Lección 21

Teorema de Schwartz

Vamos a probar una propiedad clave de las diferenciales sucesivas de una función.

Teorema. *Sean X e Y espacios normados, Ω un abierto de X y $f:\Omega\to Y$ una función. Dado $n\in\mathbb{N}$, supongamos que f es $n-1$ veces diferenciable en todo punto de Ω y n veces diferenciable en un punto $a\in\Omega$. Entonces la aplicación n-lineal $D^n f(a)$ es simétrica, es decir, para toda biyección $\sigma: I_n\to I_n$, y cualesquiera $h_1,h_2,\ldots h_n\in X$, se tiene:*

$$D^n f(a)(h_1,h_2,\ldots,h_n) = D^n f(a)(h_{\sigma(1)},h_{\sigma(2)},\ldots,h_{\sigma(n)}) \qquad (1)$$

Demostración. Empezamos con el caso $n=2$, del que se deducirá después al caso general. Suponemos por tanto que f es diferenciable en todo punto de Ω y 2 veces diferenciable en el punto $a\in\Omega$, para probar que

$$D^2 f(a)(h,k) = D^2 f(a)(k,h) \qquad \forall\, h,k\in X \qquad (2)$$

Tomamos $r\in\mathbb{R}^+$ tal que $B(a,2r)\subset\Omega$. Para cualesquiera $h,k\in B(0,r)$ tenemos claramente $a+h, a+h+k\in B(a,2r)\subset\Omega$ y podemos definir una función $\varphi: B(0,r)\times B(0,r)\to Y$ por:

$$\varphi(h,k) = f(a+h+k)-f(a+h)-f(a+k)+f(a) \qquad \forall\, h,k\in B(0,r)$$

Observamos que φ es simétrica y (2) se deducirá fácilmente de la siguiente igualdad:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\|\varphi(h,k)-D^2 f(a)(h,k)\|}{\big(\|h\|+\|k\|\big)^2} = 0 \qquad (3)$$

Para probarla, fijamos $\varepsilon>0$ y usamos que f es 2 veces diferenciable en el punto a, obteniendo un $\delta\in]0,r[$ tal que

$$x\in X,\ \|x\|<\delta \implies \big\|Df(a+x)-Df(a)-\big[D(Df)(a)\big](x)\big\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\|x\| \qquad (4)$$

Obsérvese que, puesto que Df toma valores en el espacio normado $L(X,Y)$, tenemos $D(Df)(a)\in L\big(X,L(X,Y)\big)$, y por tanto $[D(Df(a)](x)\in L(X,Y)$.

Recordemos ahora la identificación de $L\big(X,L(X,Y)\big)$ con $L^2(X,Y)$, que es la que permite ver $D^2f(a)$ como aplicación bilineal de $X\times X$ en Y. Venía dada por

$$D^2f(a)(x,k) = \big[\,[D(Df)(a)](x)\,\big](k) \qquad \forall x,k\in X$$

Por tanto, de la desigualdad (4) y la definición de la norma en $L(X,Y)$, deducimos que para $x\in X$ con $\|x\|<\delta$ se tiene

$$\|Df(a+x)(k) - Df(a)(k) - D^2f(a)(x,k)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\|x\|\,\|k\| \qquad \forall k\in X \tag{5}$$

En lo que sigue fijamos $h,k\in B(0,\delta/2)$.

Usaremos el teorema del valor medio, o más concretamente el lema previo que sirvió para probarlo, aplicado a la función $g:[0,1]\to Y$ definida por

$$g(t) = \varphi(h,tk) - t\,D^2f(a,b)(h,k) \qquad \forall t\in[0,1]$$

Obsérvese que $g(0)=\varphi(h,0)=0$ y $g(1)=\varphi(h,k)-D^2f(a)(h,k)$, luego el mencionado lema nos dará una estimación de $\|g(1)-g(0)\|$ que es la que necesitamos para probar (3).

Tenemos claramente

$$g(t) = f(a+h+tk) - f(a+h) - f(a+tk) + f(a) - t\,D^2f(a)(h,k) \qquad \forall t\in[0,1]$$

luego g es derivable en todo punto de $[0,1]$ con

$$g'(t) = Df(a+h+tk)(k) - Df(a+tk)(k) - D^2f(a)(h,k) \qquad \forall t\in[0,1]$$

Como $D^2f(a)$ es lineal en la primera variable, tenemos

$$D^2f(h+tk,k) - D^2f(h,k) = D^2f(tk,k)$$

y, para todo $t\in[0,1]$, podemos escribir

$$\begin{aligned} g'(t) = {}& \big(Df(a+h+tk)(k) - Df(a)(k) - D^2f(a)(h+tk,k)\big) \\ & - \big(Df(a+tk)(k) - Df(a)(k) - D^2f(a)(tk,k)\big) \end{aligned}$$

Usando ahora (5) con $x=h+tk$ y también con $x=tk$, pues en ambos casos se tiene $\|x\|<\delta$, obtenemos

$$\|g'(t)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\|h+tk\|\,\|k\| + \frac{\varepsilon}{2}\|tk\|\,\|k\| \leqslant \varepsilon\big(\|h\|+\|k\|\big)^2$$

Por tanto, tomando $\alpha(t) = \varepsilon\big(\|h\|+\|k\|\big)^2 t$ para todo $t\in[0,1]$, tenemos la hipótesis del mencionado lema, es decir, $\|g'(t)\|\leqslant\alpha'(t)$ para todo $t\in[0,1]$. El lema nos dice que

$$\|\varphi(h,k) - D^2f(a)(h,k)\| = \|g(1)-g(0)\| \leqslant \alpha(1)-\alpha(0) = \varepsilon\big(\|h\|+\|k\|\big)^2$$

y, como esta desigualdad es válida para cualesquiera $h,k\in B(0,\delta/2)$, hemos probado (3).

Probar ahora la igualdad (2) es bien fácil. En primer lugar, usando que φ es simétrica, para $h,k \in B(0,r)$ tenemos

$$0 \leqslant \| D^2 f(a)(k,h) - D^2 f(a)(h,k) \| \leqslant \| D^2 f(a)(k,h) - \varphi(k,h) \| + \| \varphi(h,k) - D^2 f(a)(h,k) \|$$

y de (3) deducimos que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\| D^2 f(a)(k,h) - D^2 f(a)(h,k) \|}{\big(\| h \| + \| k \| \big)^2} = 0 \tag{6}$$

Fijamos ahora $h_0, k_0 \in X$ y hacemos el cambio de variable $(h,k) = (t\,h_0, t\,k_0)$, pues para $t \in \mathbb{R}^*$ se tiene $(h,k) \in X \times X \setminus \{(0,0)\}$ y es claro que $(h,k) \to 0$ cuando $t \to 0$. Teniendo en cuenta que $D^2 f(a)$ es bilineal, obtenemos

$$0 = \lim_{t\to 0} \frac{\| D^2 f(a)(tk_0, th_0) - D^2 f(a)(th_0, tk_0) \|}{\big(\| th_0 \| + \| tk_0 \| \big)^2} = \frac{\| D^2 f(a)(k_0, h_0) - D^2 f(a)(h_0, k_0) \|}{\big(\| h_0 \| + \| k_0 \| \big)^2}$$

es decir, $D^2 f(a)(h_0,k_0) = D^2 f(a)\,(k_0,h_0)$ y, como esto es válido para cualesquiera $h_0, k_0 \in X$, hemos probado (2), y por tanto el teorema en el caso $n = 2$.

Pasemos ahora al caso $n \geqslant 3$. Consideramos primeramente la transpoción $\tau : I_n \to I_n$ definida por $\tau(1) = 2$, $\tau(2) = 1$ y $\tau(k) = k$ para todo $k \in I_n$ con $k \geqslant 3$. Pensemos entonces en la función $g = D^{n-2} f : \Omega \to L^{n-2}(X,Y)$, que es diferenciable en todo punto de Ω y 2 veces diferenciable en a. Aplicando a g lo ya demostrado, tenemos que

$$D^2 g(a)(h_1,h_2) = D^2 g(a)(h_2,h_1) \qquad \forall\, h_1,h_2 \in X$$

Fijados $h_1,h_2 \in X$, ambos miembros de la igualdad anterior son aplicaciones $(n-2)$-lineales, que podemos evaluar en toda $(n-2)$-upla $(h_3,\ldots,h_n)$ del producto cartesiano de $n-2$ copias de X, obteniendo que

$$\big[D^2 g(a)(h_1,h_2) \big](h_3,\ldots h_n) = \big[D^2 g(a)(h_2,h_1) \big](h_3,\ldots h_n) \qquad \forall\, h_1,h_2,\ldots,h_n \in X \tag{7}$$

Interpretando adecuadamente esta igualdad, veremos que se cumple (1) para la aplicación biyectiva $\sigma = \tau$. Considerando los espacios normados $Z_1 = L^{n-1}(X,Y)$ y $Z_2 = L^{n-2}(X,Y)$ tenemos la siguiente cadena de identificaciones

$$L^n(X,Y) \equiv L\big(X, Z_1\big) \equiv L\big(X, L(X,Z_2)\big) \equiv L^2(X,Z_2)$$

Se comprueba rutinariamente sin ninguna dificultad que, al aplicar a $D^n f(a)$ esta cadena de identificaciones, se obtiene $D^2 g(a)$, en el sentido de que

$$D^n f(a)(h_1,h_2,\ldots,h_n) = \big[D^2 g(a)(h_1,h_2) \big](h_3,\ldots h_n) \qquad \forall\, h_1,h_2,\ldots,h_n \in X$$

Por tanto la igualdad (7) nos dice que

$$D^n f(a)(h_1,h_2,h_3\ldots,h_n) = D^n f(a)(h_2,h_1,h_3,\ldots,h_n)$$

y esto prueba, como queríamos, que la transposición τ verifica la igualdad (1). Por comodidad de notación hemos supuesto que τ intercambia los elementos 1 y 2 de I_n dejando fijos los restantes, pero el mismo razonamiento es válido para cualquier otra transposición. Finalmente pensemos que, si σ_1 y σ_2 son dos biyecciones de I_n en sí mismo, y ambas verifican la igualdad (1), entonces $\sigma_2 \circ \sigma_1$ también la verifica. Usando entonces que toda biyección $\sigma : I_n \to I_n$ se puede expresar como composición de un cierto número de transposiciones, concluimos que σ verifica (1), lo que concluye la demostración. ■