ECUACIONES DIFERENCIALES II

Problemas 5

(24) En este ejercicio se propone una demostración alternativa del Lema de Gronwall. Se supone que $\varphi : [\tau, T[\to \mathbb{R}$ es continua y cumple

$$\varphi(t) \leq a + b\int_\tau^t \varphi(s)ds, \quad t \in [\tau, T[,$$

con $a \in \mathbb{R}$, $b \geq 0$.

i) Demuestra que para cada $n \geq 1$ se cumple

$$\varphi(t) \leq a + ab(t-\tau) + ab^2\frac{(t-\tau)^2}{2!} + \dots + ab^n\frac{(t-\tau)^n}{n!} + R_n(t)$$

con $R_n(t) = b^{n+1}\int_\tau^t \int_\tau^{t_1} \int_\tau^{t_2} \cdots \int_\tau^{t_n} \varphi(s)ds\, dt_n \dots dt_2 dt_1$.

ii) Demuestra que $\lim_{n\to\infty} R_n(t) = 0$ para cada $t \in [\tau, T[$.

iii) Deduce el lema de Gronwall como consecuencia de lo anterior.

(25) Utiliza el Lema de Gronwall para obtener una demostración alternativa del Lema 3 sobre unicidad local de la Lección 1 (pag 3?

(26) En el Teorema de la página 18 (Lección 2) se sustituye la hipótesis de crecimiento lineal por otra de crecimiento cuadrático

$$\|X(t,x)\| \leq m(t)\|x\|^2 + n(t) \qquad \forall (t,x) \in D$$

¿Sigue siendo cierta la conclusión?

(26) [Continuación del ejercicio 12] Se considera el sistema

$$\dot{x} = R(1,0) + N\frac{T-x}{\|T-x\|}, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{T\}$$

donde R y N son parámetros positivos, $T = (T_1, T_2)$ con $T_i > 0$, $i = 1, 2$

Demuestra

a) Si una solución cumple $x_2(\tau) = T_2$ para algún $\tau \in]\alpha, \omega[$, entonces $x_2(t) = T_2$ para cada $t \in]\alpha, \omega[$.

b) Sea $x(t)$ la solución que cumple la condición inicial $x(0) = (0,0)$

Entonces $0 < x_2(t) < T_2$ para cada $t \in]0, \omega[$.

c) Se supone que $x(t)$ es la solución del apartado b). Si $\omega < \infty$ entonces existe $t_n \to \omega$ tal que $x(t_n) \to T$.

(27) Se considera la ecuación de Duffing $\ddot{x} + x^3 = 0$.

i) Si $x(t)$ es una solución, entonces $E(t) = \frac{1}{2}\dot{x}(t)^2 + \frac{1}{4}x(t)^4$ es constante en $]\alpha, \omega[$

ii) Demuestra que todas las soluciones son prolongables a $]-\infty, +\infty[$.

(28) Se considera la ecuación $\ddot{x} - x^3 = 0$.

i) Da una interpretación mecánica de las ecuaciones $\ddot{x} \pm x^3 = 0$

ii) Se considera la solución del problema

$$\ddot{x} - x^3 = 0, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0$$

con $x_0 > 0$, $v_0 > 0$, $\frac{1}{2}v_0^2 - \frac{1}{4}x_0^4 > 0$. Demuestra que $x(t)$ cumple $\dot{x}(t) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}x(t)^2 \quad \forall t \in [0, \omega[$.

iii) En las condiciones de ii) demuestra que $\omega < \infty$ y determina una cota superior de ω.