

ECUACIONES DIFERENCIALES II

Problemas 1

① Consideramos la ecuación $\dot{x} = X(t, x)$ donde $X \in C(D, \mathbb{R}^d)$ y $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ es un abierto conexo. Se supone que $x: I \rightarrow \mathbb{R}^d$ es una solución.

a) Demuestra que $x \in C^1(I, \mathbb{R}^d)$

b) Se supone $X \in C^k(D, \mathbb{R}^d)$, $k \geq 1$. Demuestra que $x \in C^{k+1}(I, \mathbb{R}^d)$.

c) Se supone ahora que X es continuo pero no C^1 . ¿Puede ocurrir que $x(t)$ sea de clase C^2 ?

② Se considera el problema de funciones implícitas

$$F(x, y) = 0, \quad y(x_0) = y_0$$

donde $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ es un punto dado. Se supone

además que

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

a) Utiliza el teorema de la función implícita para justificar la existencia de una solución $y \in C^1(I)$ definida en algún intervalo I que contenga a x_0 en su interior.

b) Deduce la misma conclusión a partir del teorema de Cauchy-Peano [sugerencia: derivación implícita]

c) Da un ejemplo que demuestre la imposibilidad de obtener un resultado global que afirmara que la solución está definida en todo \mathbb{R} .

③ Enuncia y demuestra un resultado de existencia para el problema de Cauchy de orden superior ($d \geq 2$)

$$x^{(d)} = f(t, x, x', \dots, x^{(d-1)}), \quad x|_{t_0} = x_0, \quad x'|_{t_0} = x_{0,1}, \dots, \quad x^{(d-1)}|_{t_0} = x_{0,d-1}.$$

[Sugerencia: $x_1 = x, x_2 = x', \dots, x_d = x^{(d-1)}$ reduce a primer orden]

④ Dada $f \in C(\mathbb{R}^2)$ consideramos la ecuación integral

$$x(t) = 3e^{2t} + \int_0^t e^{2(t-s)} f(s, x(s)) ds$$

y buscamos soluciones continuas. Encuentra un problema de valores iniciales que sea equivalente.

⑤ Discute en cada caso la validez de la afirmación:

(i) $\dot{x} = \frac{x^3}{1+x^6} + t, x(0) = 0$ admite solución definida en $] -1, 1[$

(ii) $\ddot{x} + tx^2 = 0, x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$ admite solución definida en \mathbb{R}

(iii) $\ddot{x} + x = 0, x(0) = 0, \dot{x}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ admite solución definida en \mathbb{R}

(iv) $\dot{x} = t^2 + x^2, x(0) = 0$, admite una solución definida en algún intervalo $I =] -\varepsilon, \varepsilon[$ y además esta solución es estrictamente creciente

⑥ Encuentra una solución de la ecuación integral

$$x(t) = 1 + \int_0^t (t-s)x(s) ds$$

con $x \in C(\mathbb{R})$.