Ecuaciones Diferenciales II

Problemas 8

(38) Se supone que la matriz $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ tiene un valor propio complejo $\lambda = a + ib$ $(b \neq 0)$ con vector propio asociado $v \in \mathbb{C}^d \setminus \{0\}$.

Demuestra:

(i) Los vectores $u = \operatorname{Re} v$, $w = \operatorname{Im} v$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}^d$ [Sugerencia: $\operatorname{Re} z = \frac{z+\bar{z}}{2}$]

(ii) Las funciones $x_1(t) = \operatorname{Re}(e^{\lambda t} v)$, $x_2(t) = \operatorname{Im}(e^{\lambda t} v)$ son soluciones linealmente independientes del sistema $\dot{x} = Ax$.

(39) Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. Demuestra que $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\|e^{At}\|}{e^{\lambda t}} = +\infty$.

(40) Se considera el sistema $\dot{x} = Ax$ con $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$. Demuestra

(i) $x = 0$ estable $\Longleftrightarrow$ todas las soluciones son acotadas en $[0,\infty[$

(ii) Se suponen las dos condiciones siguientes:

(a) $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$ $\forall \lambda \in \sigma(A)$

(b) Si $\lambda \in \sigma(A)$ con $\operatorname{Re}\lambda = 0$, entonces la multiplicidad geométrica de λ coincide con la algebraica.

Prueba que $x = 0$ es estable

(iii) Se supone que A tiene un valor propio $\lambda \in \sigma(A)$ que cumple $\operatorname{Re}\lambda = 0$ y la multiplicidad algebraica y geométrica no coinciden. Entonces $x=0$ es inestable.

(41) Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ donde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

i) Discute las propiedades de estabilidad de $x=0$ como solución de $\dot{x} = Ax$

ii) Describe todas las rectas y planos que contienen al origen y son invariantes por el flujo [$x_0 \in \Pi \Rightarrow e^{At} x_0 \in \Pi \; \forall t \in \mathbb{R}$]

(42) Se considera el sistema $\dot{x} = Ax + R(x)$ donde $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ y $R : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ es una función de clase C^1 que cumple

$$R(0) = 0, \qquad \| R'(x) \| \leq \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Demuestra :

i) ~~Si~~ Existe $\varepsilon_* > 0$ tal que si $\varepsilon < \varepsilon_*$ entonces $x=0$ es asintóticamente estable

ii) En las condiciones de i), si $\varepsilon < \varepsilon_*$ entonces todas las soluciones cumplen $\lim_{t \to +\infty} \| x(t) \| = 0$.

iii) Se considera la ecuación

$$\ddot{x} + c\dot{x} + kx + \varepsilon \sin x = 0$$

donde c, k y ε son parámetros positivos.
Demuestra que, fijados c y k, el origen $x=0$ es un atractor global cuando ε es suficientemente pequeño.

iv) Demuestra que el resultado de ~~ii~~ iii) es falso para ε arbitrario.