Ecuaciones Diferenciales II

Problemas 6

(29) Calcula, si existe, $\lim_{n\to\infty} x_n(t)$ si $x_n(t)$ es la solución de cada uno de los problemas siguientes:

(i) $\dot{x} = x + t\,\mathrm{sen}\,x$, $x(0) = \frac{1}{n}$

(ii) $\dot{x} = x^{1/3}$, $x(0) = \frac{1}{n}$

(iii) $\dot{x} = \frac{1}{x}$, $x(0) = \frac{1}{n}$

(iv) $\dot{x} = \frac{1}{n} x^2$, $x(0) = 1$

(v) $\dot{x} = \sqrt{\frac{1}{n} + x^2}$, $x(0) = 1$

(30) Se considera el problema

$$\dot{x}_1 = t x_1^2 + x_1 x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_2^2 + x_1, \quad x_1(0) = \varepsilon_1, \; x_2(0) = \varepsilon_2.$$

Demuestra que si ε_1 y ε_2 son suficientemente pequeños entonces la solución está definida en $[-100, 100]$.

(31) Formula de manera precisa y demuestra la siguiente afirmación "un péndulo de gran longitud se comporta casi como una partícula libre"

(32) Se supone que $X : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ es continuo y Lipschitz respecto a x,

$$\|X(t,x_1) - X(t,x_2)\| \leq L\,\|x_1 - x_2\| \qquad \forall\, (t,x_1), (t,x_2) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d.$$

Aquí $L > 0$ es una constante fija. La solución del problema

$$\dot{x} = X(t,x), \quad x(0) = x_0$$

se denota por $x(t;x_0)$. Se pide:

(i) La solución $x(t;x_0)$ está definida en $]-\infty,\infty[$

(ii)
$$\|x(t;x_0) - x(t;\tilde{x}_0)\| \leq e^{L|t|} \|x_0 - \tilde{x}_0\|$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, $x_0, \tilde{x}_0 \in \mathbb{R}^d$.

(33) En este ejercicio se presenta un teorema de dependencia continua de las raíces de un polinomio que depende de parámetros.

(i) Dados $\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_{n-1} \in \mathbb{C}$ se considera el polinomio
$$z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0 = 0.$$
Demuestra que todas las raíces cumplen
$$|z| \leq \max\{1, |\alpha_0| + |\alpha_1| + \dots + |\alpha_{n-1}|\}.$$

(ii) Dadas funciones continuas $a_0, a_1, \dots, a_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se considera el polinomio (dependiente de un parámetro)
$$a_n(\lambda) z^n + a_{n-1}(\lambda) z^{n-1} + \dots + a_1(\lambda) z + a_0(\lambda) = 0.$$
Se supone $n \geq 2$ y las raíces se denotan por $z_1(\lambda), \dots$ $\dots z_n(\lambda)$, cada una contada según su multiplicidad, el conjunto de raíces
$$\mathcal{R}(\lambda) = \{z_1(\lambda), \dots, z_n(\lambda)\}.$$
Se supone $a_n(\lambda_*) \neq 0$ y $\lambda_k \to \lambda_*$, $z_k \in \mathcal{R}(\lambda_k)$.
Demuestra que $\operatorname{dist}(z_k, \mathcal{R}(\lambda_*)) \to 0$.

(iii) La conclusión anterior puede no ser válida si $a_n(\lambda_*) = 0$