ECUACIONES DIFERENCIALES II

Problemas 4

(19) Encuentra la solución maximal del problema

$$\ddot{x} = -|\dot{x}|\dot{x}, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0$$

¿Es única?

(20) En este ejercicio se propone una prueba de la existencia de soluciones maximales sin hipótesis de unicidad. Se considera

$$\text{(PC)} \qquad \dot{x} = X(t,x), \quad x(t_0) = x_0$$

con $X : D \to \mathbb{R}^d$ continuo.

i) En el conjunto Σ de todas las soluciones de (PC) se define la relación binaria para $x_i : I_i \to \mathbb{R}^d$, $i = 1, 2$,

$$x_1 \leq x_2 \quad \text{si} \quad I_1 \subseteq I_2, \quad x_1(t) = x_2(t) \quad \forall t \in I_1$$

Demuestra que se trata de una relación de orden ¿Es un orden total?

ii) Demuestra que toda cadena (subconjunto totalmente ordenado) tiene una cota superior

iii) Demuestra que (PC) tiene al menos una solución maximal.

(21) Sea ~~f~~ Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^N$ y $f : [0,1] \to \mathbb{R}^N$ una función continua que cumple $f(0) \in \Omega$, $f(1) \notin \overline{\Omega}$. Demuestra que existe un primer instante en el que f sale de Ω y toca la frontera; es decir, $t_* \in]0,1]$ tal que

$$f(t) \in \Omega \text{ si } t \in [0, t_*[, \quad f(t_*) \in \partial\Omega.$$

(22) Dada una función $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\begin{cases} \operatorname{sen} x, & x\geq 0 \\ x^2, & x<0 \end{cases}$

determina las condiciones iniciales para las que el problema

$$\dot{x}=g(x),\quad x(t_0)=x_0$$

tiene una solución definida en todo $\mathbb{R}$.

(23) En este ejercicio desarrollaremos el método de sub y super-soluciones para ecuaciones escalares. Dada una función continua $X:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, consideramos el problema

$$(P_c)\quad \dot{x}=X(t,x),\quad x(t_0)=x_0$$

y suponemos que $x(t)$ es una solución maximal definida en $]\alpha,\omega[$.

Una función $\alpha\in C^1([t_0,T[)$ se dirá sub-solución estricta si cumple

$$\dot{\alpha}(t)<X(t,\alpha(t)),\quad \alpha(t_0)\leq x_0 .$$

De manera análoga se define $\beta(t)$ super-solución estricta.

Demuestra:

(i) Si $\omega\geq T$ y $\alpha(t)$ es una sub-solución estricta, $x(t)\geq\alpha(t)$ $\forall t\in[t_0,T[$

(ii) Se supone que existen sub y super-soluciones estrictas definidas en $[t_0,T[$. Entonces $\omega\geq T$

(iii) Se supone que existe una sub-solución estricta que cumple $\limsup_{t\uparrow T}\alpha(t)=+\infty$. Entonces $\omega\leq T$.

(iv) Enunciados paralelos para el extremo inferior α.