Tema 2

Series de funciones

De forma análoga a como se definen las series de números reales, a partir de las sucesiones, vamos a considerar ahora las series de funciones. Nuestro principal objetivo consiste en estudiar una nueva forma de convergencia, la llamada *convergencia absoluta*, que es muy adecuada para trabajar con las sucesiones de funciones que vengan definidas en forma de series. Como principal resultado, probaremos el *test de Weierstrass*, que es el criterio más útil para estudiar la convergencia de una serie de funciones.

2.1. Concepto de serie de funciones

Seguimos trabajando en un conjunto no vacío A y, salvo que se diga lo contrario, todas las funciones que aparezcan estarán definidas en A, con valores en $\mathbb{R}$. Conviene recordar que el conjunto $\mathcal{F}(A)$ de tales funciones es un grupo abeliano con la suma definida de forma natural:

$$\big(f+g\big)(x) = f(x) + g(x) \qquad \forall x \in A\,, \ \forall f,g \in \mathcal{F}(A)$$

Dada una sucesión de funciones $\{f_n\}$, podemos considerar la sucesión $\{S_n\}$ definida por

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k \quad \forall n \in \mathbb{N}\,, \qquad \text{es decir,} \qquad S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_n(x) \quad \forall x \in A\,, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Decimos que $\{S_n\}$ es una **serie de funciones**, que se denota por $\sum_{n\geqslant 1} f_n$. También se dice que la sucesión $\{f_n\}$ es el **término general** de la serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n$, o bien que $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ es la serie de término general $\{f_n\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, suele también decirse que S_n es la n-ésima **suma parcial** de la serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n$. Incluso se dice a veces que $\{S_n\}$ es la sucesión de sumas parciales de dicha serie. Debe quedar claro que una serie de funciones, y su sucesión de sumas parciales, son exactamente la misma cosa. En éste, como en otros aspectos que iremos repasando, las series de funciones se comportan igual que las series de números reales.

Ha quedado claro que una serie de funciones no es más que una sucesión de funciones, definida a partir de otra, de una forma concreta. Pero recíprocamente, vamos a ver que toda sucesión de funciones puede expresarse como serie. Concretamente, si $\{g_n\}$ es una sucesión de funciones, definiendo por comodidad $g_0(x) = 0$ para todo $x \in A$, se tiene

$$\{g_n\} = \sum_{n \geqslant 1} f_n, \qquad \text{donde} \qquad f_n = g_n - g_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

De hecho, esto significa que $g_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo cual se comprueba por inducción sobre n, sin ninguna dificultad.

Así pues, estudiar las series de funciones equivale a estudiar las sucesiones de funciones, pero con otra notación y terminología. Hablando intuitivamente, el estudio de las series de funciones responde a la idea de sumar todos los términos de una sucesión de funciones.

2.2. Convergencia puntual y uniforme

Como sucesión de funciones que es, sabemos que una serie de funciones $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge en un punto $x \in A$ cuando la sucesión $\{S_n(x)\} = \left\{\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right\}$ converge, lo que equivale a que la serie de números reales $\sum_{n \geqslant 1} f_n(x)$ sea convergente.

En lo que sigue, fijamos un conjunto no vacío $C \subset A$. Vemos que la serie $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge puntualmente en C, cuando la serie $\sum_{n \geqslant 1} f_n(x)$ es convergente, para todo $x \in C$. En tal caso, el límite puntual recibe el nombre de **suma de la serie** $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ en el conjunto C. Por supuesto, estamos hablando de la función $f : C \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} S_n(x) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad \forall x \in C$$

Vemos ahora que la serie $\sum_{n \geqslant 1} f_n$ converge uniformemente en C cuando verifica que

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists m \in \mathbb{N} : n \geqslant m \quad \Rightarrow \quad \left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right| < \varepsilon \quad \forall x \in C \tag{1}$$

Como se puede adivinar, en la práctica no se suele conocer explícitamente la función f, lo que hace difícil averiguar si se cumple (1). Como alternativa, disponemos del criterio de Cauchy para la convergencia uniforme.

Sabemos que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformemente en C si, y sólo si, es uniformemente de Cauchy en C, lo que puede expresarse de la siguiente forma

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \, m \in \mathbb{N} \,:\, m \leqslant p < q \quad \Longrightarrow \quad \left| \sum_{k=p+1}^{q} f_k(x) \right| < \varepsilon \quad \forall x \in C \tag{2}$$

Esta afirmación no involucra la suma de la serie, y nos permitirá más adelante obtener una útil condición suficiente para la convergencia uniforme de una serie de funciones.

Igual que ocurre con las series de números reales, conviene a veces numerar los sumandos que intervienen en una serie de funciones, de forma que el primer sumando se denote por f_0 en vez de f_1. Alternativamente, fijado $m \in \mathbb{N}$, nos puede interesar que el primer sumando sea f_{m+1}. Para tener esta flexibilidad, dada una sucesión de funciones $\{f_n\}$, y en su caso una función f_0, definimos las series siguientes:

$$\sum_{n\geqslant 0} f_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n\geqslant 1} f_{n-1} = \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} f_k \right\} \qquad \text{y} \qquad \sum_{n\geqslant m+1} f_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n\geqslant 1} f_{m+n} = \left\{ \sum_{k=m+1}^{m+n} f_k \right\} \tag{3}$$

Naturalmente, al trabajar con la segunda serie, no es necesario definir f_n para $n \leqslant m$.

Si las series definidas en (3) convergen puntualmente en C, sus sumas vienen dadas, para todo $x \in C$, por

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{n-1}(x) \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=m+1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{m+n}(x)$$

Veamos que las tres series consideradas, se comportan de la misma forma a efectos de convergencia. Escribiendo $\{S_n\} = \sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$, $\{U_n\} = \sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ y $\{V_n\} = \sum\limits_{n\geqslant m+1} f_n$, es claro que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene

$$U_{n+1} = f_0 + S_n \qquad \text{y} \qquad S_{m+n} = \sum_{k=1}^{m} f_k + V_n \tag{4}$$

La convergencia puntual de la serie $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ en el conjunto C, equivale a la de la sucesión $\{U_{n+1}\}$, que por la primera igualdad anterior, equivale a la de $\{S_n\}$, es decir, a la de la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$. Del mismo modo, por la segunda igualdad, la convergencia puntual de la serie $\sum\limits_{n\geqslant m+1} f_n$ en C, equivale a la de la sucesión $\{S_{m+n}\}$, que a su vez equivale a la de la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$. Suponiendo que las tres series convergen puntualmente en C, consideremos sus sumas, que son las funciones definidas, para todo $x \in C$, por

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\,, \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,, \qquad h(x) = \sum_{n=m+1}^{\infty} f_n(x)$$

En vista de (4), la relación entre las anteriores funciones es la que cabe esperar:

$$g = f_0 + f \qquad \text{y} \qquad f = \sum_{k=1}^{m} f_k + h \tag{5}$$

De (4) y (5) deducimos que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene

$$U_{n+1} - g = S_n - f \qquad \text{y} \qquad S_{m+n} - f = V_n - h \tag{6}$$

Es claro que la convergencia uniforme en C de las sucesiones $\{U_{n+1}\}$ y $\{S_{m+n}\}$, equivale a la de $\{U_n\}$ y $\{S_n\}$, respectivamente. Por tanto, usando las igualdades (6), y razonando como hicimos antes para la convergencia puntual, comprobamos que la convergencia uniforme de la serie $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n$ en C, equivale a la de $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n$, que a su vez equivale a la de $\sum\limits_{n \geqslant m+1} f_n$.

La discusión anterior permite asociar a cada serie que converja puntualmente, otra sucesión de funciones, mediante la cual se puede caracterizar la convergencia uniforme. Concretamente, supongamos que la serie $\sum\limits_{k \geqslant 1} f_k$ converge puntualmente en C, y sea $f : C \to \mathbb{R}$ su suma. Hemos visto que, para cada $n \in \mathbb{N}$, la serie $\sum\limits_{k \geqslant n+1} f_k$ también converge puntualmente en C, así como la relación de su suma con f. Ello permite considerar la sucesión de funciones $\{R_n\}$ dada por

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) = f(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \qquad \forall x \in C, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Se dice que la sucesión $\{R_n\}$ es el **resto** de la serie $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n$ en C. De la igualdad usada para definirla, se deduce obviamente que $\{R_n\}$ converge puntualmente a cero en C. Pero además, la condición (1) para la convergencia uniforme, toma ahora la siguiente forma

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, m \in \mathbb{N} \, : \, n \geqslant m \implies \big|R_n(x)\big| < \varepsilon \quad \forall x \in C$$

Deducimos que la serie $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n$ converge uniformemente en C si, y sólo si, su resto converge uniformemente a cero en C.

Mencionemos ahora una clara condición necesaria para la convergencia uniforme de una serie de funciones. La serie $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n$ converge en un punto $x \in A$ cuando la serie de números reales $\sum\limits_{n \geqslant 1} f_n(x)$ converge, para lo cual es condición necesaria que se tenga $\{f_n(x)\} \to 0$. La forma en que se demuestra este hecho bien conocido, permite obtener el resultado análogo para la convergencia uniforme. Concretamente, supongamos que la serie $\{S_n\} = \sum\limits_{n \geqslant 1} f_n$ converge uniformemente en C y sea $f : C \to \mathbb{R}$ su suma. Dado $\varepsilon > 0$ tenemos $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \in \mathbb{N}, \ n \geqslant m \quad \implies \quad \big|S_n(x) - f(x)\big| < \varepsilon/2 \quad \forall x \in C$$

Entonces, para $n \geqslant m+1$, y para todo $x \in C$, se tiene que

$$\big|f_n(x)\big| = \big|S_n(x) - S_{n-1}(x)\big| \leqslant \big|S_n(x) - f(x)\big| + \big|f(x) - S_{n-1}(x)\big| < \varepsilon$$

luego la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente a cero en C, y hemos probado lo que sigue.

- *Si una serie de funciones converge uniformemente en un conjunto, entonces su término general converge uniformemente a cero en dicho conjunto.*

Para comprobar que el recíproco del resultado anterior es falso, basta pensar que toda serie de números reales puede verse como una serie de funciones constantes. De hecho, si tomamos por ejemplo $f_n(x) = 1/n$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y todo $n \in \mathbb{N}$, es obvio que la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente a cero en $\mathbb{R}$, pero la serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ no converge en ningún punto de $\mathbb{R}$.

Antes de estudiar otro tipo de convergencia, muy adecuado para las series de funciones, repasamos la relación que guarda la convergencia uniforme con la continuidad, la derivación y la integración de funciones. Se trata exactamente de los mismos tres resultados que conocemos para sucesiones de funciones, sólo que enunciados equivalentemente, en términos de series. Empezamos por la continuidad:

- *Sea A un espacio topológico, $x_0 \in A$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : A \to \mathbb{R}$ una función continua en el punto x_0. Supongamos que la serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformemente en un entorno U del punto x_0, y sea $f : U \to \mathbb{R}$ su suma, es decir,*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad \forall x \in U$$

Entonces f es continua en el punto x_0.

Basta pensar que, para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ es continua en el punto x_0, y que la sucesión $\{S_n\}$ converge uniformemente a f en U. ■

Para derivar la suma de una serie de funciones derivables, deberemos suponer que la serie de las derivadas converge uniformemente. Entonces la derivada de la suma de nuestra serie coincide con la suma de la serie de las derivadas, como si se tratase de una suma finita:

- *Dado un intervalo acotado no trivial $J \subset \mathbb{R}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : J \to \mathbb{R}$ una función derivable en J. Supongamos que la serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n{}'$ converge uniformemente en J, y que existe $a \in J$, tal que la serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n(a)$ es convergente. Entonces, la serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformemente en J y, definiendo $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ para todo $x \in J$, se tiene que la función $f : J \to \mathbb{R}$ es derivable en J con $f\,'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n{}'(x)$ para todo $x \in J$.*

Para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$, es derivable en J, con $S_n' = \sum_{k=1}^{n} f_k{}'$. Así pues, por hipótesis tenemos que $\{S_n'\}$ converge uniformemente en J, mientras que $\{S_n\}$ converge en el punto a. Basta por tanto usar el resultado que conocemos para sucesiones. ■

Finalmente, veamos que podemos permutar la integral con la suma de una serie de funciones continuas, que converja uniformemente en un intervalo compacto:

- *Sean* $a,b \in \mathbb{R}$ *con* $a < b$ *y, para cada* $n \in \mathbb{N}$, *sea* $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una función continua. Si la serie* $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ *converge uniformemente en* $[a,b]$, *se tiene que*

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k$ es continua en $[a,b]$, y estamos suponiendo que la sucesión $\{S_n\}$ converge uniformemente en $[a,b]$, luego usando el resultado que conocemos para sucesiones de funciones, concluimos que

$$\begin{aligned} \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx &= \int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} S_n(x) \right) dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b S_n(x)\, dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_a^b f_k(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx \end{aligned}$$

donde también hemos usado la linealidad de la integral. ■

2.3. Convergencia absoluta

A la hora de estudiar la convergencia puntual de una serie de funciones $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$, dado $x \in A$, deberemos ver si la serie de números reales $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$ es convergente. Para ello, es natural empezar averiguando si dicha serie converge absolutamente, es decir, si la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left| f_n(x) \right|$ es convergente, usando algún criterio de convergencia para series de términos positivos. Esto nos lleva claramente a pensar en la serie de funciones $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left| f_n \right|$, con lo que aparece un nuevo tipo de convergencia para series de funciones. Seguimos trabajando con un conjunto no vacío $C \subset A$.

Decimos que una serie de funciones $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ **converge absolutamente** en C, cuando $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left| f_n \right|$ converge puntualmente en C, es decir, cuando la serie de términos positivos $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left| f_n(x) \right|$ es convergente, para todo $x \in C$.

Podemos hablar de convergencia absoluta en un punto de A, sin más que considerar el caso en que C se reduce a un punto. La relación entre la convergencia absoluta y la puntual, es inmediata, pues basta usar lo que de sobra conocemos para series de números reales.

- *Si la serie de funciones* $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ *converge absolutamente en* C, *entonces también converge puntualmente en* C *y se verifica que*

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \big|f_n(x)\big| \qquad \forall x \in C$$

Usando una serie de funciones constantes, comprobamos que el recíproco de este resultado es falso. Más aún, tomando $f_n(x) = (-1)^n/n$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y todo $n \in \mathbb{N}$, es claro que la serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$, pero no converge absolutamente en ningún punto de $\mathbb{R}$. Por otra parte, más adelante veremos ejemplos de series que convergen absolutamente, pero no uniformemente, en ciertos conjuntos.

Pasamos ahora a presentar el criterio más útil para probar la convergencia absoluta, y al mismo tiempo uniforme, de una serie de funciones.

Test de Weierstrass. *Sea* $\{f_n\}$ *una sucesión de funciones, de un conjunto* A *en* $\mathbb{R}$ *y* C *un subconjunto no vacío de* A. *Supongamos que existe una serie convergente* $\sum_{n\geqslant 1} M_n$ *de números reales, verificando que*

$$\big|f_n(x)\big| \leqslant M_n \qquad \forall x \in C,\ \forall n \in \mathbb{N} \tag{7}$$

Entonces la serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ *converge absoluta y uniformemente en* C.

Demostración. La convergencia absoluta se deduce claramente del criterio de comparación para series de términos positivos. Fijado $x \in C$, como $\sum_{n\geqslant 1} M_n$ converge, la desigualdad (7) nos permite usar dicho criterio para obtener que $\sum_{n\geqslant 1} \big|f_n(x)\big|$ también converge.

Para obtener la convergencia uniforme, usaremos el criterio de Cauchy, es decir, bastará comprobar la condición (2). Fijado $\varepsilon > 0$, como por hipótesis la serie $\sum_{n\geqslant 1} M_n$ es una sucesión de Cauchy, existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$p, q \in \mathbb{N}, \quad m \leqslant p < q \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=p+1}^{q} M_k < \varepsilon$$

Entonces, también para $m \leqslant p < q$, y para todo $x \in C$, usando (7) tenemos que

$$\left|\sum_{k=p+1}^{q} f_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=p+1}^{q} \big|f_k(x)\big| \leqslant \sum_{k=p+1}^{q} M_k < \varepsilon$$

Esto prueba que se verifica (2), concluyendo la demostración. ■

2.4. Series de potencias

Vamos a estudiar un tipo particular muy útil de series de funciones definidas en $\mathbb{R}$, cuyo término general es una sucesión muy sencilla de funciones polinómicas. Ello hace que sea fácil obtener abundante información sobre la convergencia de la serie y las propiedades de su suma.

Llamamos **serie de potencias** a toda serie de funciones $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ en la que, para $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, la función $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ venga dada por

$$f_n(x) = c_n\left(x-a\right)^n \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

donde $\{c_n\}$ es una sucesión de números reales y $c_0, a \in \mathbb{R}$. Se dice que tal serie está **centrada** en el punto $a \in \mathbb{R}$, y para cada $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, el número real c_n es el n-ésimo **coeficiente** de la serie. Nótese que la función f_0 es constante: $f_0(x) = c_0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Hasta ahora hemos hecho siempre clara distinción entre una serie de funciones de A en $\mathbb{R}$, digamos $\sum_{n\geqslant 1} f_n$, y la serie de números reales $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ que se obtiene para cada punto $x \in A$. Sin embargo, cometiendo un evidente abuso de notación, la serie de potencias recién definida suele denotarse por $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$, sin que hayamos fijado ningún $x \in \mathbb{R}$, sino usando x como una variable. De esta forma indicamos brevemente la serie de potencias de la que hablamos, sin que ello deba causar confusión. Por el contexto se sabe siempre si nos referimos a una serie de potencias, o hemos fijado $x \in \mathbb{R}$ y estamos hablando de una serie de números reales.

En el caso más sencillo, si $c_n \in \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, vemos que $\sum_{n\geqslant 0} c_n x^n$ es una serie de potencias centrada en el origen. Por ejemplo, tomando $c_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, tenemos la llamada **serie geométrica** $\sum_{n\geqslant 0} x^n$.

Para estudiar la convergencia de una serie de potencias, jugará un papel clave la constante que enseguida vamos a definir. Recordemos que si una sucesión $\{\alpha_n\}$ de números reales está acotada, su límite superior viene dado por

$$\limsup_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sup\{\alpha_k : k \in \mathbb{N},\ k \geqslant n\}\right)$$

Cuando $\{\alpha_n\}$ no está mayorada, se puede entender que el supremo que aparece en el segundo miembro es $+\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y escribir $\limsup_{n\to\infty} \alpha_n = +\infty$.

Definimos ahora el **radio de convergencia** de una serie de potencias $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ como la constante $R \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$ dada por

$$R = 1/L \qquad \text{donde} \qquad L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$$

entendiendo que $R = 0$ cuando $L = +\infty$, mientras que $R = +\infty$ cuando $L = 0$. Conocido el radio de convergencia R, llamaremos **intervalo de convergencia** de la serie al intervalo abierto dado por $J = \{x \in \mathbb{R} : |x-a| < R\}$. Cuando $R \in \mathbb{R}^+$ tenemos $J =]a-R, a+R[$, mientras que si $R = 0$ vemos que $J = \emptyset$, y cuando $R = +\infty$, se entiende que $J = \mathbb{R}$.

El siguiente resultado muestra que, conociendo sólo el radio de convergencia de una serie de potencias, o lo que es lo mismo, su intervalo de convergencia, tenemos mucha información acerca de la convergencia puntual, absoluta y uniforme, de dicha serie.

- *Si J es el intervalo de convergencia de una serie de potencias $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$, entonces dicha serie converge absoluta y uniformemente en cada subconjunto compacto de J. En particular, converge absolutamente en J. Por otra parte, la serie no converge en ningún punto de $\mathbb{R} \setminus \big(\overline{J} \bigcup \{a\}\big)$.*

Sea R el radio de convergencia de nuestra serie de potencias. Para la primera afirmación del enunciado, podemos suponer que $R \neq 0$ pues en otro caso $J = \emptyset$ y no hay nada que demostrar. Fijado un conjunto no vacío y compacto $K \subset J$, como la función continua $x \mapsto |x-a|$ tiene máximo en K, existe $b \in K$ que nos permite escribir

$$r = \text{máx}\,\big\{\,|x-a| : x \in K\,\big\} = |b-a|$$

En el caso $R \in \mathbb{R}^+$, como $b \in K \subset J$, se tiene que $r = |b-a| < R$, lo que nos permite entonces fijar $\rho \in \mathbb{R}^+$ con $r < \rho < R$, para obtener que

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{R} < \frac{1}{\rho}$$

En el caso $R = +\infty$, tomamos $\rho \in \mathbb{R}^+$ con $r < \rho$ y tenemos la misma desigualdad, ya que el límite superior del primer miembro se anula.

Por definición de límite superior, existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $k \in \mathbb{N}$ con $k \geqslant m$, se tiene que $\sqrt[k]{|c_k|} < 1/\rho$, o lo que es lo mismo, $|c_k|\rho^k < 1$. Esto implica que la sucesión $\big\{\,|c_n|\rho^n\,\big\}$ está mayorada, es decir,

$$\exists\, M \in \mathbb{R}^+ \,:\, |c_n|\rho^n \leqslant M \qquad \forall n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$$

Deducimos entonces que, para cualesquiera $x \in K$ y $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, se tiene

$$\big|\,c_n(x-a)^n\,\big| = |c_n|\,|x-a|^n \leqslant |c_n|\,r^n = |c_n|\,\rho^n\,\frac{r^n}{\rho^n} \leqslant M\left(\frac{r}{\rho}\right)^n$$

Como $r/\rho < 1$, la serie $\sum_{n\geqslant 0}(r/\rho)^n$ converge, y tomando $M_n = M\big(r/\rho\big)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, la serie $\sum_{n\geqslant 0} M_n$ también es convergente. Por tanto, la desigualdad (9) nos permite usar el test de Weierstrass, con lo que obtenemos que la serie de potencias $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ converge absoluta y uniformemente en K. En particular, para cada $x \in J$ podemos tomar $K = \{x\}$, para concluir que dicha serie converge absolutamente en J.

Para la última afirmación del enunciado, suponemos que $R \neq +\infty$, pues en otro caso $J = \mathbb{R}$ y no hay nada que demostrar. Fijado $x_0 \in \mathbb{R}\setminus\{a\}$, y suponiendo que la sucesión $\big\{\,c_n(x_0-a)^n\,\big\}$ está acotada, probaremos que $|x_0-a| \leqslant R$, con lo que $x_0 \in \overline{J}$. Esto implica obviamente que la serie $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ no converge en ningún punto de $\mathbb{R}\setminus\big(\overline{J}\bigcup\{a\}\big)$.

Sean pues $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$ y $M \in \mathbb{R}^+$ verificando que

$$|c_n|\,|x_0-a|^n \leqslant M \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \text{es decir,} \qquad \sqrt[n]{|c_n|} \leqslant \frac{M^{1/n}}{|x_0-a|} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Vemos entonces que la sucesión $\left\{ \sqrt[n]{|c_n|} \right\}$ está acotada, con

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{M^{1/n}}{|x_0-a|} = \frac{1}{|x_0-a|}$$

Deducimos claramente que $|x_0-a| \leqslant R$, como se quería. ■

Conviene aclarar el contenido del resultado anterior, en los tres casos que pueden darse, dependiendo del valor del radio de convergencia R de la serie de potencias $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$.

El caso más favorable se presenta cuando $R = +\infty$, es decir, cuando $\left\{ \sqrt[n]{|c_n|} \right\} \to 0$, pues entonces la serie converge absolutamente en $\mathbb{R}$ y uniformemente en cada compacto $K \subset \mathbb{R}$. En el extremo opuesto, cuando $R = 0$, es decir, cuando la sucesión $\left\{ \sqrt[n]{|c_n|} \right\}$ no está acotada, nuestra serie de potencias carece de interés, pues sólo converge en el punto a. La situación intermedia se presenta cuando $R \in \mathbb{R}^+$, es decir, cuando la sucesión $\left\{ \sqrt[n]{|c_n|} \right\}$ está acotada pero no converge a cero. Entonces nuestra serie de potencias converge absolutamente en el intervalo abierto $J =]a-R, a+R[$, y uniformemente en cada subconjunto compacto de J, pero no converge en ningún punto de $\mathbb{R} \setminus \overline{J}$.

Veamos algunos ejemplos en los que se usa lo anterior para estudiar la convergencia de algunas series de potencias. De paso veremos que, conocer el intervalo de convergencia no es suficiente para contestar ciertas preguntas acerca de la convergencia de una serie.

Empezando por el ejemplo menos interesante, la serie de potencias $\sum_{n\geqslant 1} n^n x^n$ tiene radio de convergencia cero, ya que $\left\{ \sqrt[n]{n^n} \right\} \to +\infty$, luego sólo converge en el origen.

En el extremo opuesto, la serie $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{n^n}$ tiene radio de convergencia $+\infty$, luego converge absolutamente en $\mathbb{R}$ y uniformemente en cada subconjunto compacto de $\mathbb{R}$.

Para una serie de potencias con radio de convergencia $+\infty$, cabe preguntarse si la serie converge uniformemente en $\mathbb{R}$, y no sólo en cada subconjunto compacto de $\mathbb{R}$. Tal cosa sólo ocurre cuando tenemos simplemente una suma finita.

- *Una serie de potencias $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$ si, y sólo si, el conjunto $E = \{n \in \mathbb{N} : c_n \neq 0\}$ es finito.*

Si E es finito, tomando $m = \max E$, definimos $f(x) = \sum_{k=1}^{m} c_k(x-a)^k$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Vemos entonces que, para $n \geqslant m$, se tiene también que $\sum_{k=1}^{n} c_k(x-a)^k = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, lo que obviamente implica que la serie de potencias del enunciado converge uniformemente en $\mathbb{R}$.

Recíprocamente, suponiendo que E es un conjunto infinito, probaremos que el término general de nuestra serie no converge uniformemente a cero en $\mathbb{R}$, con lo que la serie no puede converger uniformemente en $\mathbb{R}$. Para ello, bastará encontrar una sucesión $\{x_n\}$ de números reales, de forma que la sucesión $\{y_n\} = \left\{ c_n(x_n - a)^n \right\}$ no converja a cero, pero esto es bien fácil. Tomamos por ejemplo $x_n = a + |c_n|^{-1/n}$ para todo $n \in E$ y $x_n = a$ para todo $n \in \mathbb{N} \setminus E$. Se tiene entonces que $|y_n| = 1$ para todo $n \in E$, y como el conjunto E es infinito, $\{y_n\}$ no converge a cero. ■

Para una serie de potencias $\sum_{n \geqslant 0} c_n (x-a)^n$ con radio de convergencia $R \in \mathbb{R}^+$, e intervalo de convergencia $J =]a-R, a+R[$, cabe preguntar si converge en los puntos $a-R$ y $a+R$, para conocer con exactitud el campo de convergencia puntual C_p de la serie, pues por ahora sabemos que $J \subset C_p \subset \overline{J}$. También podemos preguntarnos si la serie converge uniformemente en J, o incluso en $\overline{J}$. Veremos con ejemplos que, conociendo solamente el radio de convergencia de la serie, estas preguntas no tienen una repuesta general, se pueden dar situaciones muy diversas.

Para ello consideremos la serie geométrica y otras dos series centradas en el origen

$$\sum_{n \geqslant 0} x^n, \qquad \sum_{n \geqslant 1} \frac{x^n}{n}, \qquad \sum_{n \geqslant 1} \frac{x^n}{n^2}$$

donde la segunda y la tercera, se entienden como series de potencias con término constante 0.

Teniendo en cuenta que $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$, las tres series tienen radio de convergencia $R = 1$, e intervalo de convergencia $J =]-1, 1[$. Por tanto, las tres convergen absolutamente en J y uniformemente en cada subconjunto compacto de J, pero ninguna de ellas converge en punto alguno de $\mathbb{R} \setminus \overline{J}$. Es claro que la serie geométrica no converge en 1 ni en -1, pues de hecho las sucesiones $\{1^n\}$ y $\{(-1)^n\}$ no convergen a cero, luego el campo de convergencia puntual de la serie geométrica es J.

Por otra parte, la serie $\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge, pero $\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ no lo hace, luego el campo de convergencia puntual de la serie $\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{x^n}{n}$ es el intervalo semiabierto $[-1, 1[$. En cuanto a la tercera serie, es claro que

$$\left| \frac{x^n}{n^2} \right| \leqslant \frac{1}{n^2} \qquad \forall x \in \overline{J}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Como $\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ es convergente, el test de Weierstrass nos dice que la serie $\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{x^n}{n^2}$ converge absoluta y uniformemente en $\overline{J}$, que es su campo de convergencia puntual.

Veamos finalmente que la serie geométrica no converge uniformemente en J, y de hecho que su término general no converge uniformemente a cero en J. Basta tomar $x_n = n/(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, con lo que tenemos una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de J, tal que $\left\{x_n^n\right\}$ no converge a cero, pues de hecho $\left\{x_n^n\right\} \to 1/e \neq 0$.

2.5. La suma de una serie de potencias

Si una serie de potencias $\sum_{n \geqslant 0} c_n (x-a)^n$ tiene intervalo de convergencia $J \neq \emptyset$, pretendemos ahora estudiar la **suma de la serie**, es decir, la función $f : J \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \qquad \forall x \in J \tag{8}$$

La continuidad de f es fácil de comprobar. Dado un punto $x_0 \in J$, podemos tomar $\delta > 0$ de forma que el intervalo $K = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ esté contenido en J, con lo que la serie converge uniformemente en K, un entorno de x_0. Como todos los términos de la serie son funciones continuas en x_0, concluimos que f también es continua en x_0.

Sin embargo, queremos llegar más lejos, usando que los términos de la serie son funciones derivables en J para probar que f también lo es. Procede por tanto estudiar la convergencia de la serie de las derivadas.

Si para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $x \in \mathbb{R}$ escribimos $f_n(x) = c_n (x-a)^n$, es claro que $f_0{}' = 0$ y

$$f_n{}'(x) = n\, c_n\, (x-a)^{n-1} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Esto nos lleva a estudiar la convergencia de otra serie de potencias, ya que

$$\sum_{n \geqslant 1} f_n{}' = \sum_{n \geqslant 1} n\, c_n\, (x-a)^{n-1} = \sum_{n \geqslant 0} (n+1)\, c_{n+1}\, (x-a)^n$$

Esta serie tiene el mismo radio de convergencia que la de partida, como vamos a ver.

- *Las series de potencias* $\sum_{n \geqslant 0} c_n (x-a)^n$ *y* $\sum_{n \geqslant 0} (n+1)\, c_{n+1} (x-a)^n$ *tienen el mismo radio de convergencia.*

Obviamente, el radio de convergencia de una serie de potencias no depende del punto en el que la serie está centrada, luego abreviamos suponiendo que $a = 0$. Si R y R_1 son los radios de convergencia de las series $\sum_{n \geqslant 0} c_n x^n$ y $\sum_{n \geqslant 0} (n+1)\, c_{n+1}\, x^n$ respectivamente, se trata de probar que $R = R_1$. Fijado $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, es claro que la convergencia de la serie $\sum_{n \geqslant 0} (n+1)\, c_{n+1}\, x^n$ equivale a la de $\sum_{n \geqslant 0} (n+1)\, c_{n+1}\, x^{n+1} = \sum_{n \geqslant 1} n\, c_n\, x^n$, de lo que claramente deducimos que R_1 también es el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n \geqslant 0} n\, c_n\, x^n$. Nuestro objetivo es por tanto comprobar que

$$\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{n\, |\, c_n\, |} = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|\, c_n\, |} \tag{9}$$

En el caso $R = 0$, la sucesión $\left\{ \sqrt[n]{|\, c_n\, |} \right\}$ no está mayorada, luego $\left\{ \sqrt[n]{n\, |\, c_n\, |} \right\}$ tampoco puede estarlo, así que $R_1 = 0 = R$.

Queda comprobar que, cuando la sucesión $\left\{ \sqrt[n]{|c_n|} \right\}$ está mayorada, también se tiene (9). Fijado $\varepsilon > 0$, usamos que $\left\{ \sqrt[n]{n} \right\} \to 1$, para obtener $m \in \mathbb{N}$ tal que, para $k \geqslant m$ se tiene

$$1 \leqslant \sqrt[k]{k} \leqslant 1+\varepsilon, \qquad \text{de donde} \qquad \sqrt[k]{|c_k|} \leqslant \sqrt[k]{k\,|c_k|} \leqslant (1+\varepsilon)\sqrt[k]{|c_k|}$$

Deducimos que, para $n \geqslant m$ se tiene

$$\sup\left\{ \sqrt[k]{|c_k|} : k \geqslant n \right\} \leqslant \sup\left\{ \sqrt[k]{k\,|c_k|} : k \geqslant n \right\} \leqslant (1+\varepsilon) \sup\left\{ \sqrt[k]{|c_k|} : k \geqslant n \right\}$$

de donde finalmente obtenemos que

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n\,|c_n|} \leqslant (1+\varepsilon) \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$$

Como $\varepsilon > 0$ era arbitrario, concluimos que se verifica (9), como queríamos. ■

Todo está ya preparado para usar la relación entre convergencia uniforme y derivación. Se obtiene así que la suma de una serie de potencias es una función derivable en el intervalo de convergencia, pero como se puede adivinar, su derivada vuelve a ser la suma de otra serie de potencias, que tiene el mismo intervalo de convergencia, lo que permite iterar el proceso. Razonando por inducción obtendremos el siguiente resultado.

- *Sea $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $R \neq 0$, y $J \neq \emptyset$ su intervalo de convergencia. Entonces la suma de la serie, es decir, la función $f : J \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(x-a)^n \qquad \forall x \in J$$

es de clase C^{∞} en J. Además, para todo $k \in \mathbb{N}$, la serie $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(n+k)\,!}{n\,!} c_{n+k}\,(x-a)^n$ tiene radio de convergencia R, y su suma coincide con la k-ésima derivada de f, es decir,

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)\,!}{n\,!} c_{n+k}\,(x-a)^n = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n\,!}{(n-k)\,!} c_n\,(x-a)^{n-k} \tag{10.k}$$

En particular se tiene que $c_k = \dfrac{f^{(k)}(a)}{k\,!}$ para todo $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$.

Como se ha dicho, la demostración se hará por inducción sobre k. En el caso $k = 1$, el resultado anterior nos dice que la serie $\sum_{n\geqslant 0}(n+1)c_{n+1}(x-a)^n$ tiene radio de convergencia R. Se trata ahora de probar que f es derivable en J y se verifica (10.1). Para ello fijamos $x_0 \in J$, y tomamos $\delta > 0$ de forma que el intervalo $K = [x_0-\delta, x_0+\delta]$ esté contenido en J.

La serie de las derivadas $\sum_{n\geqslant 1} n\,c_n\,(x-a)^{n-1} = \sum_{n\geqslant 0}(n+1)\,c_{n+1}\,(x-a)^n$ tiene intervalo de convergencia J, luego converge uniformemente en K. Además, K es un intervalo acotado no trivial, y la serie $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ converge, por ejemplo, en el punto $x_0 \in K$.

Por tanto, usando la relación entre convergencia uniforme y derivación, vemos por una parte, que la serie $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ converge uniformemente en K, cosa que ya sabíamos. Pero por otra, obtenemos que la restricción de f a K es derivable en K, y en particular en el punto x_0, con la derivada que enseguida escribiremos. El carácter local de la derivada nos dice que f es derivable en x_0 con la misma derivada, que viene dada por

$$f'(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, c_n\, (x_0-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, c_{n+1}\, (x_0-a)^n$$

Como $x_0 \in J$ era arbitrario, concluimos que f es derivable en J y se verifica (10.1). Hemos completado así la etapa base de la inducción.

Dado $k \in \mathbb{N}$, supongamos ahora que f es k veces derivable en J y que se verifica $(10.k)$, siendo R el radio de convergencia de la serie que aparece en dicha igualdad. Entonces $f^{(k)}$ es la suma de una serie de potencias cuyo intervalo de convergencia es J, luego podemos volver a usar lo demostrado en el caso $k=1$, para obtener que $f^{(k)}$ es derivable en J, así como que la serie $\sum_{n\geqslant 0}(n+1)\,\dfrac{(n+1+k)\,!}{(n+1)\,!}\, c_{n+1+k}\, (x-a)^n = \sum_{n\geqslant 0} \dfrac{(n+k+1)\,!}{n\,!}\, c_{n+k+1}\, (x-a)^n$ tiene radio de convergencia R, y se verifica que

$$\big(f^{(k)}\big)'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k+1)\,!}{n\,!}\, c_{n+k+1}\, (x-a)^n \qquad \forall x \in J$$

Esto completa la inducción, al haber probado que f es $k+1$ veces derivable en J y que se verifica $(10.k+1)$, pues para todo $x \in J$, se tiene

$$f^{(k+1)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k+1)\,!}{n\,!}\, c_{n+k+1}\, (x-a)^n = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{n\,!}{(n-k-1)\,!}\, c_n\, (x-a)^{n-k-1}$$

Finalmente, tomando $x=a$ en la igualdad $(10.k)$ obtenemos que $c_k = f^{(k)}(a)/k\,!$ para todo $k \in \mathbb{N}$. En el caso $k=0$ es claro que $c_0 = f(a)$. ■

En la última igualdad del enunciado anterior, vemos que los coeficientes de una serie de potencias con radio de convergencia no nulo, quedan determinados por la suma de la serie. Esto permite identificar coeficientes en una igualdad entre las sumas de dos series de potencias, tal y como hacemos con una igualdad entre polinomios.

Concretamente, sean $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ y $\sum_{n\geqslant 0} b_n(x-a)^n$ series de potencias centradas en un mismo punto, con intervalos de convergencia no vacíos J_c y J_b respectivamente. Supongamos que existe un $\delta > 0$, tal que $]a-\delta, a+\delta[\, \subset J_c \bigcap J_b$ y se verifica que

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n \qquad \forall x \in\,]a-\delta, a+\delta[$$

entonces podemos asegurar que ambas series de potencias son idénticas, es decir, que $c_n = b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Para ello basta considerar las sumas de ambas series:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \ \ \forall x \in J_c \qquad \text{y} \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n \ \ \forall x \in J_b$$

Por hipótesis f y g coinciden en un entorno del punto a, luego usando el carácter local de las sucesivas derivadas, la última igualdad del resultado anterior nos dice que

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{g^{(n)}(a)}{n!} = b_n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Por otra parte, el resultado anterior muestra la utilidad de las series de potencias para definir funciones de clase C^∞ en intervalos abiertos. Si $\{a_n\}$ es cualquier sucesión acotada de números reales, y fijamos $a \in \mathbb{R}$ arbitrario, es claro que la serie de potencias $\sum_{n\geqslant 0} a_n^n (x-a)^n$ tiene radio de convergencia $R \neq 0$, ya que la sucesión $\left\{ \sqrt[n]{|a_n^n|} \right\} = \{|a_n|\}$ está acotada. Por tanto, la suma de dicha serie es una función de clase C^∞ en el intervalo $]a-R, a+R[$. Si de hecho $\{a_n\} \to 0$, se tiene $R = +\infty$, y obtenemos una función de clase C^∞ en $\mathbb{R}$.

Por otra parte, el teorema anterior también es útil para obtener la suma de ciertas series, o visto en sentido opuesto, para obtener desarrollos en serie de funciones conocidas. Ilustraremos estas ideas con algunos ejemplos relevantes. Para ello empezamos recordando la suma de la serie geométrica. Para $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ se tiene claramente que

$$(1-x)\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \sum_{k=0}^{n-1} x^k - \sum_{k=0}^{n-1} x^{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k - \sum_{k=1}^{n} x^k = 1 - x^n$$

Cuando $|x| < 1$, usando que $\{x^n\} \to 0$, deducimos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} x^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x} \qquad \forall x \in]-1,1[\tag{11}$$

Para $k \in \mathbb{N}$, la k-ésima derivada en $]-1,1[$ de la función $x \mapsto (1-x)^{-1}$ es bien fácil de adivinar, y usando el teorema anterior, deducimos que

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!}\, x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \qquad \forall x \in]-1,1[, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Equivalentemente, usando la definición de los números combinatorios, tenemos

$$\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \qquad \forall x \in]-1,1[, \ \forall k \in \mathbb{N}$$

Pasamos ahora a obtener con bastante facilidad algunos desarrollos en serie de funciones elementales, empezando por la exponencial.

Observamos que la serie de potencias $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!}$ tiene radio de convergencia $+\infty$, puesto que, escribiendo $c_n = 1/n!$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\{c_{n+1}/c_n\} = \{1/(n+1)\} \to 0$, y el criterio de la raíz para sucesiones nos dice que $\left\{ \sqrt[n]{1/n!} \right\} = \left\{ \sqrt[n]{c_n} \right\} \to 0$. Esto nos permite definir una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ escribiendo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Por el teorema anterior, f es derivable en $\mathbb{R}$ con

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!}\, x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Si ahora definimos $g(x) = f(x)\, e^{-x}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, también g es derivable en $\mathbb{R}$ con

$$g'(x) = f'(x)\, e^{-x} - f(x)\, e^{-x} = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Deducimos que g es constante en $\mathbb{R}$, pero $g(0) = f(0) = 1$, luego $g(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Tenemos por tanto que $f(x) = g(x)\, e^{x} = e^{x}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, y hemos expresado la función exponencial como suma de una serie de potencias:

$$e^{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Por último, a partir de la suma de la serie geométrica, obtendremos un desarrollo en serie del logaritmo. Definiendo $\varphi(x) = \log(1+x)$ para todo $x \in]-1,1[$, y usando (11) con $-x$ en lugar de x, tenemos

$$\varphi'(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \qquad \forall x \in]-1,1[$$

Esto sugiere pensar en una serie de potencias tal que la serie de las derivadas sea la que acaba de aparecer, cosa que es bien fácil. Basta considerar la serie $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+1}\, x^{n+1}$, que tiene radio de convergencia 1, lo que permite definir

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}\, x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\, x^n \qquad \forall x \in]-1,1[$$

Por el teorema anterior, ψ es derivable en $\mathbb{R}$ con

$$\psi'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n = \varphi'(x) \qquad \forall x \in]-1,1[$$

Deducimos que $\varphi - \psi$ es constante, pero $\varphi(0) = \psi(0) = 0$, luego $\varphi = \psi$, es decir

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\, x^n \qquad \forall x \in]-1,1[$$

Para obtener directamente la función logaritmo, fijamos $a \in \mathbb{R}^+$ y, para todo $x \in]0,2a[$ se tiene que $(x-a)/a \in]-1,1[$, luego usando la igualdad anterior con $(x-a)/a$ en vez de x, obtenemos fácilmente que

$$\log x = \log a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\, a^n}\, (x-a)^n \qquad \forall x \in]0,2a[$$

Por ejemplo, tomando $a = 1$ tenemos

$$\log x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\, (x-1)^n \qquad \forall x \in]0,2[$$