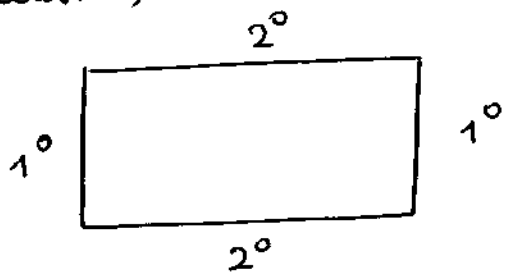
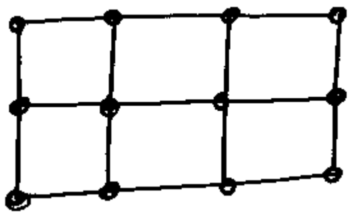
Modelos matemáticos, Segundo Examen, Curso 02-03

1) Una placa rectangular, de 6 mm de anchura y 4 de altura, tiene una temperatura fija en el borde dada por



Se considera la red



Formula un modelo estacionario para la distribución de la temperatura en esta red.

2) Calcula $\frac{1}{2\pi}\int_C u$ donde C es la circunferencia de centro el origen y radio 1 y la función u es

$$u(x,y) = x^2 + y^2 + 5xy$$

¿Es u armónica?

3) Escribimos un número cualquiera en la calculadora y presionamos la tecla $\boxed{\text{exp}}$ muchas veces; se observa que siempre acaba por aparecer el símbolo E. Explica este hecho de manera rigurosa.

4) ¿Existe una función continua $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que admite 3-ciclos pero no admite 2-ciclos? ¿Existe $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua, con punto fijo y sin 2-ciclos?

5) Considera el modelo logístico

$$x_{n+1} = \frac{3}{2}x_n(1-x_n), \quad x_n \in [0,1].$$

Describe e interpreta el comportamiento asintótico de las soluciones

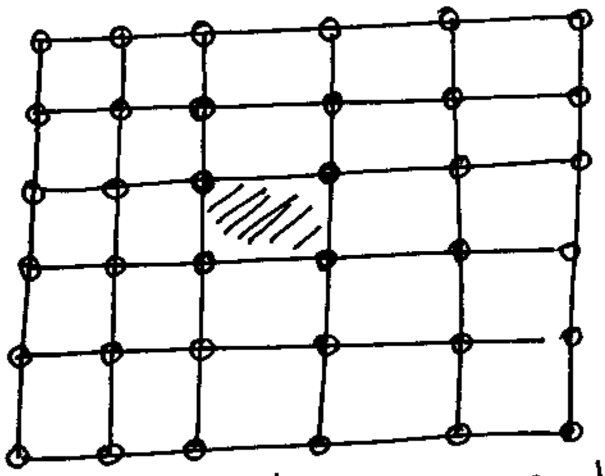
Segundo examen

MODELOS MATEMÁTICOS

NOMBRE ______________________

Curso 2003-04

(1) Una placa metálica tiene la forma  .
La temperatura en la frontera exterior se mantiene a 10° y en la interior a 5°.
Formula un modelo discreto para la temperatura estacionaria según la red



Escribe de manera explícita las ecuaciones para dos nodos interiores. ¿Cuántas ecuaciones hay?

(2) La economía de un país se ha estructurado en dos sectores A y B. En el modelo de Leontieff la matriz de input-output es

	A	B
A	0.3	0.6
B	0.7	0.4

¿Qué porcentaje de participación en la riqueza del país se debe asignar a cada sector?

(3) En una calculadora científica escribimos un número cualquiera y comenzamos a presionar la tecla $\boxed{\sin}$ de manera reiterada. ¿Qué ocurrirá después de que hayamos presionado muchas veces? ¿Por qué?

(4) En el libro "Puntos Fijos para el matemático post-moderno" aparece el «TEOREMA»:

Sea $I = [a,b]$ un intervalo compacto y $f : I \to \mathbb{R}$ continua. Entonces f tiene al menos un punto fijo si se cumple alguna de las condiciones que siguen

a) $f(I) \subseteq I$

b) $I \subseteq f(I)$

c) $f(I) \cap I = \phi$

Este resultado es FALSO porque una de las condiciones no garantiza la existencia de puntos fijos. Señala la condición errónea y justifica tu elección.

(5) Sean $J' = [a,b]$ y $J'' = [c,d]$ dos intervalos compactos y disjuntos que cumplen $a < b < c < d$. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y tal que

$$J'' \subset f(J'), \quad J' \cup J'' \subset f(J'').$$

Demuestra que la ecuación en diferencias $x_{n+1} = f(x_n)$ tiene N-ciclos para cada $N \geq 1$.

MODELOS MATEMÁTICOS
2º Examen, Curso 04-05

(1) Un modelo de Leontieff cerrado tiene tres Sectores (I, II y III) y la matriz de input-output es

$$E = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ \alpha & 1/3 & \gamma \\ 1/2 & \beta & 1/2 \end{pmatrix}$$

¿Cuánto vale α? ¿Qué porcentaje de la producción del Sector III es consumido por el Sector I?

(2) Una población sigue un modelo logístico con

x_n = tamaño de la población en el año n.

La tasa de fecundidad por individuo y año es

$$\alpha(x) = \frac{7}{3} - \frac{1}{2}x$$

y la probabilidad de muerte

$$\beta(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}x.$$

Escribe la ecuación logística correspondiente y encuentra un intervalo $I = [0, M]$, $M > 0$, donde el modelo está bien definido.

(3) Se considera la placa discreta

$$\Omega = \{\delta(i,j) \ / \ 0 \le i \le j \le 3\}$$

para algún $\delta > 0$. Representa gráficamente Ω. ¿Cuántos puntos tiene el borde discreto $\partial\Omega$? Calcula la solución de

$$u(p) = \frac{1}{4} \sum_{q \in \mathcal{C}(p)} u(q), \quad p \in \Omega \ ; \ u(p) = \phi(p) \text{ si } p \in \partial\Omega$$

si $\phi(p) = 3 \quad \forall p \in \partial\Omega$.

(4) Describe la dinámica de la ecuación

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \ln(1 + x_n), \quad x_n \in [0, \infty[.$$

(5) Sea $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq N}$ una matriz que cumple

$$a_{ij} \geqslant 0 \quad \forall i,j = 1, \dots, N.$$

Demuestra que

$$\sigma(A) \cap [0, \infty[\neq \emptyset.$$