ECUACIONES DIFERENCIALES II

Problemas 9

43 En cada caso decide si la solución $x(t)$ es estable o inestable.

i) $\dot{x} = 2t - 2x + 1$, $x(t) = t$

ii) $\dot{x} = \operatorname{sen} x$, $x(t) = \pi$

iii) $\ddot{x} + x^7 = 0$, $x(t) = 0$

iv) $\dot{x}_1 = x_1(1-x_1)$, $\dot{x}_2 = x_1 + x_2^3$, $x(t) = (0,0)$

v) $\dot{x} = -x + y$, $\dot{y} = -y + x^3$, $x(t) = (0,0)$

vi) $\dot{x}_1 = -6x_1 + x_2 + 5$, $\dot{x}_2 = x_1 - 4x_2 + 3$, $x(t) = (1,1)$

vii) $x''' + x' + x = 0$, $x(t) = 0$.

44 Se considera el sistema de presa y depredador (Volterra)

$$\dot{u} = u(a - bv), \quad \dot{v} = v(-c + du)$$

donde a, b, c, d son parámetros positivos.

i) Existe un único equilibrio (u_*, v_*) con $u_* > 0$, $v_* > 0$

ii) El método de la primera aproximación no da información sobre las propiedades de estabilidad de (u_*, v_*)

iii) Encuentra una función $V(u,v) = F(u) + G(v)$ que cumpla $\langle \nabla V, X \rangle = 0$ en todo el primer cuadrante

iv) Demuestra que (u_*, v_*) es estable pero no es asintótica-mente estable.

(45) Se considera un sistema $\dot{x} = X(x)$ donde el campo $X : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ es C^1. Se supone que $x_* \in \Omega$ es un equilibrio $(X(x_*) = 0)$ y existe una función $V : \Omega \to \mathbb{R}$ de clase C^1 que cumple

- V alcanza un mínimo estricto en x_*
- $\langle \nabla V(x), X(x) \rangle < 0$ si $x \in \Omega \setminus \{x_*\}$.

Prueba que si x_0 está cercano a x_* se cumple

i) Existe el siguiente límite y es finito

$$\lim_{t \to +\infty} V(x(t, x_0))$$

ii) $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} V(x(t, x_0)) = V(x_*)$

iii) $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} x(t, x_0) = x_*$

Concluye con

iv) $x = x_*$ es asintóticamente estable.