Ejercicios de la materia
Ecuaciones diferenciales y mecánica

Julián Haddad

September 15, 2008

1 Ejercicio

Dado un abierto $E \subseteq \mathbb{R}^2$ decimos que es "saturado" si $\overline{E}^o = E$

Sean $\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un homeomorfismo que preserva área y $E \subseteq \mathbb{R}^2$ un abierto acotado y saturado tales que $\psi(E) \subseteq E$ probar que $\psi(E) = E$.

1.1 Solución

Como ψ es un homeomorfismo, es claro que $\psi(E)$ es un conjunto saturado. De hecho,

$\psi(E) = \psi(\overline{E}^o) = \psi(\overline{E})^o = \overline{\psi(E)}^o$

Como ψ preserva medida, $\psi(E) \subseteq E$ y E tiene medida finita, la medida de $E \setminus \psi(E)$ tiene que ser 0. Entonces $E \setminus \psi(E)$ tiene interior vacío. (Observación: uso que los abiertos tienen medida positiva)

Luego $\psi(E)$ es denso en E.

$E = \overline{\psi(E)}$ y tomando interior,

$E = E^o = \overline{\psi(E)}^o = \psi(E)$

como queríamos probar.

2 Ejercicio

Encontrar un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto y un homeomorfismo $\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que preserve área, tales que $\psi(E) \subsetneq E$

2.1 Solución

sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = (1 - x^2 - y^2, 2xy)$

Este campo induce una ecuacion diferencial ordinaria y un mapa de Poincare $\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Como f es un campo de divergencia 0, ψ preserva áreas.

El campo tiene puntos de equilibrio $(0, 1), (0, -1), (1, 0), (-1, 0)$ y tres heteroclinas que unen (0,1),(0,-1). Las que viajan del (0,1) al (0,-1) detelimitan un conjunto invariante por la aplicación de Poincare. Definimos el conjunto G

como este conjunto invariante (sin el borde) y $E = G - (\mathbb{R}_{<0} \times \{0\})$. Entonces es claro que E es un abierto, invariante por ψ y que $\psi(E) \subsetneq E$. Por supuesto, E no es un conjunto saturado.

3 Ejercicio

Dadas $p, q : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continuas con $p < q$ llamamos $G_{p,q} = \{(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R} : p(x) \leq y \leq q(x)\}$ a la superficie entre las funciones p y q.

Construir un homeomorfismo que preserve áreas, entre $G_{p,q}$ y un rectángulo.

3.1 Solución

La idea es mandar $G_{p,q} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq x_0\}$ en $[0, L(x_0)] \times [0, 1]$ para algún $L(x_0)$ tal que las áreas sean iguales. Además queremos mandar el gráfico de p al 0 y el de q al 1.

Proponemos la siguiente función:

$f : (x, y) \longmapsto (L(x), \frac{y-p(x)}{q(x)-p(x)})$

donde $L(x) = \int_a^x q - p$

Como $q - p > 0$ esta función es continua. Además es derivable y la diferencial es

$$Df(x) = \begin{vmatrix} q(x) - p(x) & 0 \\ algo & \frac{1}{q(x)-p(x)} \end{vmatrix}$$

que tiene determinante 1, entonces f preserva área. Como $q - p$ es estrictamente positiva, L resulta estrictamente creciente. Luego es fácil ver que f es biyectiva entre $G_{p,q}$ y $[0, L(b)] \times [0, 1]$. Además, como f es continua y $G_{p,q}$ es compacto, f resulta homeo.