

Práctica 4. Funciones implícitas

Ejercicios resueltos

1. Probar que el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}e^{u+x} \cos(y+v) - x^2 + y^2 &= 0 \\e^{u+x} \operatorname{sen}(y+v) - 2xy &= 0\end{aligned}$$

define funciones implícitas $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$, diferenciables en un entorno del punto $(1, 0)$, con $u(1, 0) = -1$ y $v(1, 0) = 0$. Calcular las derivadas parciales de u y v en dicho punto.

Solución

Tomamos $\Omega = \mathbb{R}^4$ y consideramos la función $F = (F_1, F_2) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida, para cualesquiera $x, y, u, v \in \mathbb{R}$, por

$$\begin{aligned}F_1(x, y, u, v) &= e^{u+x} \cos(y+v) - x^2 + y^2 \\F_2(x, y, u, v) &= e^{u+x} \operatorname{sen}(y+v) - 2xy\end{aligned}$$

Se tiene claramente que $F(1, 0, -1, 0) = (0, 0)$. También es evidente que F_1 y F_2 son funciones de clase C^1 en \mathbb{R}^4 , pues ambas se obtienen mediante sumas, productos y composiciones de funciones de clase C^1 : funciones polinómicas, la exponencial, el seno y el coseno. Por tanto $F \in C^1(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^2)$.

En todo punto $P = (x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4$, se tiene claramente que

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_1}{\partial x}(P) &= e^{u+x} \cos(y+v) - 2x & \frac{\partial F_1}{\partial y}(P) &= -e^{u+x} \operatorname{sen}(y+v) + 2y \\ \frac{\partial F_1}{\partial u}(P) &= e^{u+x} \cos(y+v) & \frac{\partial F_1}{\partial v}(P) &= -e^{u+x} \operatorname{sen}(y+v) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(P) &= e^{u+x} \operatorname{sen}(y+v) - 2y & \frac{\partial F_2}{\partial y}(P) &= e^{u+x} \cos(y+v) - 2x \\ \frac{\partial F_2}{\partial u}(P) &= e^{u+x} \operatorname{sen}(y+v) & \frac{\partial F_2}{\partial v}(P) &= e^{u+x} \cos(y+v)\end{aligned}$$

En particular, en el punto $P_0 = (1, 0, -1, 0)$, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_1}{\partial x}(P_0) &= -1, & \frac{\partial F_1}{\partial y}(P_0) &= 0, & \frac{\partial F_1}{\partial u}(P_0) &= 1, & \frac{\partial F_1}{\partial v}(P_0) &= 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(P_0) &= 0, & \frac{\partial F_2}{\partial y}(P_0) &= -1, & \frac{\partial F_2}{\partial u}(P_0) &= 0, & \frac{\partial F_2}{\partial v}(P_0) &= 1\end{aligned}$$

Así pues, la matriz jacobiana que nos interesa es

$$JF(1, 0, -1, 0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como consecuencia tenemos claramente que

$$\det \left(\frac{\partial (F_1, F_2)}{\partial (u, v)} \right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Por tanto, el teorema de función implícita nos dice que el sistema del enunciado define funciones implícitas $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$, que son diferenciables en un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ con $(1, 0) \in U$, $u(1, 0) = -1$ y $v(1, 0) = 0$.

Para todo $(x, y) \in U$, el mencionado sistema nos dice ahora que

$$\begin{aligned} e^{x+u(x,y)} \cos(y + v(x, y)) - x^2 + y^2 &= 0 & \text{y} \\ e^{x+u(x,y)} \operatorname{sen}(y + v(x, y)) - 2xy &= 0 \end{aligned} \quad (*)$$

Tenemos aquí dos funciones idénticamente nulas en U , cuyas derivadas parciales también deberán ser idénticamente nulas. Así pues, si abreviamos entendiendo que todas las funciones se evalúan en un punto arbitrario $(x, y) \in U$, se tiene:

$$\begin{aligned} e^{x+u} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \cos(y + v) - e^{x+u} \operatorname{sen}(y + v) \frac{\partial v}{\partial x} - 2x &= 0 \\ e^{x+u} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \operatorname{sen}(y + v) + e^{x+u} \cos(y + v) \frac{\partial v}{\partial x} - 2y &= 0 \end{aligned}$$

Para $(x, y) = (1, 0)$, como $u(1, 0) = -1$ y $v(1, 0) = 0$, obtenemos

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1, 0) = 1 \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial x}(1, 0) = 0$$

Análogamente, de (*) deducimos que, para todo $(x, y) \in U$ se tiene:

$$\begin{aligned} e^{x+u} \cos(y + v) \frac{\partial u}{\partial y} - e^{x+u} \operatorname{sen}(y + v) \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2y &= 0 \\ e^{x+u} \operatorname{sen}(y + v) \frac{\partial u}{\partial y} + e^{x+u} \cos(y + v) \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - 2x &= 0 \end{aligned}$$

y en particular, para $(x, y) = (1, 0)$ concluimos que

$$\frac{\partial u}{\partial y}(1, 0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial y}(1, 0) = 1$$

Con esto hemos calculado las derivadas parciales de u y v en $(1, 0)$. ■

2. Probar que la ecuación

$$xyz + \log(z - 5) - 2x - 2y - 2x^2y^2 = 0$$

define una función implícita $z = z(x, y)$, diferenciable en un entorno de $(1, 1)$, con $z(1, 1) = 6$. Calcular $\nabla z(1, 1)$.

Solución

Consideramos el conjunto $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 5\}$, que es un abierto de \mathbb{R}^3 , y la función $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x, y, z) = xyz + \log(z - 5) - 2x - 2y - 2x^2y^2 \quad \forall (x, y, z) \in \Omega$$

que claramente verifican $(1, 1, 6) \in \Omega$ y $F(1, 1, 6) = 0$.

La función $(x, y, z) \mapsto \log(z - 5)$ es de clase C^1 en Ω , como composición de una función polinómica, que toma valores en \mathbb{R}^+ , con el logaritmo, que es una función de clase C^1 en \mathbb{R}^+ . Como F es la suma de la función anterior con otra función polinómica, concluimos que $F \in C^1(\Omega)$.

Para todo $(x, y, z) \in \Omega$ se tiene que

$$\nabla F(x, y, z) = \left(yz - 2 - 4xy^2, xz - 2 - 4x^2y, xy + \frac{1}{z-5} \right)$$

Para $(x, y, z) = (1, 1, 6)$ obtenemos que $\nabla F(1, 1, 6) = (0, 0, 2)$, y en particular se tiene:

$$\frac{\partial F}{\partial z}(1, 1, 6) = 2 \neq 0$$

El teorema de la función implícita nos dice que la ecuación dada define una función implícita $z = z(x, y)$, diferenciable en un entorno U de $(1, 1)$ con $z(1, 1) = 6$.

Para todo $(x, y) \in U$ se tiene entonces que

$$xyz(x, y) + \log(z(x, y) - 5) - 2x - 2y - 2x^2y^2 = 0$$

y tenemos una función idénticamente nula, cuyas derivadas parciales también lo serán. Por tanto, para todo $(x, y) \in U$, evaluando la función z y sus derivadas parciales en el punto (x, y) obtenemos que

$$\begin{aligned} yz + xy \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{z-5} \frac{\partial z}{\partial x} - 2 - 4xy^2 &= 0 \\ xz + xy \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{1}{z-5} \frac{\partial z}{\partial y} - 2 - 4x^2y &= 0 \end{aligned}$$

Para $(x, y) = (1, 1)$, teniendo en cuenta que $z(1, 1) = 6$, obtenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1, 1) = \frac{\partial z}{\partial y}(1, 1) = 0$$

Se tiene por tanto que $\nabla z(1, 1) = (0, 0)$. ■