ECUACIONES DIFERENCIALES II

Problemas 7

(34) En cada caso justifica la existencia y diferenciabilidad de $x(t,\lambda)$ en un entorno de $\mathbb{R}\times\{0\}$ y calcula $\frac{\partial x}{\partial \lambda}(t,0)$.

(i) $\ddot{x} + x^3 = 0, \quad x(0) = \lambda, \dot{x}(0) = 0$

(ii) $\ddot{x} + x^3 = 0, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = \lambda$

(iii) $\ddot{x} + \lambda x^3 = 0, \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0$

(iv) $\ddot{x} + x^3 = \lambda, \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0.$

(35) Se considera la ecuación de un péndulo con fricción

$$\ddot{\theta} + c\,\dot{\theta} + \frac{g}{\ell}\,\mathrm{sen}\,\theta = 0$$

y se supone que el coeficiente $c>0$ cumple la condición de fricción débil

$$c^2 < \frac{4g}{\ell}.$$

Sea $\theta(t,\varepsilon)$ la solución que cumple las condiciones iniciales

$$\theta(0) = 0, \quad \dot{\theta}(0) = \varepsilon.$$

Demuestra

(i) $\theta(t,\varepsilon)$ es única y está bien definida en $]-\infty, +\infty[$

(ii) $(t,\varepsilon)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \longmapsto \theta(t,\varepsilon)\in\mathbb{R}$ es diferenciable

(iii) $\theta(t,\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\omega} e^{-\frac{c}{2}t}\,\mathrm{sen}\,\omega t + R(t,\varepsilon)$

con $\omega = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4g}{\ell} - c^2}$ y $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{R(t,\varepsilon)}{\varepsilon} = 0$

para cada $t \in \mathbb{R}$.

(36) Sea $x(t;a,b)$ la solución del problema

$$\dot{x} + \operatorname{sen}(ax) = t, \quad x(0) = b.$$

Demuestra

(i) $x(t;a,b)$ es única y está definida en $]-\infty, +\infty[$

(ii) $(t;a,b) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto x(t;a,b) \in \mathbb{R}$ es diferenciable

(iii) Calcula $\frac{\partial x}{\partial a}(t;0,1)$ y $\frac{\partial x}{\partial b}(t;0,1)$.

(37) Se considera la función $F(y) = \int_0^1 e^{-x^2} \cos 2xy \, dx$.

Encuentra una ecuación diferencial lineal de la que $F(y)$ es solución.