ECUACIONES DIFERENCIALES II

Problemas 3

(14) Se considera el problema de Cauchy $\dot{x} = X(t,x)$, $x(t_0) = x_0$ donde $X : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y cumple que para cada $t \in \mathbb{R}$, la función $x \mapsto X(t,x)$ es monótona no decreciente. Demuestra que hay unicidad hacia el pasado; es decir, si $x_i : I_i \to \mathbb{R}$, $i = 1,2$ son dos soluciones, entonces $x_1(t) = x_2(t)$ si $t \in I_1 \cap I_2 \cap]-\infty, t_0]$. (Sugerencia: usa la función $(x_1(t) - x_2(t))^2$).

(15) Consideramos la ecuación $\dot{x} = x^{1/3}$.

a) Si $x : I \to \mathbb{R}$ es una solución que cumple $x(\tau) = 0$ para algún $\tau \in I$, entonces $x(t) = 0$ si $t \in I$, $t \leq \tau$.

b) Demuestra que hay unicidad para el problema de valores iniciales con condición inicial $x(t_0) = x_0 \neq 0$.

c) Generaliza lo anterior a la ecuación $\dot{x} = g(x)$ donde

$$g \in C(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\}), \; g(0) = 0, \; g'(x) > 0 \text{ si } x \neq 0.$$

(16) Se considera un sistema del tipo $\dot{x} = X(t,x)$ donde $X : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ está en $C^{0,1}$ y es 2π-periódica en t,

$$X(t + 2\pi, x) = X(t,x) \quad \forall (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d.$$

$C^{0,1}$: X continua $+ \; \exists \frac{\partial X}{\partial x}$, $(t,x) \mapsto \frac{\partial X}{\partial x}(t,x)$ continua

a) Una solución $x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^d$ es 2π-periódica si y solo si $x(0)=x(2\pi)$.

b) La función $x(t)=t^2+\operatorname{sen} t$ no puede ser solución de una ecuación de las consideradas en este ejercicio $(d=1)$.

c) Una función $x\in C(\mathbb{R},\mathbb{R}^d)$ es solución 2π-periódica si y solo si cumple la ecuación integral

$$x(t)=x(2\pi)+\int_0^t X(s,x(s))\,ds\ ,\quad t\in\mathbb{R}.$$

(17) Resuelve las ecuaciones integrales siguientes

i) $x(t)=x(2\pi)+\int_0^t x(s)\operatorname{sen} s\,ds$

ii) $x(t)=x(0)+\int_0^t \operatorname{sen} x(s)\,ds$

iii) $x(t)=x(2\pi)+\int_0^t \operatorname{sen} x(s)\,ds$

iv) $x(t)=\int_1^t x(s)(1-x(s))\,ds$

v) $x(t)=x(2)+\int_1^t x(s)^2\,ds$

(18) Resuelve los problemas de valores iniciales siguientes

(i) $\dot{x}=2x^+,\quad x(t_0)=x_0$

(ii) $\dot{x}=\left(\frac{x}{t}\right)^+,\quad x(1)=0$

donde $\xi^+=\max(\xi,0)$.