Tema 7

Integración de funciones reales

Conocida la integral para funciones medibles positivas, pasamos a estudiar la integración de funciones con valores reales. Llegaremos así a la versión definitiva del concepto de integral, que aparecerá como un *funcional lineal positivo*, definido en el espacio vectorial formado por las que llamaremos *funciones integrables*. La propiedad más importante de esta nueva integral es sin duda el *teorema de la convergencia dominada*. Igual que el de la convergencia monótona, este teorema nos proporciona una condición suficiente para permutar la integral con el límite puntual, pero ahora para una sucesión de funciones integrables.

7.1. Funciones integrables

Trabajamos, como hasta ahora, en un conjunto medible $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, que mantenemos fijo. Para una función medible $f : \Omega \to \mathbb{R}$, es decir, para $f \in \mathcal{L}(\Omega)$, pretendemos definir, cuando sea posible, la integral de f sobre un conjunto medible $E \subset \Omega$.

Sabemos que f^+ y f^- son funciones medibles positivas cuyas integrales ya conocemos, y su definición no debería cambiar. Además, queremos que la integral que vamos a definir se comporte linealmente, luego la integral de f ha de ser la diferencia entre las integrales de f^+ y f^-. Para que esta diferencia tenga sentido, y sea un número real, debemos exigir que las integrales de f^+ y f^- sean finitas. En tal caso, la integral de $|f|$ también va a ser finita, ya que $|f| = f^+ + f^-$, pero el recíproco es igualmente cierto, ya que $f^+ \leqslant |f|$ y $f^- \leqslant |f|$. Esto motiva las definiciones que siguen.

Decimos que una función $f \in \mathcal{L}(\Omega)$ es **integrable** sobre un conjunto medible $E \subset \Omega$, cuando verifica que

$$\int_E |f| < \infty$$

En tal caso tenemos $f^+, f^- \in \mathcal{L}^+(\Omega)$ y el crecimiento de la integral ya definida en $\mathcal{L}^+(\Omega)$ nos dice que

$$\int_E f^+ \leqslant \int_E |f| < \infty, \qquad \text{y también,} \qquad \int_E f^- \leqslant \int_E |f| < \infty$$

Podemos por tanto definir la **integral** de f sobre E como el número real dado por

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^-$$

Nótese que esta definición de integral es coherente con lo que habíamos hecho hasta ahora, pues si la función integrable f verifica que $f(\Omega) \subset \mathbb{R}_0^+$, con lo que tenemos $f \in \mathcal{L}^+(\Omega)$, entonces es claro que $f^+ = f$ y $f^- = 0$, luego la integral recién definida coincide con la integral de f como función medible positiva, que ya conocíamos.

Hay otra cuestión de coherencia que conviene aclarar. Fijada una función $f \in \mathcal{L}(\Omega)$ y un conjunto medible $E \subset \Omega$, la restricción $f\big|_E$ es una función medible en E, esto es $f\big|_E \in \mathcal{L}(E)$, luego usando la definición anterior, con E en el papel de Ω, tiene sentido preguntarse si $f\big|_E$ es integrable en E, y en su caso, definir la integral de $f\big|_E$ sobre E. Ahora bien, es obvio que el valor absoluto, la parte positiva y la parte negativa, de $f\big|_E$, coinciden respectivamente con las restricciones a E de las funciones $|f|$, f^+ y f^-. Por otra parte, para $h \in \mathcal{L}^+(\Omega)$, también sabemos que las integrales sobre E de h y de $h\big|_E$ coinciden. Usando esto con $h = |f|$, así como también con $h = f^+$ y $h = f^-$, obtenemos que $f\big|_E$ es integrable en E si, y sólo si, lo es f, en cuyo caso, la integral sobre E de $f\big|_E$ coincide con la de f.

Como primera propiedad de la integral que acabamos de definir, reducimos su estudio al caso $E = \Omega$, como ya hicimos para funciones medibles positivas:

- **Localización.** *Una función $f \in \mathcal{L}(\Omega)$ es integrable en un conjunto medible $E \subset \Omega$ si, y sólo si, $\chi_E f$ es integrable en Ω, en cuyo caso se tiene:*

$$\int_E f = \int_\Omega \chi_E f \tag{1}$$

Usando la localización de la integral para funciones medibles positivas tenemos que

$$\int_E |f| = \int_\Omega \chi_E |f| = \int_\Omega |\chi_E f|$$

luego f es integrable en E si, y sólo si, $\chi_E f$ es integrable en Ω. En tal caso, como también es claro que $\big(\chi_E f\big)^+ = \chi_E f^+$ y $\big(\chi_E f\big)^- = \chi_E f^-$, razonando con estas funciones igual que hemos hecho con el valor absoluto, obtenemos claramente la igualdad (1). ■

A partir de este momento, trabajamos sobre todo con integrales sobre Ω, pues siempre se podrá usar la idea anterior para extender cualquier resultado al caso general.

Denotaremos por $\mathcal{L}_1(\Omega)$ al conjunto de todas las funciones integrables en Ω, a las que nos referiremos simplemente como **funciones integrables**. Está claro que $\mathcal{L}_1(\Omega) \subset \mathcal{L}(\Omega)$, y pronto veremos que $\mathcal{L}_1(\Omega)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(\Omega)$.

Conviene aclarar que no se verifica ninguna inclusión entre $\mathcal{L}_1(\Omega)$ y $\mathcal{L}^+(\Omega)$. Una función integrable puede tomar valores negativos, mientras que una función medible positiva puede no ser integrable, bien porque tome el valor ∞, o bien porque su integral sea ∞.

Como primera propiedad verdaderamente relevante de la nueva integral, comprobamos que se comporta como pretendíamos al definirla.

- **Linealidad.** *$\mathcal{L}_1(\Omega)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(\Omega)$ y definiendo $I(f) = \int_\Omega f$ para toda $f \in \mathcal{L}_1(\Omega)$, se obtiene una aplicación lineal $I : \mathcal{L}_1(\Omega) \to \mathbb{R}$.*

Para $f, g \in \mathcal{L}_1(\Omega)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene que $|\alpha f + g| \leqslant |\alpha|\, |f| + |g|$, con lo que, usando propiedades conocidas de la integral en $\mathcal{L}^+(\Omega)$, obtenemos:

$$\int_\Omega |\alpha f + g| \leqslant |\alpha| \int_\Omega |f| + \int_\Omega |g| < \infty$$

Luego $\alpha f + g$ es integrable, y esto prueba que $\mathcal{L}_1(\Omega)$ es subespacio vectorial de $\mathcal{L}(\Omega)$.

Para la linealidad de I, vemos que $(f+g)^+ - (f+g)^- = f+g = f^+ - f^- + g^+ - g^-$, o lo que es lo mismo,

$$(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+$$

En ambos miembros tenemos una suma de funciones medibles positivas, luego podemos usar que la integral en $\mathcal{L}^+(\Omega)$ es aditiva con respecto al integrando, para obtener que

$$I\big((f+g)^+\big) + I\big(f^-\big) + I\big(g^-\big) = I\big((f+g)^-\big) + I\big(f^+\big) + I\big(g^+\big)$$

de donde deducimos obviamente que $I\big(f+g\big) = I\big(f\big) + I\big(g\big)$. Sólo queda probar que, para cualesquiera $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f \in \mathcal{L}_1(\Omega)$, se tiene

$$I\big(\alpha f\big) = \alpha I\big(f\big) \tag{2}$$

Si $\alpha \geqslant 0$, vemos que $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$ y $(\alpha f)^- = \alpha f^-$, luego basta usar la homogeneidad de la integral en $\mathcal{L}^+(\Omega)$:

$$I\big(\alpha f\big) = I\big(\alpha f^+\big) - I\big(\alpha f^-\big) = \alpha\, I\big(f^+\big) - \alpha\, I\big(f^-\big) = \alpha\, I\big(f\big)$$

Para el caso $\alpha = -1$, observamos que $(-f)^+ = f^-$ y $(-f)^- = f^+$, de donde deducimos que $I\big(-f\big) = -I\big(f\big)$. Finalmente, si $\alpha \in \mathbb{R}^-$, usando los dos casos ya resueltos, obtenemos:

$$I\big(\alpha f\big) = -I\big(-\alpha f\big) = -(-\alpha) I\big(f\big) = \alpha\, I\big(f\big)$$

Así pues, hemos probado (2) en todos los casos, lo que concluye la demostración. ■

La otra propiedad básica de la integral se refiere a la relación de orden entre funciones. Recuérdese que, para $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$, se tiene $f \leqslant g$, cuando $f(x) \leqslant g(x)$ para todo $x \in \Omega$.

- **Positividad.** *Si $h \in \mathcal{L}_1(\Omega)$ verifica que $h \geqslant 0$, entonces $\int_\Omega h \geqslant 0$. Por tanto:*

  (i) $f, g \in \mathcal{L}_1(\Omega)$, $\quad f \leqslant g \implies \displaystyle\int_\Omega f \leqslant \int_\Omega g$

  (ii) $\displaystyle\left|\int_\Omega f\right| \leqslant \int_\Omega |f| \quad \forall f \in \mathcal{L}_1(\Omega)$

La primera afirmación es obvia, ya que $h \in \mathcal{L}_1(\Omega) \cap \mathcal{L}^+(\Omega)$ luego su integral es un número real no negativo. Para deducir (i) basta tomar $h = g - f \geqslant 0$ y usar la linealidad de la integral:

$$0 \leqslant \int_\Omega (g-f) = \int_\Omega g - \int_\Omega f, \qquad \text{luego} \qquad \int_\Omega f \leqslant \int_\Omega g$$

Finalmente, para obtener (ii), dada $f \in \mathcal{L}_1(\Omega)$, se tiene $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$, y usando (i) obtenemos:

$$-\int_\Omega |f| \leqslant \int_\Omega f \leqslant \int_\Omega |f|$$

que equivale a la desigualdad buscada. ■

Es costumbre usar el término “funcional” para referirse a una aplicación que esté definida en un espacio vectorial formado por funciones, y tome valores en el cuerpo escalar. Por eso, los resultados anteriores se resumen diciendo que la integral es un **funcional lineal positivo** en el espacio vectorial $\mathcal{L}_1(\Omega)$ de las funciones integrables. La afirmación (i) del último enunciado, muestra el *crecimiento* de la integral, la misma propiedad que teníamos en $\mathcal{L}^+(\Omega)$, mientras que la desigualdad que aparece en (ii) es la que casi siempre se usa para acotar una integral.

7.2. Segundo teorema de convergencia

En paralelismo con el teorema de la convergencia monótona, pero con funciones integrables, nos preguntamos si podemos permutar la integral con el límite puntual de una sucesión de funciones. Más concretamente, si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones integrables, que converge puntualmente en Ω a una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$, nos preguntamos si f es integrable, y en tal caso, si podemos asegurar que

$$\int_\Omega f = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \tag{3}$$

En general, la respuesta a ambas preguntas es negativa, como vamos a comprobar.

En principio, sabemos que f es medible, como límite puntual de una sucesión de funciones medibles, pero puede no ser integrable, como ocurre en el siguiente ejemplo.

En el caso $\Omega = \mathbb{R}^N$, sea f_n la función característica del intervalo $[-n, n]^N$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $f_n \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^N)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y vemos que $\{f_n\}$ converge puntualmente a f en $\mathbb{R}^N$, donde $f(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, pero f no es integrable.

En el ejemplo dado, $\{f_n\}$ es una sucesión creciente de funciones medibles positivas, y también $f \in \mathcal{L}^+(\Omega)$. Como afirma el teorema de la convergencia monótona, usando la integral en $\mathcal{L}^+(\Omega)$, ciertamente se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^N} f = \infty = \lim_{n\to\infty} (2n)^N = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} f_n$$

luego en $[0, \infty]$ se cumple la igualdad (3), pero eso sólo confirma que f no es integrable. Por otra parte, aún cuando f sea integrable, y aunque la convergencia sea uniforme, puede que no se verifique (3), como ocurrirá en nuestro segundo ejemplo.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea ahora $g_n = (2n)^{-N} f_n$. Entonces $g_n \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^N)$, con $\int_{\mathbb{R}^N} g_n = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Tomando $g(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, vemos que de hecho $\{g_n\}$ converge uniformemente a g en $\mathbb{R}^N$. Ciertamente se tiene $g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^N)$ pero

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} g_n = 1 \neq 0 = \int_{\mathbb{R}^N} g$$

Así pues, es natural buscar condiciones suficientes para que las dos preguntas planteadas tengan respuesta afirmativa. La más útil es la que aparece en el siguiente enunciado, consistente en suponer que nuestra sucesión de funciones está "dominada" por una función integrable.

Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones reales medibles, que converge puntualmente en Ω a una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Supongamos que existe una función integrable $g : \Omega \to \mathbb{R}_0^+$ tal que:*

$$\big|f_n(x)\big| \leqslant g(x) \qquad \forall x \in \Omega, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Entonces f es integrable y se verifica que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f| = 0, \qquad \text{de donde,} \qquad \int_\Omega f = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \tag{4}$$

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, de $|f_n| \leqslant g$ y $g \in \mathcal{L}_1(\Omega)$ se deduce que $f_n \in \mathcal{L}_1(\Omega)$. Por otra parte, para cada $x \in \Omega$, vemos que $|f(x)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(x)| \leqslant g(x)$. Por tanto, se tiene también $|f| \leqslant g$, de donde deducimos igualmente que $f \in \mathcal{L}_1(\Omega)$. Se trata ahora de probar la primera afirmación de (4), de la que fácilmente obtendremos la segunda.

Sea pues $\rho_n = \int_\Omega |f_n - f|$, para todo $n \in \mathbb{N}$, con lo que $\{\rho_n\}$ es una sucesión de números reales no negativos, y queremos probar que $\{\rho_n\} \to 0$. Para abreviar la notación, escribimos también $\rho = \int_\Omega (2g)$. La idea clave será usar el lema de Fatou para una conveniente sucesión de funciones. Concretamente tomamos $g_n = 2g - \big|f_n - f\big|$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $|f_n - f| \leqslant |f_n| + |f| \leqslant 2g$ para todo $n \in \mathbb{N}$, vemos que $\{g_n\}$ es una sucesión de funciones medibles positivas que converge puntualmente en Ω a la función $2g$. De paso vemos que $\rho_n \leqslant \rho$ para todo $n \in \mathbb{N}$. El lema de Fatou y la linealidad de la integral nos dicen que

$$\rho = \int_\Omega (2g) = \int_\Omega \liminf_{n\to\infty} g_n \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega g_n = \liminf_{n\to\infty} \big(\rho - \rho_n\big) \tag{5}$$

lo que nos llevará inmediatamente al resultado que buscamos.

Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\inf\left\{\rho - \rho_k : k \geqslant n\right\} = \rho - \sup\left\{\rho_k : k \geqslant n\right\}$ de donde, al tomar límites, obtenemos que $\liminf\limits_{n\to\infty}\left(\rho - \rho_n\right) = \rho - \limsup\limits_{n\to\infty} \rho_n$. Por tanto en (5) teníamos

$$\rho \leqslant \rho - \limsup_{n\to\infty} \rho_n\,, \qquad \text{es decir,} \qquad \limsup_{n\to\infty} \rho_n \leqslant 0$$

pero siendo $\rho_n \geqslant 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, esto significa que $\{\rho_n\} \to 0$.

La segunda afirmación de (4) se deduce claramente de la primera, usando la linealidad y positividad de la integral, que nos permiten escribir:

$$\left|\int_\Omega f_n - \int_\Omega f\right| = \left|\int_\Omega \big(f_n - f\big)\right| \leqslant \int_\Omega |f_n - f| \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \blacksquare$$

Naturalmente, el teorema anterior puede usarse para sucesiones de funciones que vengan dadas en forma de series, pero ello no aporta ninguna novedad. A la hora de trabajar con series de funciones integrables, suele ser bastante más útil el siguiente resultado, que a veces se conoce como *teorema de la convergencia absoluta*. Nos asegura de entrada la convergencia absoluta de una serie de funciones, salvo en un conjunto de medida nula, para después permitirnos permutar la integral con la suma de la serie. Para probarlo, no sólo usaremos el teorema anterior, sino también el de la convergencia monótona.

- *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones integrables, tal que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\int_\Omega |f_n| < \infty$. Entonces, la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge absolutamente en un conjunto $E \subset \Omega$, con $\lambda(\Omega\setminus E) = 0$. Además, definiendo $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \chi_E(x)\, f_n(x)$ para todo $x \in \Omega$, se tiene que $f \in \mathcal{L}_1(\Omega)$ con $\displaystyle\int_\Omega f = \sum_{n=1}^{\infty}\int_\Omega f_n$.*

Para cualesquiera $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \Omega$ definimos

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |f_k(x)| \qquad \text{y} \qquad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \in [0,\infty]$$

Vemos que $\{g_n\}$ es una sucesión creciente de funciones medibles positivas, que converge a la función g, puntualmente en Ω. Usando el teorema de la convergencia monótona obtenemos entonces que

$$\int_\Omega g = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega g_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_\Omega |f_k| = \sum_{n=1}^{\infty}\int_\Omega |f_n| < \infty$$

Por tener integral finita, la función g es finita c.p.d., es decir, existe $E \subset \Omega$ con $\lambda(\Omega\setminus E) = 0$ tal que $g(x) < \infty$ para todo $x \in E$, con lo que la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge absolutamente en E. Como consecuencia la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \chi_E\, f_n$ converge absolutamente en Ω, luego también puntualmente, lo que permite definir la función f del enunciado.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $\chi_E f_n$ coincide con f_n en E, de donde se deduce claramente que $\chi_E f_n$ es integrable y su integral coincide con la de f_n. Por análogo motivo, vemos también que $\chi_E g \in \mathcal{L}_1(\Omega)$ y que la integral de $\chi_E g$ coincide con la de g.

Tenemos por tanto una sucesión $\{S_n\} = \sum_{n \geqslant 1} \chi_E f_n$ de funciones integrables, que converge puntualmente a f en Ω. Además, para cualesquiera $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \Omega$ se tiene claramente que

$$\left| S_n(x) \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} \chi_E(x) f_k(x) \right| \leqslant \chi_E(x) \sum_{k=1}^{n} |f_k(x)| \leqslant \chi_E(x)\, g(x)$$

Usando ahora el teorema de la convergencia dominada, concluimos que $f \in \mathcal{L}_1(\Omega)$, con

$$\int_\Omega f = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_\Omega \chi_E f_k = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega \chi_E f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega f_n \qquad \blacksquare$$

7.3. Aditividad y continuidad absoluta

Completamos las propiedades de la integral, estudiando su dependencia del conjunto en el que se integra. Dada una función integrable $f \in \mathcal{L}_1(\Omega)$, y un conjunto medible $E \subset \Omega$, se tiene

$$\int_E |f| \leqslant \int_\Omega |f| < \infty$$

luego f es integrable en E, lo que permite definir la función $\Phi_f : \mathcal{M} \cap \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\Phi_f(E) = \int_E f \qquad \forall E \in \mathcal{M} \cap \mathcal{P}(\Omega)$$

Cuando hablamos de la integral como función del conjunto en el que se integra, nos referimos obviamente a la función Φ_f. Recordemos que, cuando f era una función medible positiva, Φ_f era σ-aditiva, y por tanto una medida. Aunque hasta ahora la σ-aditividad sólo se ha usado para funciones con valores en $[0, \infty]$, está claro cómo debemos entenderla para funciones con valores reales.

- **Aditividad.** *Dada una función integrable $f \in \mathcal{L}_1(\Omega)$, la función Φ_f es σ-aditiva, es decir, si $E = \biguplus_{n=1}^{\infty} E_n$ con $E_n \in \mathcal{M} \cap \mathcal{P}(\Omega)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces se tiene que*

$$\Phi_f(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_f(E_n)$$

Usando la aditividad de la integral para funciones medibles positivas, obtenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f^+ = \int_E f^+ < \infty \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f^- = \int_E f^- < \infty$$

Resaltamos que las dos series que acaban de aparecer convergen en $\mathbb{R}$, puesto que sus sumas son sendos números reales. Deducimos claramente que

$$\Phi_f(E) = \int_E f^+ - \int_E f^- = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{E_n} f^+ - \int_{E_n} f^- \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_f(E_n) \qquad \blacksquare$$

Igual que ocurre cuando trabajamos con una medida, de la σ-aditividad se deducen los dos tipos de continuidad que aparecen en el siguiente enunciado:

- *Para $f \in \mathcal{L}_1(\Omega)$, la función Φ_f es crecientemente y decrecientemente continua, es decir, si $\{A_n\}$ es una sucesión de subconjuntos medibles de Ω, verificando que $\{A_n\} \nearrow A$, o bien que $\{A_n\} \searrow A$, entonces se tiene que $\{\Phi_f(A_n)\} \to \Phi_f(A)$, es decir:*

$$\int_A f = \lim_{n \to \infty} \int_{A_n} f$$

En el caso $\{A_n\} \nearrow A$, para cada $n \in \mathbb{N}$ tomamos $E_n = A_n \setminus A_{n-1} \in \mathcal{M}$, donde $A_0 = \emptyset$. Es claro que entonces $A = \biguplus_{n=1}^{\infty} E_n$, como también $A_n = \biguplus_{k=1}^{n} E_k$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Usando ahora que Φ_f es σ-aditiva, y en particular finitamente aditiva, obtenemos:

$$\Phi_f(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_f(E_n) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \Phi_f(E_k) = \lim_{n \to \infty} \Phi_f(A_n)$$

En el caso $\{A_n\} \searrow A$, tenemos $\{\Omega \setminus A_n\} \nearrow \Omega \setminus A$. Usando la continuidad creciente ya demostrada, y dos veces la aditividad finita de Φ_f, obtenemos

$$\Phi_f(A) = \Phi_f(\Omega) - \Phi_f(\Omega \setminus A) = \lim_{n \to \infty} \big(\Phi_f(\Omega) - \Phi_f(\Omega \setminus A_n) \big) = \lim_{n \to \infty} \Phi_f(A_n) \qquad \blacksquare$$

Hay un tipo de continuidad más importante que las dos recién obtenidas. Concretamente, la integral tiende a cero cuando la medida del conjunto sobre el que se integra tiende a cero:

- **Continuidad absoluta.** *Dada una función integrable $f \in \mathcal{L}_1(\Omega)$, para cada $\varepsilon > 0$ puede encontrarse $\delta > 0$ verificando que, si E es un subconjunto medible de Ω con $\lambda(E) < \delta$, entonces se tiene $\int_E |f| < \varepsilon$, y por tanto, $\left| \int_E f \right| < \varepsilon$.*

Razonando por reducción al absurdo, supongamos que $\varepsilon_0 > 0$ no verifica la afirmación del enunciado, para llegar a una contradicción. Entonces, para cada $k \in \mathbb{N}$ existirá un conjunto medible $E_k \subset \Omega$ verificando que

$$\lambda(E_k) < \frac{1}{2^{k+1}} \qquad \text{pero} \qquad \int_{E_k} |f| \geqslant \varepsilon_0$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomamos ahora $A_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$, obteniendo una sucesión decreciente $\{A_n\}$ de subconjuntos medibles de Ω. Observamos que, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\lambda(A_n) \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^n} \qquad \text{y} \qquad \int_{A_n} |f| \geqslant \int_{E_n} |f| \geqslant \varepsilon_0$$

Si ahora escribimos $\{A_n\} \searrow A$, tenemos un conjunto medible $A \subset \Omega$, y usando la continuidad decreciente de la integral de $|f|$ obtenemos que

$$\int_A |f| = \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} |f| \geqslant \varepsilon_0$$

Pero por otra parte, tenemos $\lambda(A) \leqslant \lambda(A_n) \leqslant 1/2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $\lambda(A) = 0$, de donde se deduce que $\int_A |f| = 0$, y hemos llegado a la contradicción que buscábamos. ■

En términos de sucesiones de conjuntos, la continuidad absoluta se expresa como sigue:

- *Sea $\{E_n\}$ una sucesión de subconjuntos medibles de Ω y E otro subconjunto medible de Ω, verificando que $\{\lambda(E_n \setminus E) + \lambda(E \setminus E_n)\} \to 0$. Se tiene entonces que*

$$\int_E f = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f \qquad \forall f \in \mathcal{L}_1(\Omega)$$

Fijada $f \in \mathcal{L}_1(\Omega)$, la aditividad finita de su integral nos dice que, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\int_{E_n} f = \int_{E_n \cap E} f + \int_{E_n \setminus E} f \qquad \text{y} \qquad \int_E f = \int_{E_n \cap E} f + \int_{E \setminus E_n} f$$

Por otra parte, de la continuidad absoluta de la integral de f deducimos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E_n \setminus E} f = \lim_{n\to\infty} \int_{E \setminus E_n} f = 0$$

Las dos observaciones anteriores nos llevan claramente al resultado que buscamos:

$$\left\{ \int_{E_n} f - \int_E f \right\} = \left\{ \int_{E_n \setminus E} f - \int_{E \setminus E_n} f \right\} \to 0 \qquad ■$$

El principal interés del resultado anterior estriba en que no exige que la sucesión $\{E_n\}$ sea creciente o decreciente. Si embargo, conviene aclarar que, en general, no llega a implicar la continuidad creciente o decreciente de la integral. Concretamente, de $\{E_n\} \nearrow E$ no podemos deducir que $\{\lambda(E \setminus E_n)\} \to 0$, a menos que se tenga $\lambda(E) < \infty$. Análogamente, si $\{E_n\} \searrow E$, para poder asegurar que $\{\lambda(E_n \setminus E)\} \to 0$, necesitamos que $\lambda(E_n) < \infty$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

7.4. Integración en conjuntos de medida finita

Algunas de las propiedades de la integral se simplifican notablemente cuando trabajamos en un conjunto de medida finita, es decir, cuando se tiene $\lambda(\Omega) < \infty$. De entrada, una propiedad bien fácil de comprobar es suficiente para que una función sea integrable:

- *Si $\lambda(\Omega) < \infty$, toda función medible y acotada en Ω es integrable.*

De hecho, si $f \in \mathcal{L}(\Omega)$ está acotada, y tomamos $M \in \mathbb{R}^+$ verificando que $|f(x)| \leqslant M$ para todo $x \in \Omega$, tenemos claramente que

$$\int_\Omega |f| \leqslant \int_\Omega M = M\lambda(\Omega) < \infty$$

luego $f \in \mathcal{L}_1(\Omega)$ como queríamos. ■

Siguiendo la misma idea, el teorema de la convergencia dominada también toma una forma más sencilla:

- *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones reales medibles, que converge puntualmente en Ω a una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Supongamos por una parte que $\lambda(\Omega) < \infty$, y por otra que existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $\left|f_n(x)\right| \leqslant M$ para cualesquiera $x \in \Omega$ y $n \in \mathbb{N}$. Entonces f es integrable y se verifica que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f| = 0$, de donde $\int_\Omega f = \lim\limits_{n\to\infty} \int_\Omega f_n$.*

Basta usar el teorema de la convergencia dominada con $g(x) = M$ para todo $x \in \Omega$, pues la condición $\lambda(\Omega) < \infty$ hace que g sea integrable. ■

Comprobamos finalmente que, a diferencia de lo que ocurría en un ejemplo que vimos anteriormente, cuando trabajamos en un conjunto de medida finita, la convergencia uniforme sí es suficiente para permutar la integración con el paso al límite de una sucesión de funciones.

- *Supongamos que $\lambda(\Omega) < \infty$ y sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones integrables en Ω, que converge uniformemente en Ω a una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Entonces $f \in \mathcal{L}_1(\Omega)$ y se verifica que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f| = 0$, de donde $\int_\Omega f = \lim\limits_{n\to\infty} \int_\Omega f_n$.*

Descartando el caso trivial $\lambda(\Omega) = 0$, para cada $\varepsilon > 0$, la convergencia uniforme nos asegura que existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geqslant m$, se tiene $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon/\lambda(\Omega)$ para todo $x \in \Omega$. En particular la función medible $f_m - f$ está acotada, luego es integrable, de donde deducimos que $f = f_m - (f_m - f)$ también lo es. Pero entonces, para $n \geqslant m$ tenemos que

$$\int_\Omega |f_n - f| \leqslant \int_\Omega \frac{\varepsilon}{\lambda(\Omega)} = \varepsilon$$

y esto prueba que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f| = 0$. La última afirmación del enunciado se deduce de la recién demostrada, como ya hicimos anteriormente: basta tener en cuenta que

$$\left|\int_\Omega f_n - \int_\Omega f\right| = \left|\int_\Omega \big(f_n - f\big)\right| \leqslant \int_\Omega |f_n - f| \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$ ■