La Mecánica, una fuente de problemas

Rafael Ortega

Departamento de Matemática Aplicada
Facultad de Ciencias
Universidad de Granada, 18071 Granada, Spain
rortega@ugr.es

Notas dentro del curso "Matemáticas: vínculo interdisciplinar",
El Escorial, 25 de julio de 2006

Pensamos la Mecánica como una parte de las Matemáticas. Una vez que se fijan los axiomas (segunda ley de Newton, gravitación universal,...) todas las conclusiones se obtienen por el método deductivo.

Las ecuaciones diferenciales describen los movimientos de sólidos o sistemas de partículas cuando se conocen las fuerzas a las que están sometidos. Es por eso que el Análisis es esencial para la Mecánica. Cuando se estudian los problemas mecánicos en profundidad aparecen nuevas conexiones con casi cualquier otra parte de las Matemáticas. Así la Topología, que se encuentra al intentar describir las posibles configuraciones de un sistema. Imaginemos que nos han dado un juguete (sólido rígido) formado por tres segmentos que son perpendiculares dos a dos y que se cortan en el centro común. ¿En qué espacio se mueve nuestro juguete? Observamos primero el centro, que se mueve libremente en el espacio ordinario. Una vez que fijamos este centro podemos pasar de una posición a otra por medio de una rotación. Podemos concluir que nuestro objeto vive en el espacio de 6 dimensiones

$$M = \mathbb{R}^3 \times SO(3),$$

donde $SO(3)$ designa al grupo de rotaciones del espacio euclídeo. Si nuestro objeto está en movimiento podemos intentar calcular la energía cinética T; para ello necesitaremos conocer la longitud y grosor de cada segmento. Desde este momento el espacio M se convierte en una variedad de Riemann con $g = 2T$ y hemos entrado en el reino de la Geometría Diferencial. Para completar nuestro experimento usaremos una nave espacial que nos aleje de la tierra y de cualquier otra influencia gravitatoria. Desde este punto lanzamos nuestro objeto para que se mueva libremente, en ausencia de fuerzas ya sabemos que aparecen las geodésicas. Hoy vamos a concentrarnos en una conexión menos conocida entre la teoría de números y el problema de la estabilidad del sistema solar.

1 Números algebraicos y trascendentes

Un número irracional α se dice algebraico si es raíz de algún polinomio con coeficientes enteros,

$$f(\alpha) = 0, \;\; f(x) = x^s + a_{s-1}x^{s-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \;\; a_0, a_1, \ldots, a_{s-1} \in \mathbb{Z}.$$

Por ejemplo, $\alpha = \sqrt{2}$ es algebraico con $f(x) = x^2 - 2$. Los números irracionales no algebraicos se llaman trascendentes. Liouville encontró los primeros números trascendentes que se conocen. Para ello observó que si α es algebraico y el polinomio que lo anula es irreducible, entonces existe un número $\gamma > 0$ de manera que se cumple la condición

$$|\alpha - \frac{p}{q}| \geq \frac{\gamma}{q^s}, \quad \text{para cada } \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}.$$

Este hecho tan sútil tiene una demostración simple; es bastante aplicar el teorema del valor medio a la diferencia $f(\alpha) - f(\frac{p}{q})$. A partir de ahora hablaremos de la condición diofántica para referirnos a la anterior desigualdad, que tiene la siguiente interpretación: los números algebraicos no se dejan aproximar bien por racionales. Si fijamos el denominador q, la condición diofántica nos da una estimación inferior del error cometido al aproximar α por fracciones del tipo p/q. Ahora es fácil construir números trascendentes buscando irracionales que se dejen aproximar muy bien por racionales. El ejemplo típico es

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!} = 0.110001000000000000000000010...$$

Además de los números algebraicos hay otros muchos que cumplen la condición diofántica. Los números que no la cumplen (de Liouville) son de medida cero.

2 La estabilidad del sistema solar

¿Persistirá el sistema solar para toda la eternidad o, por el contrario, se producirá una colisión o escapará algún planeta fuera del sistema? En el modelo muy simplificado que se estudia en la escuela cada planeta describe una órbita elíptica alrededor del sol y la estabilidad es automática. Estamos pensando en el modelo más complejo en el que se tienen en cuenta las interacciones gravitatorias entre los planetas, es el famoso *Problema de los N cuerpos*. Ahora la respuesta no es fácil, se sabe probar que hay muchas condiciones iniciales que producen soluciones definidas en todo tiempo (no hay colisiones) y que están acotadas (los planetas no escapan). La demostración de este hecho se obtuvo después de un largo proceso histórico y la idea central fue la búsqueda de *soluciones trigonométricas*. Estas son soluciones del tipo

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos \omega_n t + b_n \operatorname{sen} \omega_n t\}$$

con $\sum[|a_n| + |b_n|] < \infty$. Es claro que en estas condiciones $x(t)$ está definida en todo tiempo y es acotada.

Conviene no confundir estas series con las series de Fourier tradicionales. Ahora las frecuencias ω_n son arbitrarias mientras que en la teoría de Fourier $\omega_n = n\omega_0$. Weierstrass ya sabía que era posible encontrar soluciones de este tipo en el problema de los N cuerpos, pero las soluciones eran formales y la convergencia de la serie no estaba clara. Esta convergencia no se probó hasta la segunda mitad del siglo XX y sólo en algunos casos; parece que dicha convergencia depende de la elección de las frecuencias de una manera muy delicada. Para entender esta última afirmación nos vamos a olvidar del difícil problema de los N cuerpos y vamos a pensar en las ecuaciones diferenciales más simples, las inducidas por el cálculo de primitivas.

Consideramos

$$\dot{x} = f(t) := \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} f_{n,m} e^{i(n+m\alpha)t}$$

donde $\sum |f_{n,m}| < \infty$ y α es un número irracional. Las frecuencias de la serie trigonométrica se han escogido en el grupo aditivo engendrado por los números 1 y α. Por integración término a término obtenemos

$$x(t) = x(0) + f_{0,0}t + \sum_{(n,m)\neq(0,0)} \frac{f_{n,m}}{i(n + m\alpha)} [e^{i(n+m\alpha)t} - 1].$$

Para obtener soluciones acotadas exigimos $f_{0,0} = 0$ y

$$\sum \frac{|f_{n,m}|}{|n + m\alpha|} < \infty.$$

Como el grupo $\langle 1, \alpha \rangle$ es denso en $\mathbb{R}$, el número $|n + m\alpha|$ se puede hacer tan pequeño como se quiera y aparecen así los *pequeños divisores.* Para probar la convergencia de la serie recurrimos a las ideas de Liouville. Si α cumple la condición diofántica,

$$|n + m\alpha| = |m||\frac{n}{m} + \alpha| \geq |m|\frac{\gamma}{|m|^s} = \frac{\gamma}{|m|^{s-1}},$$

de donde

$$\frac{|f_{n,m}|}{|n + m\alpha|} \leq \frac{1}{\gamma}|f_{n,m}||m|^{s-1}.$$

Si la función f es bastante regular la serie doble $\sum |f_{n,m}||m|^{s-1}$ converge y hemos probado la acotación de las primitivas de f.

Para preparar estas notas he usado el artículo
✓ Is the Solar System Stable?, de J. Moser, aparecido en The Mathematical Inteligencer **1** (1978) 65-71.
La charla habrá conseguido su objetivo si los estudiantes se interesan por leer este artículo.

También me ha sido útil el libro
✓ Mathematics and Logic, de M. Kac y S. Ulam. Reimpresión de Dover, 1992.
Entre otras muchas cosas este libro contiene una discusión muy clara sobre los números algebraicos y trascendentes.

Para estar a la última sobre el problema de la estabilidad se puede consultar
✓ J. Fèjoz, Démonstration du "théoreme d'Arnold" sur la stabilité du système planétaire (d'après Michael Herman), Ergod. Th. and Dynam. Sys. **24** (2004) 1-62.