambos resultados son por tanto equivalentes.

En otro orden de ideas, y aunque no vamos a demostrarlo, conviene comentar que el teorema de continuidad de la integral dependiente de un parámetro no es cierto para espacios topológicos arbitrarios, para los que no puede usarse la caracterización secuencial de la continuidad.

12.3. Derivación

Si X es un subconjunto de $\mathbb{R}$ y x_0 un punto de acumulación de X, los resultados anteriores pueden usarse para estudiar la derivabilidad en el punto x_0 de una integral dependiente de un parámetro, definida como en (1), a partir de una función $\Phi : X \times \Omega \to \mathbb{R}$. Sin embargo, el tipo de acotación que se requiere para comprobar la condición (iii) del teorema de continuidad resulta ser demasiado artificiosa. Es más conveniente trabajar con la derivabilidad en todos los puntos de un intervalo, lo que permite aprovechar el teorema del valor medio, para basarse en acotaciones más naturales. Se llega así al siguiente resultado:

Teorema. *(Derivación de la integral dependiente de un parámetro). Dado un intervalo no trivial $J \subset \mathbb{R}$, sea $\Phi : J \times \Omega \to \mathbb{R}$ una función que verifique las siguientes condiciones:*

(i) *Para cada $x \in J$, la función $y \mapsto \Phi\big(x, y\big)$ es integrable en Ω*

(ii) *Para cada $y \in \Omega$, la función $x \mapsto \Phi\big(x, y\big)$ es derivable en J. Equivalentemente, Φ es parcialmente derivable con respecto a la primera variable en $J \times \Omega$*

(iii) *Existe $g \in \mathcal{L}_1(\Omega)$ tal que $\left|\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x,y)\right| \leqslant g(y)$ para todo $(x,y) \in J \times \Omega$*

Entonces, la función $\varphi : J \to \mathbb{R}$, definida por $\varphi(x) = \displaystyle\int_\Omega \Phi\big(x, y\big)\,dy$ para todo $x \in J$, es derivable en J con:

$$\varphi'\big(x\big) = \int_\Omega \frac{\partial \Phi}{\partial x}\big(x, y\big)\,dy \qquad \forall\, x \in J \tag{2}$$

Demostración. Fijado $x_0 \in J$, debemos probar que φ es derivable en el punto x_0 y que la función $y \mapsto \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}\big(x_0, y\big)$ es integrable en Ω verificando (2) para $x = x_0$. Sea entonces $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de $J \setminus \{x_0\}$, con $\{x_n\} \to x_0$. Para $y \in \Omega$ definimos

$$f(y) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\big(x_0, y\big) \qquad \text{y} \qquad f_n(y) = \frac{\Phi\big(x_n, y\big) - \Phi\big(x_0, y\big)}{x_n - x_0} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sabemos por hipótesis que tanto la función $y \mapsto \Phi\big(x_n, y\big)$ como $y \mapsto \Phi\big(x_0, y\big)$ son integrables en Ω, luego igual le ocurre a f_n. Además, por definición de derivada, (ii) nos dice que $\{f_n(y)\} \to f(y)$ para todo $y \in \Omega$, y en particular f es medible.

Fijados $y \in \Omega$ y $n \in \mathbb{N}$, la desigualdad del valor medio, aplicada en el intervalo cerrado J_n de extremos x_n y x_0 nos dice que

$$\big|\Phi\big(x_n, y\big) - \Phi\big(x_0, y\big)\big| \leqslant |x_n - x_0| \sup\left\{\left|\frac{\partial\Phi}{\partial x}\big(u, y\big)\right| : u \in J_n\right\} \leqslant |x_n - x_0|\, g(y)$$

donde hemos usado (iii). Tenemos por tanto

$$\big|f_n(y)\big| \leqslant g(y) \qquad \forall y \in \Omega, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Como consecuencia, $|f(y)| \leqslant g(y)$ para todo $y \in \Omega$, luego $f \in \mathcal{L}_1(\Omega)$. De hecho, el teorema de la convergencia dominada nos dice que

$$\int_\Omega \frac{\partial\Phi}{\partial x}\big(x_0, y\big)\, dy = \int_\Omega f(y)\, dy = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n(y)\, dy = \lim_{n\to\infty}\frac{\varphi\big(x_n\big) - \varphi\big(x_0\big)}{x_n - x_0}$$

En vista de la arbitrariedad de la sucesión $\{x_n\}$, esto prueba que φ es derivable en el punto x_0 y se verifica (2) para $x = .x_0$, lo que concluye la demostración. ■

El resultado anterior permite probar la derivabilidad parcial de una integral dependiente de un parámetro $x \in \mathbb{R}^M$, pues las derivadas parciales de funciones de varias variables reales no son más que derivadas ordinarias de funciones reales de una variable real. Se obtiene así el siguiente resultado:

- *Sea G un abierto de $\mathbb{R}^M$, $k \in \Delta_M$ y $\Psi : G \times \Omega \to \mathbb{R}$ una función que verifique las siguientes condiciones:*
  - (i) *Para cada $x \in G$, la función $y \mapsto \Psi\big(x, y\big)$ es integrable en Ω*
  - (ii) *La función Ψ es parcialmente derivable con respecto a la k-ésima variable en $G \times \Omega$*
  - (iii) *Existe $g \in \mathcal{L}_1(\Omega)$ tal que $\left|\dfrac{\partial\Psi}{\partial x_k}(x,y)\right| \leqslant g(y)$ para todo $(x,y) \in G \times \Omega$*

  Entonces, la función $\psi : G \to \mathbb{R}$, definida por $\psi\big(x\big) = \int_\Omega \Psi\big(x, y\big)\, dy$ para todo $x \in G$, es parcialmente derivable con respecto a la k-ésima variable en G y se verifica que:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\big(x\big) = \int_\Omega \frac{\partial\Psi}{\partial x_k}\big(x, y\big)\, dy \qquad \forall\, x \in G \tag{3}$$

Fijado un punto $x_0 \in G$ tomamos $r \in \mathbb{R}^+$ de forma que la bola abierta de centro x_0 y radio r, para la norma euclídea de $\mathbb{R}^M$, esté contenida en G. Tomando entonces $J =]-r, r[$ definimos una función $\Phi : J \times \Omega \to \mathbb{R}$ escribiendo

$$\Phi\big(t, y\big) = \Psi\big(x_0 + t\, e_k, y\big) \qquad \forall (t,y) \in J \times \Omega$$

donde e_k es el k-ésimo vector de la base usual de $\mathbb{R}^N$. Definimos también

$$\varphi\big(t\big) = \psi\big(x_0 + t\, e_k\big) = \int_\Omega \Phi\big(t, y\big)\, dy \qquad \forall t \in J$$

Fijado $y \in \Omega$, la hipótesis (ii) nos dice que Φ es parcialmente derivable con respecto a la primera variable en $J \times \Omega$, y usando (iii) obtenemos que

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, y) \right| = \left| \frac{\partial \Psi}{\partial x_k}(x_0 + t e_k, y) \right| \leqslant g(y) \qquad \forall (t,y) \in J \times \Omega$$

Esto permite usar el teorema anterior para obtener que φ es derivable en J, y en particular en el origen, pero esto significa que ψ es parcialmente derivable con respecto a la k-ésima variable en el punto x_0. Del teorema anterior también obtenemos que

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_k}(x_0) = \varphi'(0) = \int_\Omega \frac{\partial \Phi}{\partial t}(0, y)\, dy = \int_\Omega \frac{\partial \Psi}{\partial x_k}(x_0, y)\, dy$$

que es la igualdad (3) para $x = x_0$, pero $x_0 \in G$ era arbitrario. ■

12.4. La función Gamma de Euler

Vamos a considerar muy brevemente una de las funciones especiales más importantes del Análisis, que tiene gran utilidad en contextos tan variados como la Estadística, la Combinatoria o la Teoría de Números. En absoluto vamos a hacer un estudio amplio de esta función, que de entrada exigiría extenderla para tener una función de variable compleja. Sólo pretendemos ilustrar el uso de los teoremas anteriores.

Fijado $x \in \mathbb{R}^+$ consideremos la función $f_x : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ definida por

$$f_x(t) = t^{x-1} e^{-t} \qquad \forall t \in \mathbb{R}^+$$

Es claro que f_x es continua, luego localmente integrable en $\mathbb{R}^+$, pero vamos a comprobar que de hecho es integrable en $\mathbb{R}^+$. Para ello haremos uso del criterio de comparación, tanto en el intervalo $]0, 1]$ como en la semirrecta $[1, +\infty[$. Para el primero observamos que

$$\lim_{t \to 0} \frac{f_x(t)}{t^{x-1}} = \lim_{t \to 0} e^{-t} = 1$$

Como la función potencia de exponente $x - 1 > -1$ es integrable en $]0, 1]$, el criterio de comparación nos dice que f_x también lo es. Por otra parte, la escala de infinitos nos dice que

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{f_x(t)}{e^{-t/2}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{t^{x-1}}{e^{t/2}} = 0$$

y como la función $t \mapsto e^{-t/2}$ es integrable en $[1, +\infty[$, de nuevo el criterio de comparación nos dice que f_x también lo es. Por tanto f es integrable en $\mathbb{R}^+$ como queríamos comprobar.

Pues bien, la función Gamma de Euler se define por

$$\Gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Obsérvese que en particular se tiene

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = \big[-e^{-t}\big]_0^{+\infty} = 1$$

Por otra parte, fijado $x \in \mathbb{R}^+$, sabemos que las funciones f_x y f_{x+1} son integrables en $\mathbb{R}^+$, lo que nos permite usar la fórmula de integración por partes, para obtener que

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\, dt = \big[-t^x e^{-t}\big]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} x\, t^{x-1} e^{-t}\, dt = x\,\Gamma(x)$$

donde también hemos usado que $\lim\limits_{t \to 0} t^x e^{-t} = \lim\limits_{x \to +\infty} t^x e^{-t} = 0$. A partir de aquí deducimos claramente por inducción que

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Este es uno de los aspectos más atractivos de la función Γ, la función $x \mapsto \Gamma(x+1)$ extiende el factorial, de modo que es coherente definir $x! = \Gamma(x+1)$ para todo $x \in]-1, +\infty[$.

Está claro que Γ se ha definido como una integral dependiente de un parámetro. Nuestro objetivo es probar que Γ es derivable, y calcular su derivada, que será otra integral dependiente de un parámetro. Para ello usaremos el teorema de derivación, pero aprovechando el carácter local de la derivada.

Dado un punto $x_0 \in \mathbb{R}^+$, consideramos el intervalo $J = [a, b]$ con $0 < a < x_0 < b$, y definimos la función $\Phi : J \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por

$$\Phi\big(x, t\big) = t^{x-1} e^{-t} \qquad \forall (x,t) \in J \times \mathbb{R}^+$$

Ya hemos visto que, para cada $x \in J$, la función $t \mapsto \Phi\big(x, t\big)$ es integrable en $\mathbb{R}^+$. Eso es lo que nos ha permitido definir

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \Phi\big(x, t\big)\, dt \qquad \forall x \in J$$

Además, es claro que Φ es parcialmente derivable con respecto a la primera variable con

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t) = t^{x-1} e^{-t} \log t \qquad \forall (x,t) \in J \times \mathbb{R}^+$$

y queda comprobar la condición (iii) del teorema de derivación.

Para $t \in \mathbb{R}^+$ con $t \geqslant 1$, la función exponencial de base t es creciente, luego $t^{x-1} \leqslant t^{b-1}$ para todo $x \in J$. En cambio, si $t < 1$, dicha función es decreciente, así que $t^{x-1} \leqslant t^{a-1}$ para todo $x \in J$. En cualquier caso, tenemos

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t) \right| = t^{x-1} e^{-t} |\log t| \leqslant \big(t^{a-1} + t^{b-1}\big) e^{-t} |\log t| \qquad \forall (x,t) \in J \times \mathbb{R}^+$$

Esto nos lleva a considerar la función $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(t) = \big(t^{a-1} + t^{b-1}\big) e^{-t} |\log t| \qquad \forall t \in \mathbb{R}^+$$

Bastará comprobar que g es integrable en $\mathbb{R}^+$, para lo que usaremos de nuevo el criterio de comparación en los intervalos $]0,1]$ y $[1,+\infty[$, teniendo en cuenta que g es continua, luego localmente integrable en $\mathbb{R}^+$. Para el primero tomamos $c \in \mathbb{R}$ con $-1 < c < a-1$, para obtener que

$$\lim_{t\to 0} \frac{g(t)}{t^c} = \lim_{t\to 0} \left(t^{a-1-c} + t^{b-1-c}\right) |\log t| e^{-t} = 0$$

Como la función potencia de exponente $c > -1$ es integrable en $]0,1]$, deducimos que g también lo es. Por otra parte tenemos

$$\lim_{t\to +\infty} \frac{g(t)}{e^{-t/2}} = \lim_{t\to +\infty} \frac{\left(t^{\alpha-1} + t^{\beta-1}\right) |\log t|}{e^{t/2}} = 0$$

y la función $t \mapsto e^{-t/2}$ es integrable en $[1,+\infty[$, luego g también lo es. Así pues, $g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^+)$ y hemos comprobado la condición (iii) del teorema de derivación. Deducimos que $\Gamma\big|_J$ es derivable en J, con la derivada que enseguida escribiremos, y en particular, es derivable en el punto x_0 que habíamos fijado. Como $x_0 \in J^\circ$, el carácter local de la derivada nos permite afirmar que Γ es derivable en x_0, con la misma derivada que $\Gamma\big|_J$. Como $x_0 \in \mathbb{R}^+$ era arbitrario, hemos probado que Γ es derivable en $\mathbb{R}^+$, y su derivada viene dada por

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \log t \, dt \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Es fácil adivinar que el razonamiento empleado con Γ se puede repetir con Γ'. De hecho, es fácil probar por inducción que Γ es una función de clase C^∞ en $\mathbb{R}^+$ y se tiene

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} (\log t)^k \, dt \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+, \ \forall k \in \mathbb{N}$$

Observamos por ejemplo que $\Gamma''(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$, luego Γ es una función convexa.

Veamos finalmente el comportamiento de Γ en el origen. Dada una sucesión $\{x_n\}$ en $\mathbb{R}^+$ con $\{x_n\} \to 0$, consideramos la sucesión $\{f_n\}$ de funciones de $\mathbb{R}^+$ en sí mismo, así como la función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ definidas, para todo $t \in \mathbb{R}^+$, por

$$f_n(t) = t^{x_n-1} e^{-t} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \text{y} \qquad f(t) = t^{-1} e^{-t}$$

Es claro que $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones medibles positivas, que converge puntualmente a f en $\mathbb{R}^+$.

Teniendo en cuenta que $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{t^{-1}} = 1$, y que la función potencia de exponente -1 no es integrable en $]0,1]$, el criterio de comparación nos dice que f no es integrable en $]0,1]$, luego tampoco en $\mathbb{R}^+$. Usando entonces el lema de Fatou, obtenemos que

$$\liminf_{n\to\infty} \Gamma(x_n) = \liminf_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\, dt \geqslant \int_0^{+\infty} f(t)\, dt = \infty$$

Esto prueba que Γ diverge positivamente en el origen.