ECUACIONES DIFERENCIALES II

Problemas 2

(7) Dada una norma $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}^d$ y una función continua $f:[a,b]\to\mathbb{R}^d$, demuestra que se cumple la desigualdad

$$\left\| \int_a^b f(t)\,dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|\,dt.$$

[Sugerencia: prepara la demostración con una desigualdad análoga para sumas de Riemann]

(8) Se supone $r>0$, $f:[0,\infty[\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ continua y $\varphi:[-r,0]\to\mathbb{R}^d$ continua. Se considera el problema de Cauchy para la ecuación con retardo

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t-r)),\ t\geq 0, \quad x\big|_{[-r,0]} = \varphi.$$

(Ahora la condición inicial es una función y no un punto de $\mathbb{R}^d$).
Define solución $x\in C([-r,\infty[,\mathbb{R}^d)\cap C^1([0,\infty[,\mathbb{R}^d)$ y demuestra que existe una única solución.

(9) Sea $I=[a,b]$ un intervalo compacto y $f_n: I\to\mathbb{R}^d$ una sucesión de funciones continuas que convergen uniformemente en I. Demuestra que la sucesión $\{f_n\}$ es uniformemente acotada y equicontinua.
¿Es cierto este resultado si $I=]a,b[$?

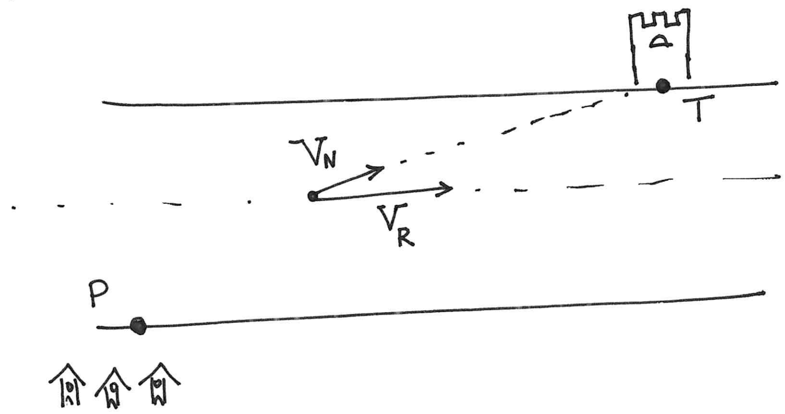
(10) Demuestra que la sucesión $\{f_n\}$, $f_n:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$, $f_n(t)=\operatorname{sen} nt$, no es equicontinua.

(11) Demuestra que la sucesión de polinomios

$$p_n(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!}$$

no converge uniformemente en $\mathbb{R}$. Demuestra que sí converge uniformemente en cada intervalo compacto $[a,b]$.

(12) Un nadador decide cruzar el río partiendo del pueblo P. Para ello toma como referencia la torre del castillo T que está al otro lado y al nadar apunta siempre hacia dicha torre.



La velocidad del río es constante y paralela a la orilla. Encuentra un problema de Cauchy que describa el movimiento del nadador en el río. Determina el dominio de definición de dicho problema atendiendo al modelo que representa.

(13) (Poligonal de Euler) Se considera el problema de Cauchy

(PC) $\dot{x} = X(t,x)$, $x(t_0)=x_0$ con $X : I\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ continuo y acotado.

Se fija un intervalo $[a,b]\subset I$ con $a<t_0<b$ y se considera una partición

$$P = \{a = t_{-N} < t_{-(N-1)} < \dots < t_{-1} < t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = b\}.$$

Se define la ley de recurrencia

$$x_{n+1} = x_n + (t_{n+1}-t_n)X(t_n, x_n) \text{ si } n\geq 0, \quad x_n = x_{n+1} - (t_{n+1}-t_n)X(t_{n+1}, x_{n+1}) \text{ si } n<0$$

La función lineal a trozos que pasa por los puntos (t_n, x_n) se llama poligonal de Euler asociada a la partición P y se denota por $x_p(t)$.

(a) Encuentra un argumento intuitivo que sugiera que $x_p(t)$ debe ser una solución aproximada de (PC)

(b) Se supone $\|X(t,x)\|\leq M$. Demuestra $\|x_p(t) - x_p(s)\| \leq M|t-s|$, $t,s\in[a,b]$.

(c) Se supone $\|X(t,x)-X(s,y)\| \leq L[|t-s|+|x-y|]$. Demuestra que

$$\|x_p(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} X(s, x_p(s))ds\| \to 0 \text{ uniformemente en } [a,b]$$

cuando la norma de la partición $\|P\| = \max(t_{n+1}-t_n) \to 0$.