Finales primos para la dinámica

Rafael Ortega

Departamento de Matemática Aplicada
Facultad de Ciencias
Universidad de Granada, 18071 Granada, Spain
rortega@ugr.es

Castellón, Mayo de 2011

El teorema de Riemann permite transformar de manera conforme un abierto simplemente conexo del plano en el disco abierto. Caratheodory desarrolló la teoría de finales primos para entender el comportamiento de la transformación conforme cerca de la frontera. Se trata por tanto de una teoría que nació dentro de la variable compleja, pero que ha encontrado bastantes aplicaciones en dinámica y teoría de punto fijo. Vamos a presentar los finales primos a un nivel topológico-intuitivo. El desarrollo riguroso se puede encontrar en las exposiciones de Pommerenke [8, 9], usando la variable compleja, y en el trabajo de Mather [5], que tiene un enfoque más topológico.

Consideramos el disco unidad

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\}$$

y un abierto y simplemente conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$. Se supone que Ω es un subconjunto propio del plano complejo. El teorema de Riemann de la transformación conforme afirma que existe un difeomorfismo holomorfo $\mathcal{R} : \mathbb{D} \to \Omega$.

A partir de ahora será cómodo pensar el plano complejo dentro de la esfera de Riemann $\mathbb{S}^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Las nociones de interior, cierre y frontera se referirán a $\mathbb{S}^2$.

Un **corte** (cross-cut) de Ω es un arco $C \cong [0, 1]$ que cumple $a, b \notin \Omega$ y $\dot{C} = C \setminus \{a, b\} \subset \Omega$, donde a y b son los extremos de C. El segmento vertical que une i y $-i$ es un corte de $\mathbb{D}$. La semi-recta $C = \{i\lambda : \lambda \geq 0\} \cup \{\infty\}$ es un corte del semi-plano $\Omega = \{z : \mathrm{Im} z > 0\}$.

Lema 1 *Todo corte divide a Ω en dos regiones homeomorfas a $\mathbb{D}$.*

Demostración. Pretendemos probar que $\Omega \setminus C$ tiene dos componentes conexas, ambas homeomorfas a $\mathbb{D}$. Empezamos por observar que Ω es homeomorfo a $\mathbb{D}$ y entonces la compactificación por un punto, $\hat{\Omega} = \Omega \cup \{\partial\Omega\}$, es un espacio homeomorfo a $\mathbb{S}^2$. La curva $\hat{C} = C \cup \{\partial\Omega\}$ está en $\hat{\Omega}$ y, como es cerrada y simple, podemos usar el teorema de Jordan-Schonflies en la esfera. Así sabemos que $\hat{\Omega} \setminus \hat{C} = \Omega \setminus C$ tiene dos componentes homeomorfas al disco abierto.

A partir de ahora será conveniente fijar un punto $z_\star$ de Ω y trabajar solo con cortes que no pasen por este punto. La componente de $\Omega \setminus C$ que no contiene a $z_\star$ se designará por $D(C)$.

Una **cadena** es una sucesión de cortes $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $z_\star \notin C_n$, cuyos diámetros cumplen $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(C_n) = 0$ y además, para cada $n < m$,

$$C_m \cap C_n = \emptyset, \quad D(C_m) \subset D(C_n).$$

Observaciones. 1. El conjunto $D(C_{n+1})$ también queda dentro de $D(C_n)$ y por tanto los cortes seccionan una parte de Ω cada vez más pequeña.
2. En la definición anterior el diámetro (supremo de las distancias entre dos puntos del conjunto) se entiende en la esfera de Riemann y no en el plano.

Ejemplos. 1. $\Omega = \mathbb{D}$, $z_\star = 0$, C_n es el segmento que une los puntos $e^{i/n}$ y $e^{-i/n}$. Las regiones $D(C_n)$ son pequeños sectores que se acumulan en 1.
2. $\Omega = \mathbb{R}\times]0,1[$, $z_\star = -1$, $C_n = \{n\} \times [0,1]$. Los conjuntos $D(C_n)$ son bandas semi-acotadas que se acumulan en infinito. Es interesante observar que en este ejemplo $\operatorname{diam}_{\mathbb{C}}(C_n) = 1$ mientras que $\operatorname{diam}_{\mathbb{S}^2}(C_n) \to 0$.

Definición. Dos cadenas son equivalentes, $(C_n) \sim (C_n^*)$, si se cumple que para cada n existen números $\sigma(n)$ y $\tau(n)$ de manera que $C^*_{\sigma(n)} \subset D(C_n)$ y $C_{\tau(n)} \subset D(C_n^*)$.

Ejemplos. 1.*La banda infinita.* En $\Omega = \mathbb{R}\times]0,1[$ las cadenas $C_n = \{n\} \times [0,1]$ y $C_n^* = \{-n\} \times [0,1]$ no son equivalentes. La intuición nos dice que representan las dos maneras de ir al infinito en la banda, por la derecha y por la izquierda. A partir de ahora no precisaremos la elección del punto $z_\star$ pues es irrelevante.
2. *El disco rasgado.* Consideramos el dominio $\Omega = \mathbb{D} \setminus [0,1]$. Dado un punto ξ en el intervalo]0,1], trazamos la circunferencia C_n de centro ξ y radio $\frac{1}{n}$. Para n grande $C_n^+ = C_n \cap \{z : \ \operatorname{Im} z \geq 0\}$ define una cadena. De modo análogo obtenemos la cadena $C_n^- = C_n \cap \{z : \ \operatorname{Im} z \leq 0\}$. Estas cadenas no son equivalentes aunque se acumulan en el mismo punto frontera ξ, y representan las dos maneras de acercarse a este punto desde el dominio.

3. *La serpiente de cascabel.* Consideramos el dominio Ω definido en coordenadas polares por

$$\Omega : \ \ 1 + e^{-\theta} < r < 1 + 2e^{-\theta}.$$

Se trata de una región comprendida entre dos espirales que se acumulan en infinito y alrededor de la circunferencia unidad $\mathbb{S}^1$. La frontera está compuesta por las dos espirales, el punto del infinito y $\mathbb{S}^1$. Las cadenas $C_n : \ 1 + e^{-2n\pi} \leq r \leq 1 + 2e^{-2n\pi}, \ \theta = 2n\pi$ y $C_n^* : \ 1 + e^{-(2n+1)\pi} \leq r \leq 1 + 2e^{-(2n+1)\pi}, \ \theta = (2n+1)\pi$ son equivalentes. Este ejemplo muestra que dos cadenas pueden ser equivalentes sin que se acumulen en un mismo punto de la frontera.

Denotamos por $\mathcal{C}$ al conjunto de todas las cadenas de Ω, como tenemos una relación de equivalencia podemos considerar el espacio cociente o **espacio de finales primos**

$$\mathbb{P} = \mathbb{P}(\Omega) = \mathcal{C} / \sim .$$

En la definición original de cadena según Caratheodory no se exigía que el diámetro de C_n tendiese a cero. Para esas cadenas más generales se mantiene la relación de equivalencia y además se define una relación de divisibilidad: (C_n) *divide* a (C_n^*) si para cada n existe $\tau(n)$ de manera que $C_{\tau(n)} \subset D(C_n^*)$. Una cadena es *prima* si no admite más divisores que sus equivalentes. Esto explica el nombre de la teoría.

Cálculo de $\mathbb{P}$. 1. *El disco.* Si $\Omega = \mathbb{D}$ hay una clara biyección entre los finales primos y los puntos de la frontera de Ω. Lo mismo ocurre para cualquier Ω cuya frontera sea una curva de Jordan.
2. *La banda.* Si $\Omega = \mathbb{R} \times]0,1[$ podemos asociar un final primo a cada punto finito de la frontera. Para el infinito, como ya sabemos, aparecen dos finales primos que podemos llamar infinito por la derecha e infinito por la izquierda, denotados por ∞_d, ∞_i.
3. *El disco rasgado.* Si $\Omega = \mathbb{D} \setminus [0,1]$ podemos asociar un final primo a cada punto de $\mathbb{S}^1$ y también al origen. Por el contrario, a cada punto de $]0,1]$ se le asocian dos finales primos. Dado un punto ξ de $\partial\Omega \setminus]0,1]$ usaremos la notación p_ξ para el final primo correspondiente. Si $\xi \in]0,1]$ denotaremos por $p_{\xi,+}$ y $p_{\xi,-}$ a los finales primos asociados. Podemos pensar que el corte del disco se ha abierto de manera que pasamos del disco rasgado al pac-man o come-cocos.
4. *El peine.* Consideramos el interior del cuadrado de vértices $1+i$, $-1+i$, $-1-i$ y $1-i$ y lo denotamos por R. Entonces definimos $\Omega = R \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \sigma_k$ donde σ_k es el segmento vertical que une los puntos $a_k = -1 + \frac{1}{2k}$ y $b_k = -1 + \frac{1}{2k} - i$. Para cada punto de $\sigma_k \setminus \{a_k\}$ tenemos asociados dos finales

primos igual que en el ejemplo anterior. También tenemos un final primo asociado a cada punto a_k y a cada punto de $\partial R \setminus (\cup_{k\geq 1}\sigma_k \cup \sigma)$, donde σ es el segmento que une $a=-1$ y $b=-1-i$. Por último aparece un final primo de nuevo tipo cuando consideramos la cadena (C_n) formada por segmentos que unen el punto a_k al $a+\frac{1}{2k}$. De manera poco precisa podemos pensar que este final primo colapsa el segmento σ a un punto, por eso emplearemos la notación p_σ.
5. *La serpiente de cascabel.* Tenemos un final primo asociado a cada punto de las espirales y otros dos finales más especiales. Uno está asociado a la cadena $C_n^\flat: \ 1+e^{2n\pi} \leq r \leq 1+2e^{2n\pi}, \ \theta=-2n\pi$ y representa la única forma de viajar a infinito desde dentro de Ω, lo denotaremos por p_∞; el otro está asociado a las cadenas C_n y C_n^* que se introdujeron antes y se puede pensar como un colapso de $\mathbb{S}^1$, se denotará por $p_{\mathbb{S}^1}$.

Topología de $\mathbb{P}$. Definimos una sub-base de entornos de cada punto $p \in \mathbb{P}$. Para ello fijamos una cadena (C_n) que defina a p y los entornos

$$U_n = \{q \in \mathbb{P}: \ q \text{ puede ser definido por una cadena } (C_m^*) \text{ que cumple}$$
$$D(C_m^*) \subset D(C_n), \ C_m^* \cap C_n = \emptyset\}.$$

Por ejemplo, si consideramos el disco rasgado y el final primo $p_{1,+}$, los entornos de la sub-base serán de la forma $U_n = \{p_{\xi,+}: \ \xi \in]\alpha,1]\} \cup \{p_\xi : \xi = e^{i\theta}, \ \theta \in]0,\beta]\}$. Ahora podemos revisar todos los ejemplos anteriores y comprobar que siempre se cumple que el espacio de finales primos es homeomorfo a la circunferencia. El resultado central de esta teoría dice que

$$\mathbb{P}(\Omega) \cong \mathbb{S}^1$$

para cualquier Ω.

Podemos llegar un poco más lejos y definir una topología natural en la unión disjunta $\Omega^* = \Omega \cup \mathbb{P}$. La sub-base de entornos de un punto de Ω será la usual en $\mathbb{C}$, para los puntos $p \in \mathbb{P}$ unimos U_n y $D(C_n)$. Se cumple

$$(\Omega^*, \mathbb{P}(\Omega)) \cong (\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{S}^1)$$

para cualquier Ω. Podemos pensar en la teoría de finales primos como un método para fabricar una regularización (abstracta) de la frontera de los dominios simplemente conexos.

La impresión y los puntos principales. Cuando se empieza a estudiar la teoría de finales primos se tiende a pensar que un final primo es en esencia un subconjunto de la frontera del dominio. Esta idea errónea se va disipando a medida que se entienden los ejemplos clave. También puede ayudar el estudio de $I(p)$ y $\Pi(p)$.

Dado $p \in \mathbb{P}$ definimos su **impresión** como el conjunto

$$I(p) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{D(C_n)},$$

donde (C_n) es cualquier cadena que defina a p. Observamos que la elección de la cadena que representa al final primo es irrelevante. Dado que $I(p)$ se obtiene como límite decreciente de continuos, también resulta ser un continuo (=compacto+conexo+no vacío). Además $I(p)$ queda dentro de $\partial\Omega$.

Dado $p \in \mathbb{P}$ y $\xi \in \partial\Omega$, decimos que ξ es un **punto principal** de p si existe una cadena que representa a p y converge a ξ. El conjunto de puntos principales se denota por $\Pi(p)$. De la definición se sigue que $\Pi(p)$ es también un continuo que cumple $\Pi(p) \subset I(p)$. Veamos algunos **ejemplos**:

1. Si Ω es el interior de una curva de Jordan, para cada final primo p existe un punto ξ en la frontera de Ω de manera que $I(p) = \Pi(p) = \{\xi\}$. La misma situación se da en el disco rasgado pero ahora dos finales primos distintos pueden tener la misma impresión.
2. En el peine, para el final primo p_σ se cumple

$$I(p_\sigma) = \sigma, \;\; \Pi(p_\sigma) = \{-1\}.$$

3. En la serpiente de cascabel se cumple

$$I(p_{\mathbb{S}^1}) = \Pi(p_{\mathbb{S}^1}) = \mathbb{S}^1.$$

4. Por último vamos a construir un ejemplo en el que los continuos $I(p)$ y $\Pi(p)$ sean no degenerados y distintos. Con este fin vamos a modificar el peine introduciendo una nueva familia de puas que vienen de arriba. Definimos el *doble peine*, $\Omega = R \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty}(\sigma_k \cup \gamma_k)$, donde γ_k es el segmento que une los puntos $-1 + \frac{1}{2k+1} + i$ y $-1 + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2}i$. Consideramos la cadena (C_n) donde cada C_n es el segmento horizontal que une $-1 + \frac{1}{2k}$ a $-1 + \frac{1}{2k+1}$. Para el final primo asociado se cumple

$$I(p) = \gamma_1, \;\; \Pi(p) = \gamma_2,$$

donde γ_1 es el segmento que une $-1 + i$ a $-1 - i$ y γ_2 el que une $-1 - \frac{1}{2}i$ a -1.

Homeomorfismos del plano y regiones invariantes. En la dinámica discreta del plano pueden aparecer regiones invariantes con frontera muy complicada, incluso si la ecuación en diferencias

$$z_{n+1} = h(z_n), \;\; n \in \mathbb{Z}$$

viene dada por un difeomorfismo analítico h. Es aquí donde la teoría de finales primos y la dinámica se combinan, pues h se transporta a $\mathbb{P}$. Consideramos un homeomorfismo $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y una región abierta, simplemente conexa e invariante $\Omega = h(\Omega)$. Podemos extender el homeomorfismo h a la esfera de Riemann introduciendo un punto fijo en el infinito. Para $h : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ se cumple que $h(\Omega) = \Omega$ y $h(\partial\Omega) = \partial\Omega$ y observamos que todos los pasos en la construcción de $\mathbb{P}(\Omega)$ son naturales con respecto a h:

- La imagen de un corte es un corte,

  C es un corte $\Rightarrow h(C)$ es un corte

- La imagen de una cadena es una cadena,[1]

  (C_n) es una cadena $\Rightarrow (h(C_n))$ es una cadena

- La equivalencia de cadenas se conserva por h,

  $(C_n) \sim (C_n^*) \Rightarrow (h(C_n)) \sim (h(C_n^*))$.

Estas propiedades permiten inducir una transformación

$$h^* : \mathbb{P} \to \mathbb{P}.$$

No es difícil probar que esta transformación es continua y natural con respecto a la composición de homeomorfismos. Es decir, dados dos homeomorfismos del plano h_1 y h_2 que comparten la región invariante Ω, se cumple

$$(h_1 \circ h_2)^* = h_1^* \circ h_2^*.$$

La elección $h_1 = h$ y $h_2 = h^{-1}$ demuestra que la transformación inducida es un homeomorfismo de $\mathbb{P} \cong \mathbb{S}^1$. Para practicar un poco vamos a estudiar el siguiente **ejemplo**: El homeomorfismo h es una traslación, digamos $h(z) = z+1$, y la región invariante es la banda horizontal $\Omega = \mathbb{R}\times]0,1[$. Recordamos que la circunferencia de finales primos esta compuesta por las dos rectas de la frontera

$$L^+ = \{p_{t+i} :\ t \in \mathbb{R}\},\ \ L^- = \{p_t :\ t \in \mathbb{R}\}$$

junto con los dos infinitos ∞_d, ∞_i. Para calcular $h^*(\infty_i)$ consideramos la cadena C_n compuesta por los segmentos verticales que van de $-n$ a $-n+i$. Entonces $h(C_n) = C_{n-1}$ y concluimos que ∞_i se queda fijo. Lo mismo ocurre para ∞_d. Los puntos de $L^{\pm}$ cumplen $h^*(p_{t+i}) = p_{t+1+i}$, $\ h^*(p_t) = p_{t+1}$. Tenemos una idea clara de la dinámica de h^*, hay un atractor ∞_d y un

[1] Si algún $h(C_N)$ contiene a z_* empezaremos la cadena $(h(C_n))$ para un n más avanzado.

repulsor ∞_i y las restantes órbitas son heteroclinas que viajan del repulsor al atractor.

Birkhoff utilizó estas ideas para definir los números de rotación por arriba y por abajo de un atractor en el cilindro. En su artículo [2] construyó un difeomorfismo que contrae áreas en el cilindro, analítico y disipativo, para el que estos dos números son distintos. Una construcción brillante y difícil. Más tarde Carwright y Littlewood obtuvieron en [4] un teorema de punto fijo en el plano usando la dinámica de finales primos. Su demostración es larga y está llena de detalles. Ahora se conocen demostraciones más breves (véase [3]), pero el teorema y las técnicas desarrolladas en [4] continúan siendo importantes. Aplicaciones más recientes de la teoría de finales primos a la dinámica se pueden encontrar en [1, 7, 6].

References

[1] K.T. Alligood, J.A. Yorke, Accessible saddles on fractal basin boundaries, Ergod. Th. Dynam. Sys., 12 (1992) 377–400.

[2] G.D. Birkhoff, Sur quelques courbes fermées remarquables, Bull. Soc. Math. de France, 60 (1932) 1–26.

[3] M. Brown, A short short proof of the Cartwright-Littlewood theorem, Proc. Amer. Math. Soc. 65 (1977) 372.

[4] M.L. Cartwright, J.E. Littlewood, Some fixed point theorems, Annals of Math., 54 (1951) 1–37.

[5] J.N. Mather, Topological proofs of some purely topological consequences of Carathéodory's theory of prime ends. Selected Studies. North Holland Publis. Co Eds. Th.M. Rassias, G.M. Rassias (1982), 225–255.

[6] R. Ortega, F.R. Ruiz del Portal, Attractors with vanishing rotation number, J. Eur. Math. Soc. 13 (2011) 1567-1588.

[7] R. Pérez-Marco, Fixed points and circle maps, Acta Mathematica 179, 1997, 243–294.

[8] Ch. Pommerenke, Boundary behaviour of conformal maps. Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, 1991.

[9] Ch. Pommerenke, Conformal maps at the boundary, Chapter 2. Handbook of complex analysis: geometric function theory, Vol. 1. Elsevier 2002.