Lección 4

Equivalencia entre normas

Prestamos ahora atención a la posibilidad de que dos distancias diferentes en un mismo conjunto generen la misma topología, es decir, den lugar a los mismos conjuntos abiertos. En tal caso tendremos dos espacios métricos distintos, pero con idénticas propiedades topológicas. Nos interesa especialmente el caso de las distancias asociadas a dos normas.

Veremos que las tres normas que por ahora conocemos en $\mathbb{R}^N$ tienen la misma topología, lo que nos permitirá definir la *topología usual* de $\mathbb{R}^N$. Finalmente veremos la relación entre la topología de un espacio métrico y la de cualquier subespacio métrico suyo, lo que nos permitirá hablar de la topología usual de cualquier subconjunto de $\mathbb{R}^N$.

4.1. Normas equivalentes

Se dice que dos distancias en un conjunto E son *equivalentes*, cuando generan la misma topología, es decir, los conjuntos abiertos para ambas distancias son los mismos. Tenemos así, valga la redundancia, una relación de equivalencia en el conjunto de todas las distancias en E. Decimos que dos normas en un mismo espacio vectorial X son *equivalentes* cuando lo son las distancias asociadas, esto es, cuando las topologías de ambas normas coinciden. La equivalencia entre dos normas se caracteriza de forma muy sencilla, como vamos a ver.

- *Para dos normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ definidas en un mismo espacio vectorial X, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

  (i) *Existe una constante $\rho \in \mathbb{R}^+$ tal que $\|x\|_2 \leqslant \rho\,\|x\|_1$ para todo $x \in X$.*

  (ii) *La topología de la norma $\|\cdot\|_2$ está incluida en la de $\|\cdot\|_1$.*

Para la demostración, dados $x \in X$ y $r \in \mathbb{R}^+$, denotamos por $B_1(x,r)$ y $B_2(x,r)$ a las bolas abiertas de centro x y radio r para las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$, respectivamente.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Si U es un conjunto abierto para la norma $\|\cdot\|_2$, para cada $x \in U$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_2(x,\varepsilon) \subset U$. De (i) deducimos entonces claramente que $B_1(x,\varepsilon/\rho) \subset B_2(x,\varepsilon) \subset U$, luego U es abierto para la norma $\|\cdot\|_1$, como queríamos.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Como $B_2(0,1)$ es abierto para $\|\cdot\|_2$, también lo será para $\|\cdot\|_1$, luego ha de existir $\delta > 0$ tal que $B_1(0,\delta) \subset B_2(0,1)$. Tomando $\rho = 1/\delta > 0$ conseguimos la desigualdad buscada. En efecto, si $x \in X$ verificase que $\|x\|_2 > \rho\,\|x\|_1$, tomando $y = x/\|x\|_2$ tendríamos

$$\|y\|_1 = \frac{\|x\|_1}{\|x\|_2} < \frac{1}{\rho} = \delta$$

de donde $\|y\|_2 < 1$, que es una contradicción, puesto que claramente $\|y\|_2 = 1$. Así pues, $\|x\|_2 \leqslant \rho\,\|x\|_1$ para todo $x \in X$, como queríamos. ■

Está claro ahora que dos normas serán equivalentes si y sólo si, se verifica la desigualdad que aparece en la condición (i), junto con la que se obtendría intercambiando los papeles de ambas normas. Esta otra desigualdad se puede escribir para que enlace con la que ya teníamos, sin más que dividir ambos miembros por la constante que en ella aparezca. Obtenemos así un sencillo criterio para decidir si dos normas son equivalentes:

- *Dos normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ en un espacio vectorial X son equivalentes si, y sólo si, existen constantes $\lambda, \rho \in \mathbb{R}^+$ tales que*

$$\lambda\,\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \rho\,\|x\|_1 \qquad \forall x \in X$$

Dos normas son proporcionales cuando verifican las desigualdades anteriores con $\lambda = \rho$, lo que implica que son equivalentes, como cabía esperar. Por tanto, todas las normas en $\mathbb{R}$ son equivalentes. Enseguida veremos ejemplos más interesantes.

Para la equivalencia entre dos distancias no se dispone de un criterio tan cómodo como en el caso particular de dos normas. De momento no vamos a profundizar en el problema general de la equivalencia entre dos distancias. Más adelante obtendremos información al respecto.

4.2. La topología usual de $\mathbb{R}^N$

Aplicando el criterio recién obtenido, vemos fácilmente que las tres normas que hasta ahora hemos considerado en $\mathbb{R}^N$ son equivalentes:

- *En $\mathbb{R}^N$, la norma euclídea, la de la suma y la del máximo, son equivalentes.*

La relación entre la norma del máximo $\|\cdot\|_\infty$ y la de la suma $\|\cdot\|_1$ es evidente:

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1 \leqslant N\,\|x\|_\infty \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

Para la norma euclídea $\|\cdot\|$, el razonamiento es también evidente y podemos incluso mejorar la segunda desigualdad:

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\| \leqslant N^{1/2}\,\|x\|_\infty \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

Por supuesto, la norma euclídea y la de la suma son equivalentes, pues hemos visto que ambas son equivalentes a la del máximo. ■

La topología común a las tres normas cuya equivalencia acabamos de comprobar, se conoce como *topología usual de* $\mathbb{R}^N$, por ser la que siempre consideramos. Para estudiarla podemos usar cualquiera de las tres normas mencionadas. A sus elementos les llamamos simplemente *abiertos* de $\mathbb{R}^N$.

4.3. Dos normas que no son equivalentes

Veremos más adelante que *todas las normas en* $\mathbb{R}^N$ *son equivalentes*. Por tanto, si queremos tener un ejemplo de dos normas que no sean equivalentes, deberemos buscarlas en un espacio vectorial de dimensión infinita.

Recordemos dos normas conocidas en el espacio vectorial $C[0,1]$ de todas las funciones continuas de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$. Para $x \in C[0,1]$ definíamos

$$\|x\|_\infty = \text{máx}\left\{ |x(t)| \, : \, t \in [0,1] \right\} \qquad \text{y} \qquad \|x\|_1 = \int_0^1 |x(t)| \, dt$$

Las propiedades de la integral nos dan una clara desigualdad entre ellas, $\|x\|_1 \leqslant \|x\|_\infty$ para toda función continua $x \in C[0,1]$. Por tanto, la topología de la norma $\|\cdot\|_1$ está incluida en la de $\|\cdot\|_\infty$. Pero esta inclusión es estricta, como vamos a ver. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $x_n \in C[0,1]$ por $x_n(t) = t^{n-1}$ para todo $t \in [0,1]$. Es claro que $\|x_n\|_\infty = 1$ y $\|x_n\|_1 = 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si existiese una constante $\lambda \in \mathbb{R}^+$ verificando que $\lambda \|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1$ para toda función continua $x \in C[0,1]$, tendríamos $\lambda \leqslant 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, flagrante contradicción. Así pues, las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$, en el espacio $C[0,1]$, no son equivalentes.

El mismo razonamiento prueba que la norma $\|\cdot\|$ asociada al producto escalar de $C[0,1]$ tampoco es equivalente a $\|\cdot\|_\infty$. Basta observar que $\|x_n\| = 1/\sqrt{2n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dar un ejemplo de dos distancias que no son equivalentes es mucho más fácil: sabemos que la topología usual de $\mathbb{R}$ no es la topología discreta, es decir, la distancia usual de $\mathbb{R}$ no es equivalente a la distancia discreta.

4.4. Topología inducida

Sea E un espacio métrico cuya distancia d genera una topología $\mathcal{T}$. Si A es un subespacio métrico de E, tenemos en A la distancia inducida d_A, que genera una topología $\mathcal{T}_A$, y es natural preguntarse por la relación entre $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}_A$. Nótese que $A \in \mathcal{T}_A$ pero puede ocurrir que $A \notin \mathcal{T}$. Para buscar la relación entre los abiertos de E y los de A, es natural empezar por la relación entre las bolas abiertas en uno y otro espacio.

Dados $a \in A$ y $r \in \mathbb{R}^+$, denotemos por $B(a,r)$ y $B_A(a,r)$ a las bolas abiertas de centro a y radio r en los espacios métricos E y A respectivamente. Recordando que la distancia d_A es la restricción al conjunto $A \times A$ de la distancia d, la relación entre ambas bolas está clara:

$$B_A(a,r) = \left\{ x \in A \, : \, d_A(x,a) < r \right\} = \left\{ x \in A \, : \, d(x,a) < r \right\} = B(a,r) \cap A$$

A partir de aquí, la relación entre las topologías $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}_A$ se adivina fácilmente: los abiertos de A son las intersecciones con A de los abiertos de E, como vamos a comprobar.

Si $U \in \mathcal{T}$, para cada $a \in U \cap A$ existe $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $B(a,r) \subset U$, luego $B_A(a,r) \subset U \cap A$ y esto prueba que $U \cap A \in \mathcal{T}_A$. Recíprocamente, si $V \in \mathcal{T}_A$, para cada $a \in V$ existe $r_a \in \mathbb{R}^+$ tal que $B_A(a,r_a) \subset V$. Tomando entonces

$$U = \bigcup_{a \in V} B(a,r_a)$$

tenemos que $U \in \mathcal{T}$, por ser una unión de bolas abiertas en E. Además, tenemos claramente

$$U \cap A = \bigcup_{a \in V} \big(B(a,r_a) \cap A \big) = \bigcup_{a \in V} B_A(a,r_a) = V$$

Queda pues probado que $\mathcal{T}_A = \{ U \cap A : U \in \mathcal{T} \}$ para cualquier subespacio métrico $A \subset E$. La situación es más clara cuando A es un abierto de E, es decir, $A \in \mathcal{T}$. Para cualquier conjunto $V \subset A$, se tiene entonces que $V \in \mathcal{T}_A$ si, y sólo si, $V \in \mathcal{T}$. En efecto, de $V \in \mathcal{T}$ deducimos que $V = V \cap A \in \mathcal{T}_A$. Pero recíprocamente, si $V \in \mathcal{T}_A$, hemos visto que $V = U \cap A$ con $U \in \mathcal{T}$, luego $V \in \mathcal{T}$, por ser la intersección de dos elementos de $\mathcal{T}$. Enunciamos explícitamente las conclusiones obtenidas, que se usarán frecuentemente en lo que sigue:

- *Si $\mathcal{T}$ es la topología de un espacio métrico E y $\mathcal{T}_A$ la de un subespacio métrico $A \subset E$, se tiene:*
$$\mathcal{T}_A = \{ U \cap A : U \in \mathcal{T} \}$$
En particular, cuando $A \in \mathcal{T}$, para $V \subset A$ se tiene que $V \in \mathcal{T}_A$ si, y sólo si, $V \in \mathcal{T}$.

El resultado anterior nos permite conocer la topología $\mathcal{T}_A$ del subespacio métrico A, con sólo conocer la topología $\mathcal{T}$ del espacio métrico E, aunque no conozcamos la distancia concreta que la genera, e incluso aunque no conozcamos la distancia inducida, puesto que nos da una relación directa entre $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}_A$. Por ello decimos que $\mathcal{T}_A$ es la *topología inducida* por $\mathcal{T}$ en A. La nomenclatura es coherente: la distancia inducida genera la topología inducida.

Claramente, si dos distancias en un conjunto E son equivalentes, es decir, generan una misma topología $\mathcal{T}$, las distancias inducidas en cualquier subconjunto no vacío $A \subset E$ también son equivalentes, puesto que ambas generan la topología inducida $\mathcal{T}_A$.

Destacamos el caso que más nos interesa. Recordemos que en $\mathbb{R}^N$ tenemos tres distancias equivalentes, que generan la que hemos llamado topología usual de $\mathbb{R}^N$. Si ahora A es un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^N$, tenemos en A las tres distancias inducidas, que también son equivalentes, generan la topología inducida en A por la topología usual de $\mathbb{R}^N$, que llamaremos *topología usual* de A. Como hemos visto, los abiertos de A son las intersecciones con A de los abiertos de $\mathbb{R}^N$, que en general no tienen por qué ser abiertos de $\mathbb{R}^N$. Para enfatizar la distinción se suele decir que los abiertos de A son *abiertos relativos*. Hemos visto también que, cuando A es un abierto de $\mathbb{R}^N$, los abiertos relativos no son ni más ni menos que los abiertos de $\mathbb{R}^N$ que estén contenidos en A.