Modelos Matemáticos, Primer examen, Curso 02-03

(1) Se considera un modelo de Leslie con matriz

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

¿A qué edad son más fértiles los individuos? ¿Hay que esperar la extinción de la especie a largo plazo?

(2) En un modelo de la telaraña las funciones de demanda y oferta son $D(p) = 2 - ap$, $O(p) = 1 + bp$ donde $a > 0$, $b > 0$. Calcula el precio de equilibrio y la región del plano (a,b) donde se da la convergencia a este equilibrio.

(3) Sea la matriz

$$E = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.6 & 0.5 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.5 & 0.2 & 0 \end{pmatrix}$$

¿Es una matriz de input-output? ¿Existe solución de

$$Ep = p, \quad p \in \mathbb{R}^3_+, \quad \|p\| = \sum_1^3 |p_i| \,?$$

¿Es única?

(4) Construye una ecuación en diferencias que sea lineal, homogénea, de coeficientes constantes y que tenga la solución

$$\{1, 4, 9, 16, \ldots, n^2, \ldots\}$$

(5) Demuestra que todas las soluciones de

$$x_{n+7} - \frac{1}{3} x_{n+2} - \frac{1}{5} x_{n+1} - \frac{1}{5} x_n = 0$$

converge a cero para $n \to \infty$.

Modelos Matemáticos, Primer examen, Curso 03-04

① El modelo macroeconómico de Samuelson se rige por las ecuaciones

$$Y_n = C_n + I_n, \quad C_n = bY_{n-1}, \quad I_n = I_n' + G, \quad I_n' = k(C_n - C_{n-1})$$

Se supone $b = 0.1$, $k = 0.2$, $G = 1$. Calcula $\lim_{n\to\infty} Y_n$.
¿Puedes interpretar el resultado en términos macroeconómicos?

② En un invernadero se cultiva la planta "sinsabore". Los posibles genotipos son AA, Aa, aa. Se decide la polinización de todas las plantas con el tipo mixto Aa. Escribe las ecuaciones que rigen la evolución del perfil genético de estas plantas.

③ Construye una ecuación en diferencias del tipo

$$x_{n+k} + a_{k-1}x_{n+k-1} + \dots + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = 0$$

que tenga las soluciones $\{2^n\}_{n\geq 0}$ y $\{n3^n\}_{n\geq 0}$

④ Se considera la matriz de Leslie

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

Explica el significado de cada coeficiente. ¿Se extingue la especie? ¿A largo plazo qué grupo será más numeroso: jóvenes, mediana edad o viejos?

⑤ Un jugador de ajedrez es contratado por la compañía "Galactic Chess". Su trabajo consistirá en jugar 50 partidas simultáneas cada semana. El jugador dispone de dos estrategias, A y B. Gana en el 80% de los casos con la estrategia A y en el 60% con la estrategia B. Para diversificar su juego decide que cada semana empleará la estrategia B tantas veces como derrotas (o tablas) se hayan producido en la semana anterior. Después de algunas semanas de practicar este sistema observa un hecho curioso
¿De qué se trata?

MODELOS MATEMÁTICOS Nombre ____________

Curso 04-05, 1er Examen

(1) El virus informático FIBO2000 se instala en el ordenador y permanece inactivo durante un día. A partir del segundo día se activa y se reproduce infectando un nuevo ordenador cada día. Escribe la ecuación que describe la evolución del número de ordenadores infectados(*).

(*) Se supone que no hay antivirus y no se producen solapamientos

---

(2) En el espacio vectorial de las sucesiones reales S se considera el operador lineal

$$L: S \to S, \quad L(\{x_n\}) = \{x_n^*\}, \quad x_n^* = x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n.$$

Calcula $\operatorname{Ker} L$

---

(3) Las funciones de oferta y demanda de un producto son

$$D(p) = 3 - \alpha p, \quad O(p) = 1 + \beta p, \quad \text{con } \alpha, \beta > 0.$$

Se cumple

$$D(p_{n+1}) = O(p_n^e), \quad p_n^e = \frac{3}{4} p_n + \frac{1}{4} p_{n-1}.$$

Calcula el precio de equilibrio p_* y discute las condiciones sobre las marginales que aseguran la convergencia $\left(p_n \xrightarrow[n\to\infty]{} p_*\right)$.

(4) Dado $\theta \in \mathbb{R}$ se considera la matriz

$$A_\theta = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

¿Existe $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} A_\theta^n$?

---

(5) Dada una matriz $A \in M_d(\mathbb{C})$ demuestra que existe una sucesión $A_n \in M_d(\mathbb{C})$ que converge a A y de manera que cada matriz A_n es diagonalizable.