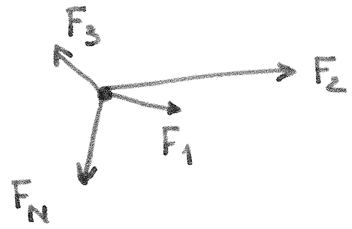
Mínimos del potencial

Suponemos una partícula sobre la que actúan fuerzas $F_1, \dots, F_N$,



La condición para que la partícula permanezca en equilibrio es

$$\sum_1^N F_i = 0 .$$

Si las fuerzas provienen de potenciales $V_1, \dots, V_N$ $(F_i = -\nabla V_i)$ podemos definir el potencial suma

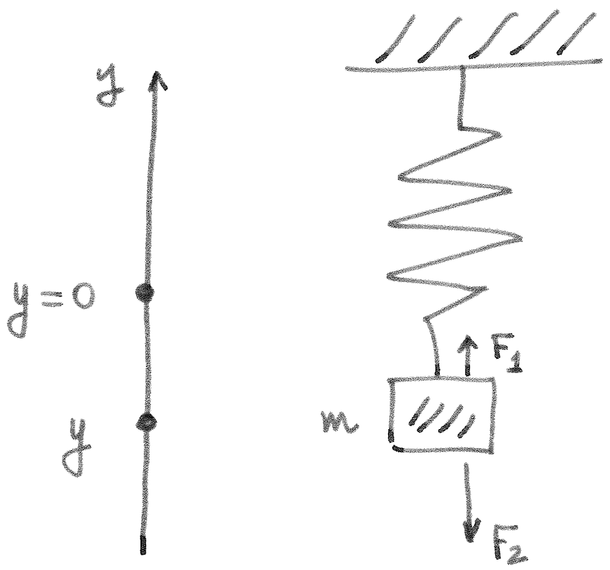
$$V = \sum_1^N V_i$$

y escribir la condición de equilibrio en la forma

$$\boxed{\nabla V = 0}$$

Los puntos críticos de V determinan las posiciones de equilibrio.

Veamos un ejemplo en una dimensión. Se suspende un peso de un muelle vertical



Hay dos fuerzas actuando sobre la masa

$F_1 = -Ky$ fuerza recuperadora $(K>0)$

$F_2 = -mg$ peso

Hemos situado un eje vertical orientado hacia arriba en el que $y=0$ representa la posición del muelle si no hubiera peso.

La ecuación

$$F_1 + F_2 = 0$$

nos lleva a la posición de equilibrio

$$y_e = -\frac{mg}{k}$$

(La partícula queda más abajo si el peso aumenta, $m\nearrow$, o el muelle se ablanda, $k\searrow$)

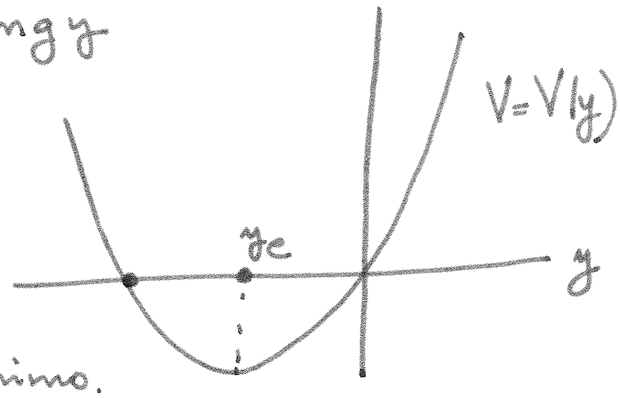
Las dos fuerzas provienen de potenciales

$$V_1(y) = +\frac{ky^2}{2}, \quad V_2(y) = mgy.$$

El potencial suma

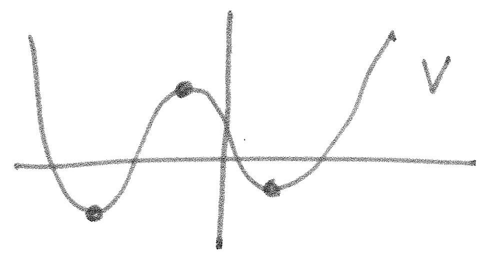
$$V(y) = \frac{ky^2}{2} + mgy$$

tiene la gráfica



El único punto crítico es y_e, donde se alcanza un mínimo.

En máquinas más complicadas pueden aparecer potenciales con varios puntos críticos



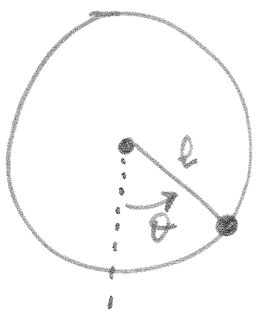
En general se espera que los mínimos sean estables.

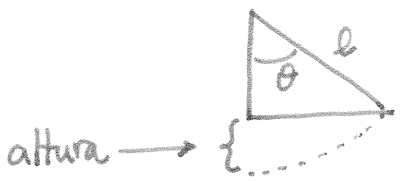
Vamos a comprobar que esto ocurre en el caso del péndulo:

el potencial está definido sobre la circunferencia

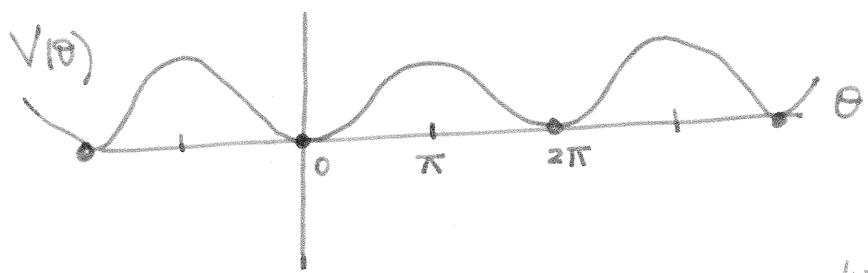
$$V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad V(\theta + 2\pi) = V(\theta)$$

y es proporcional a la altura

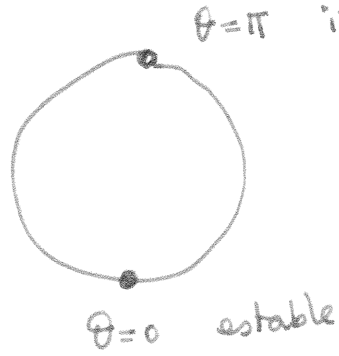




$$V(\theta) = c\,\ell\,(1 - \cos\theta), \quad c > 0$$



Los puntos críticos $\theta = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$ se corresponden con el equilibrio estable; mientras que $\theta = \pm\pi, \pm 3\pi, \ldots$ corresponden al equilibrio inestable del péndulo



En esta lección vamos a dar precisión a estas ideas y lo primero será aclarar qué se entiende por un equilibrio estable / inestable.

Definición de solución estable

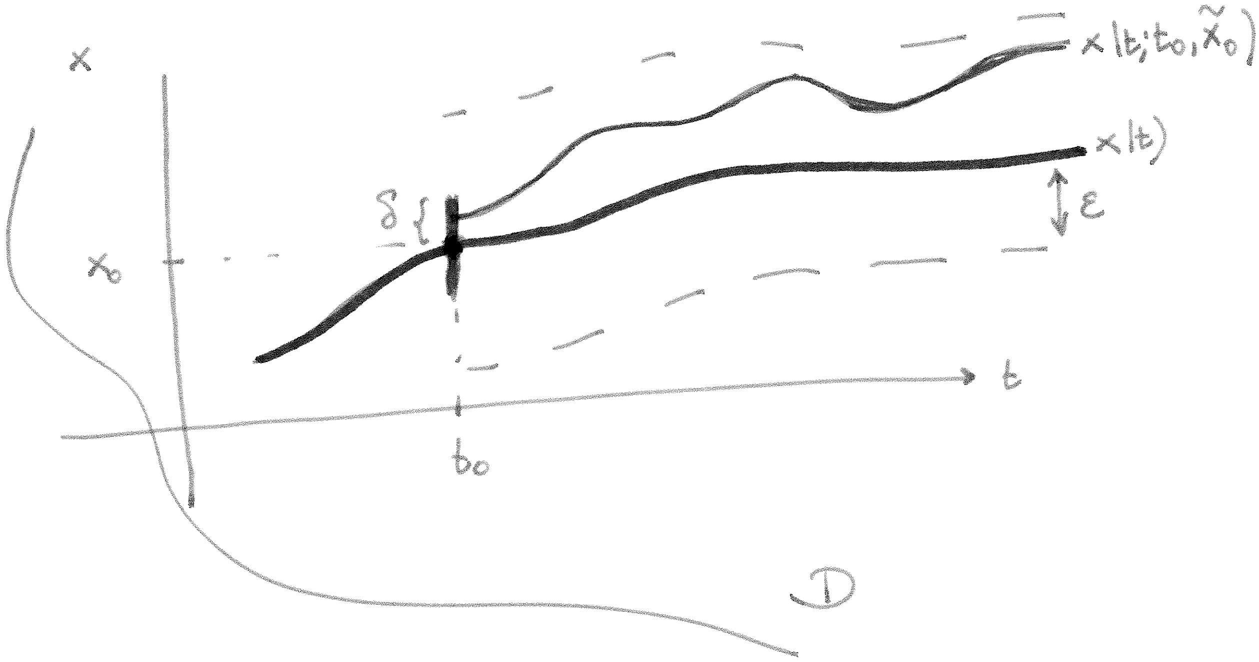
Podemos decir que una solución es estable cuando la dependencia continua se mantiene hasta tiempo infinito. Con más precisión, partimos de un campo

$$X : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, \quad (t,x) \mapsto X(t,x)$$

que es continuo y suponemos que hay unicidad para el problema de Cauchy asociado a $\dot{x} = X(t,x)$ y cualquier condición inicial en D.

Dada una solución $x(t) = x(t; t_0, x_0)$ definida en $]\alpha, +\infty[$, diremos que $x(t)$ es estable si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de manera que si $\tilde{x}_0 \in \mathbb{R}^d$, $\|x_0 - \tilde{x}_0\| < \delta$, entonces

$$\|x(t; t_0, x_0) - x(t; t_0, \tilde{x}_0)\| < \varepsilon \quad \forall t \in [t_0, +\infty[.$$



La solución que empieza en la bola $B(x_0, \delta)$ no se sale del tubo de radio ε alrededor de $x(t)$

Observaciones a esta definición

i) La definición anterior incluye la condición: $x(t;t_0,\tilde{x}_0)$ está definida en $[t_0,+\infty[$ si $\|x_0-\tilde{x}_0\|<\delta$.

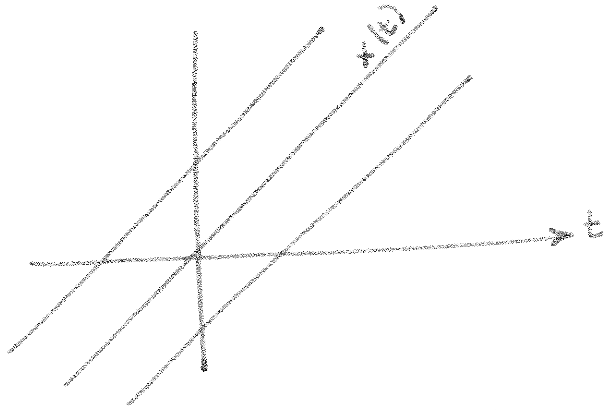
ii) Se trata de estabilidad hacia el futuro (en el sentido de Lyapunov). Cambiando el sentido del tiempo se podría definir una noción de estabilidad hacia el pasado, pero no nos ocuparemos de esa noción.

iii) En principio la definición parece depender del instante inicial t_0, gracias a la dependencia continua esto no es así. Es un ejercicio interesante probar que si $t_0, \hat{t}_0 \in]\alpha,+\infty[$ entonces $x(t)$ es t_0-estable si y solo si ~~t~~ es $\hat{t}_0$-estable.

Veamos algunos ejemplos con $D=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $t_0=0$

1. $\dot{x}=1$, $x(t)=t$

La solución general es $x(t;t_0,x_0)=x_0+(t-t_0)$, $t\in\mathbb{R}$



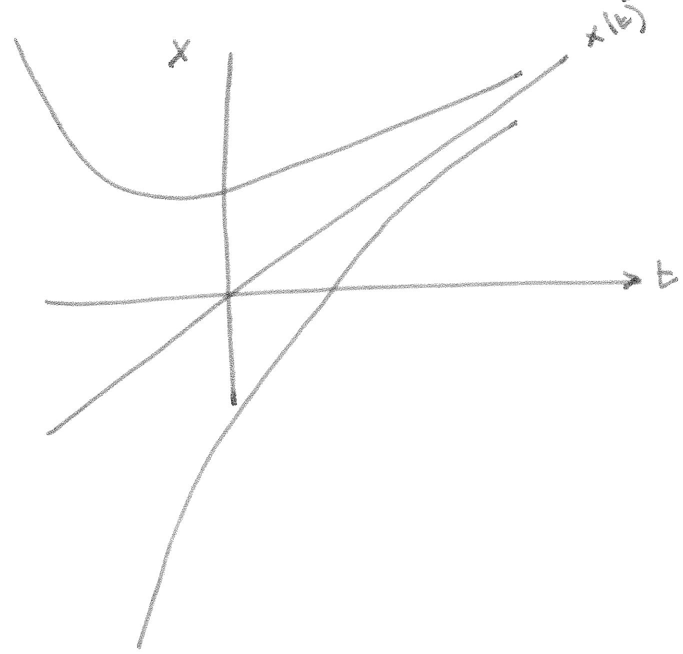
En este caso la distancia entre soluciones se mantiene constante a lo largo del tiempo

$$x(t;t_0,x_0)-x(t;t_0,\tilde{x}_0)=x_0-\tilde{x}_0$$

Es suficiente tomar $\delta=\varepsilon$.

(2) $\dot{x} = -x + t + 1 \;,\; x(t) = t$

La solución general es $x(t; t_0, x_0) = t + x_0 e^{t_0 - t}$



En este caso las soluciones se aproximan a medida que el tiempo avanza

$$x(t; t_0, x_0) - x(t; t_0, \tilde{x}_0) = (x_0 - \tilde{x}_0)\, e^{t_0 - t}$$

$$\left| x(t; t_0, x_0) - x(t; t_0, \tilde{x}_0) \right| < |x_0 - \tilde{x}_0| \quad \text{si } t > t_0.$$

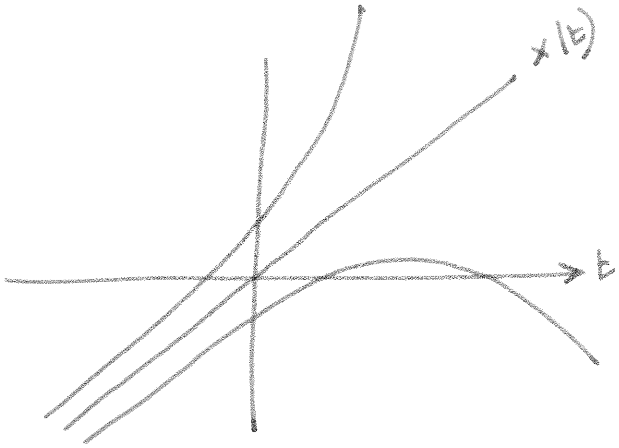
De nuevo la solución $x(t) = t$ es estable y podemos tomar $\delta = \varepsilon$.

(3) $\dot{x} = x - t + 1 \;,\; x(t) = t$

Esta vez la solución general es

$$x(t; t_0, x_0) = t + x_0 e^{t - t_0}$$

y ahora las soluciones se alejan a medida que el tiempo avanza.



La solución $x(t)$ no es estable ($\equiv$ inestable) porque si $x_0 \neq \tilde{x}_0$,

$$|x(t; t_0, x_0) - x(t; t_0, \tilde{x}_0)| = |x_0 - \tilde{x}_0| e^{t-t_0} \longrightarrow +\infty \text{ si } t \to +\infty$$

Si se hace por ejemplo $\varepsilon = 700$ es imposible encontrar δ.

Hay una diferencia importante entre los ejemplos 1 y 2; en el primero las soluciones que empiezan próximas permanecen próximas en el futuro, pero no se atraen, en el segundo ejemplo la solución $x(t)$ atrae a las demás. Esta observación lleva a una segunda definición.

Definición de estabilidad asintótica

La solución $x(t)$ es asintóticamente estable si es estable y además atrae a las soluciones cercanas; es decir, existe $\rho > 0$ de manera que si $\|x_0 - \tilde{x}_0\| < \rho$ entonces

$$\lim_{t \to +\infty} \|x(t; t_0, x_0) - x(t; t_0, \tilde{x}_0)\| = 0.$$

En el ejemplo 2 $x(t) = t$ es asintóticamente estable y como ρ podemos escoger cualquier número

Estabilidad del equilibrio

A partir de ahora nos vamos a concentrar en los sistemas autónomas

$$\dot{x} = X(x)$$

donde el campo $X : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ es independiente del tiempo. Suponemas que Ω es un abierto conexo de $\mathbb{R}^d$ y el dominio de la ecuación será $D = \mathbb{R} \times \Omega$. Las soluciones más simples de los sistemas autónomos son las constantes, que se corresponden con los ceros del campo

$$0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{si } x(t) = cte.}}{=} \dot{x} = X(x)$$

Ecuación de los equilibrios $\boxed{X(x) = 0}$

Estudiaremos las propiedades de estabilidad del equilibrio.

Comenzamos con un ejemplo: La ecuación logística

$$\dot{x} = \alpha \left(1 - \frac{x}{M}\right) x$$

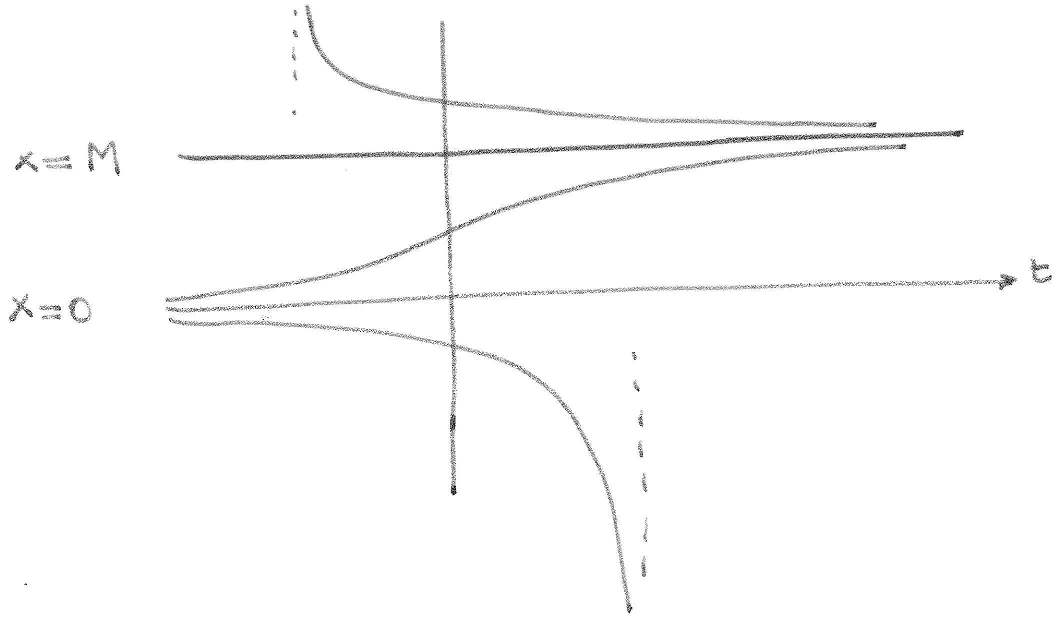
La incógnita $x = x(t)$ representa el tamaño de una población o de un organismo. Hay dos parámetros positivos

$M > 0$ capacidad,

$\alpha > 0$ mide la ~~velocidad~~ rapidez del crecimiento / decrecimiento

Observamos que si $0<x<M$ entonces $\dot{x}>0$ y la población crece, si $x>M$ entonces $\dot{x}<0$ y decrece.

El campo $X(x)=\alpha\left(1-\frac{x}{M}\right)x$ está definido en $\Omega=\mathbb{R}$ y ~~des~~ de clase C^1, por tanto hay unicidad y existencia local. Hay dos equilibrios, $x=0$ y $x=M$, y las restantes soluciones se pueden encontrar explícitamente (por ejemplo, por variables separadas), tienen gráficas del tipo



Observamos que las soluciones con $0\leq x_0\leq M$ tienen intervalo maximal $]-\infty,+\infty[$; por el contrario, $\alpha>-\infty$ si $x_0>M$ y $\omega<\infty$ si $x_0<0$. A la vista de esto podemos decir que $x=0$ es inestable, pues hay soluciones tan próximas como se quiera en $t_0=0$ que explotan antes de $+\infty$. Por el contrario $x=M$ es asintóticamente estable y podemos escoger $\rho=1$ en la definición de estabilidad asintótica.

Las soluciones que tienen significado en el modelo son las positivas ($x=0$ extinción). Independientemente del tamaño inicial, la población se autoregulará y tenderá a la capacidad M.

La ecuación lineal

Consideramos el sistema

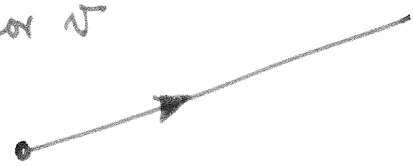
$$\dot{x} = Ax$$

donde $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ y observamos que $x=0$ es siempre un equilibrio. En este caso hay unicidad y existencia global para el problema de valores iniciales y pretendemos analizar las propiedades de estabilidad del origen. Para ello comenzamos con una conexión entre el espectro de A y las soluciones del sistema. Supongamos que $\lambda \in \sigma(A)$ es un valor propio con vector propio asociado $v \neq 0$, $Av = \lambda v$, entonces $x(t) = e^{\lambda t} v$ es una solución del sistema,

$$\dot{x}(t) = e^{\lambda t} \lambda v = e^{\lambda t} A v = A\left(e^{\lambda t} v\right) = Ax(t).$$

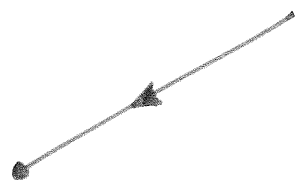
Vamos a pensar en el comportamiento de esta solución.

Si λ es real y positivo, la solución va de 0 a ∞ a través del rayo generado por v



0

Si $\lambda < 0$, tiene sentido opuesto

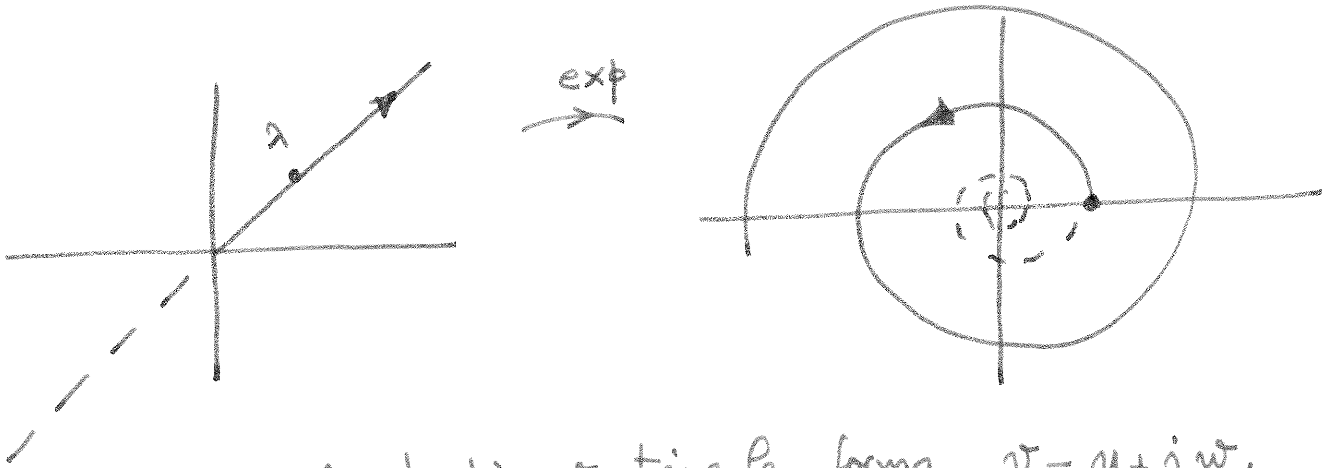


0

¿Qué ocurre si $\lambda = 0$?

Aunque ~~el valor~~ la matriz sea real el valor propio puede no serlo, si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, entonces $v \in \mathbb{C}^d \setminus \{0\}$ y $x_1(t) = \mathrm{Re}\left(e^{\lambda t} v\right)$, $x_2(t) = \mathrm{Im}\left(e^{\lambda t} v\right)$ son soluciones reales. Para interpretarlas debemos pensar un poco en la exponencial compleja, $\lambda = a + ib$,

$$e^{\lambda t} = e^{at} (\cos bt + i \operatorname{sen} bt).$$



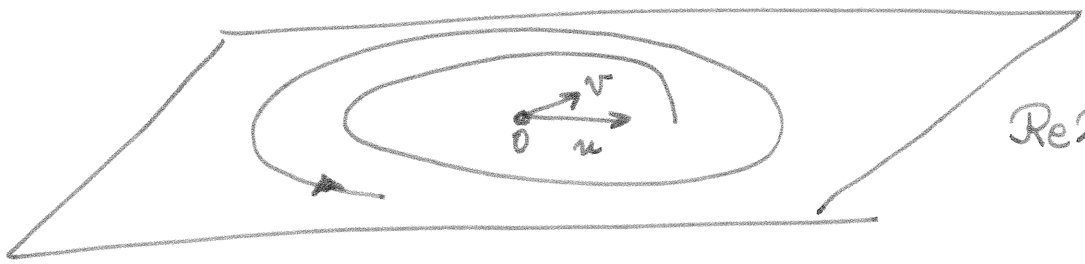
El vector propio v tiene la forma $v = u + iw$,

con $u, w \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$.

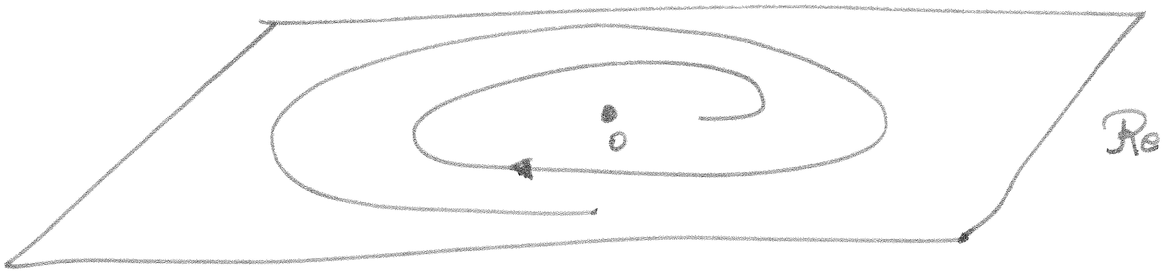
$$x_1(t) = e^{at} (\cos bt\, u - \operatorname{sen} bt\, w)$$

$$x_2(t) = e^{at} (\operatorname{sen} bt\, u + \cos bt\, w)$$

Las soluciones $x_1(t)$ y $x_2(t)$ están en el plano engendrado por u y w, y tienen forma de "espirales elípticas"



$\operatorname{Re}\lambda = a > 0$



$\operatorname{Re}\lambda = a < 0$

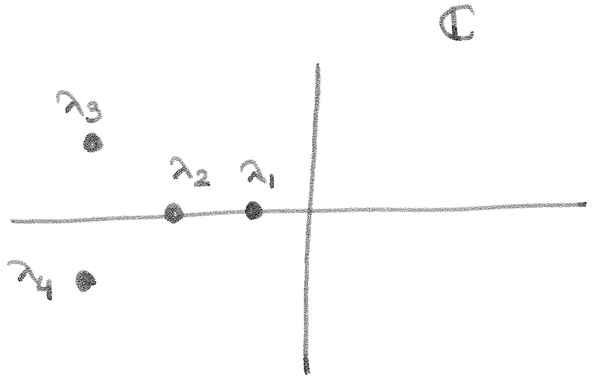
¿Qué ocurre si $\operatorname{Re}\lambda = 0$?

Todo lo anterior sugiere

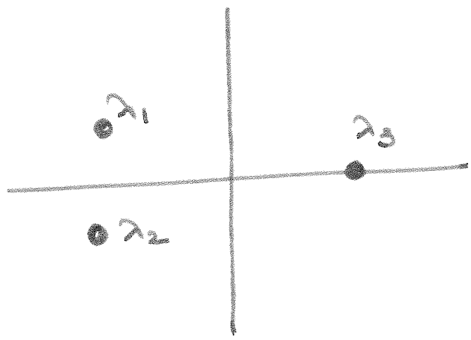
Teorema Dada $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$, el origen $x=0$ es un equilibrio asintóticamente estable de $\dot{x}=Ax$ si se cumple la condición

$$\operatorname{Re}\lambda < 0 \quad \forall \lambda \in \sigma(A).$$

Si existe algún $\lambda \in \sigma(A)$ con $\operatorname{Re}\lambda > 0$ entonces $x=0$ es inestable.



$x=0$ asintóticamente estable



$x=0$ inestable

Ha quedado sin discutir el caso $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$ $\forall \lambda \in \sigma(A)$ y se da la igualdad para algún valor propio; lo veremos en problemas.

La segunda parte del teorema se sigue del análisis anterior. Supongamos que $\lambda \in \sigma(A)$ es real y positivo, tomamos $v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ con $Av = \lambda v$ y escogemos la condición inicial $x_0 = \varepsilon v$; por linealidad

$$x(t;0,x_0) = \varepsilon e^{\lambda t} v, \quad x(t;0,0)=0,$$

de donde,

$$\| x(t;0,x_0) - x(t;0,0) \| = \| x_0 \| e^{\lambda t} \to +\infty \text{ si } t \to +\infty,$$

lo que prueba que $x=0$ es inestable. Cuando λ es complejo con $\mathrm{Re}\,\lambda = a > 0$ podemos usar $x_1(t)$ y la condición inicial $x_0 = \varepsilon u$ (Ejercicio).

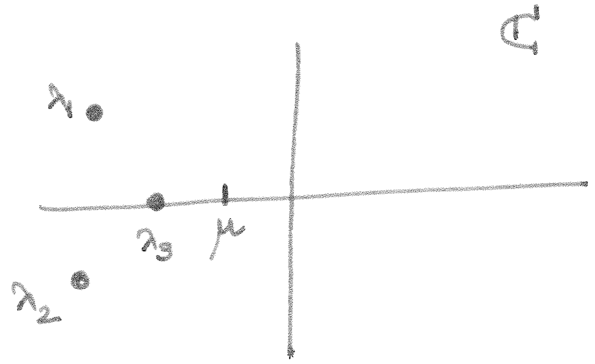
Para probar la estabilidad asintótica usaremos el siguiente

Lema Dado $\mu \in \mathbb{R}$ tal que

$$\mathrm{Re}\,\lambda < \mu \quad \forall \lambda \in \sigma(A),$$

existe un número $M > 0$ tal que

$$\| e^{At} \| \leq M e^{\mu t} \quad \text{si } t \geq 0.$$



Demostración del teorema (continuación). Si $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$ para todo valor propio, podemos escoger $\mu < 0$ cumpliendo la condición del lema, por tanto

$$\| e^{At} \| \leq M e^{\mu t} \quad \text{si } t \geq 0$$

Por tanto $t \in [0, \infty[\mapsto \| e^{At} \|$ es una función acotada por M y que tiende a cero si $t \to +\infty$. De la linealidad

$$x(t;0,x_0) = e^{At} x_0$$

$$\|x(t;0,x_0)-x(t;0,0)\| = \|e^{At}x_0\| \leq Me^{\mu t}\|x_0\|$$

se usa que hemos tomado la norma matricial asociada

$x=0$, dado ε tomamos $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$, estable

$\|x(t;0,x_0)-x(t;0,0)\| \to 0$ si $t\to+\infty$ porque $\mu<0$,

$x=0$ asintóticamente estable.

Demostración del lema

Usaremos la forma canónica de Jordan , $A=PJP^{-1}$;

$$J=\begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_r\end{pmatrix}$$. Cada caja J_i es de la forma

$J_i=\lambda_i I+N_i$ donde $\lambda_i\in\sigma(A)$, $N_i=\begin{pmatrix}0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & 0\end{pmatrix}$

$$e^{At}=Pe^{Jt}P^{-1} \Longrightarrow \|e^{At}\| \leq \|P\|\,\|e^{Jt}\|\,\|P^{-1}\|$$

norma matricial

$$e^{Jt}=\begin{pmatrix} e^{J_1t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{J_rt}\end{pmatrix}$$

Como todas las normas en dimensión finita son equivalentes,

$$\|e^{Jt}\| \leq \gamma \sum_1^r \|e^{J_it}\|$$

donde γ depende de las dimensiones de los bloques y las normas escogidas.

$$e^{J_i t} = e^{(\lambda_i I + N_i)t} = e^{\lambda_i I t} \cdot e^{N_i t}$$

(En general e^{A+B} no coincide con $e^A \cdot e^B$ pero sí lo hace si A y B conmutan)

$$e^{\lambda_i I t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_i^n t^n}{n!} I^n = e^{\lambda_i t} I$$

$$e^{N_i t} = I + N_i t + \frac{N_i^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{N_i^{p-1} t^{p-1}}{(p-1)!}$$ si p es la dimensión de N_i

$$\|e^{N_i t}\| \leq \underbrace{1 + \|N_i\| t + \frac{\|N_i^2\|}{2!} t^2 + \dots + \frac{\|N_i\|^{p-1} t^{p-1}}{(p-1)!}}_{\varphi_i(t) \text{ polinomio de grado } p-1}$$ si $t \geq 0$

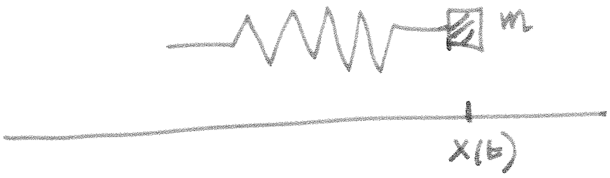
$$\|e^{J_i t}\| \leq \|e^{\lambda_i I t}\| \cdot \|e^{N_i t}\| = |e^{\lambda_i t}| \, \|e^{N_i t}\|$$

$$\leq e^{\mu t} \varphi_i(t) \longrightarrow 0 \text{ si } t \to +\infty \text{ pues } \mu < 0.$$

El oscilador amortiguado

Consideramos la ecuación de un muelle con fricción

$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$ donde m, c, k son constantes positivas



Vamos a probar que la posición de equilibrio $(x=0)$ es asintóticamente estable. Para ello pasamos al sistema de primer orden $(y_1 = x, y_2 = \dot{x})$

$$\dot{y}_1 = y_2, \quad \dot{y}_2 = -\frac{k}{m} y_1 - \frac{c}{m} y_2.$$

Se trata del sistema lineal $\dot{y} = Ay$ con $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{pmatrix}$.

Calculamos los valores propios de A,

$$\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0, \quad \lambda = \frac{1}{2}\left(-\frac{c}{m} \pm \sqrt{\Delta}\right)$$

donde $\Delta = \frac{c^2 - 4k}{m^2}$. Distinguimos dos casos:

- $\Delta \geq 0$ (fricción fuerte). Ambos valores propios son reales y negativos porque $\sqrt{\Delta} \leq \sqrt{\frac{c^2}{m^2}}$
- $\Delta < 0$ (fricción débil). Los valores propios son complejos conjugados con parte real $\frac{-c}{2m}$.

En los dos casos se aplica el teorema.

Conviene observar que la fricción ha sido esencial para obtener este resultado. Es claro que cuando no hay fricción el equilibrio no será asintóticamente estable, pues las oscilaciones no disminuirán su amplitud con el tiempo. Esta idea se puede hacer rigurosa a partir de la energía.

Probemos que $x=0$ no puede ser asintóticamente estable para $m\ddot{x}+kx=0$. Dada $x(t)$ solución,

$$E(t)=\frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2+\frac{k}{2}x(t)^2$$

es constante. Tomamos una solución distinta de la trivial, entonces $(x(0),\dot{x}(0))\neq(0,0)$ y $E(0)>0$. Si esta solución fuese atraída por el origen,

$(x(t),\dot{x}(t))\longrightarrow(0,0)$ si $t\to+\infty$,

$0<E(0)=E(t)\xrightarrow[t\to\infty]{}0$, lo que es absurdo.

El método de la primera aproximación

Supongamos que $X:\Omega\to\mathbb{R}^d$ es un campo de clase C^1 definido sobre un abierto Ω de $\mathbb{R}^d$. Si $x_0\in\Omega$ es un equilibrio $(X(x_0)=0)$ la derivada

$$A=X'(x_0)$$

puede tener información útil sobre la estabilidad asintótica del equilibrio.

<u>Teorema</u> En las condiciones anteriores se supone que

$$\operatorname{Re}\lambda<0 \qquad \forall\lambda\in\sigma(A).$$

Entonces $x=x_0$ es un equilibrio asintóticamente estable de la ecuación $\dot{x}=X(x)$.

Podemos pensar que este resultado extiende al mundo no lineal ~~el~~ teorema sobre la ecuación lineal. Veamos un par de ejemplos

① El péndulo amortiguado

$$\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + \frac{g}{l}\,\text{sen}\,\theta = 0, \quad c>0$$

Pasamos a un sistema $x_1=\theta$, $x_2=\dot{\theta}$ y probamos que $\theta=0$ es asintóticamente estable

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \dot{x} = X(x), \quad X(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{l}\,\text{sen}\,x_1 - cx_2 \end{pmatrix}$$

$$X'(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}\cos x_1 & -c \end{pmatrix}, \quad X(0)=0,$$

$$A = X'(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -c \end{pmatrix}$$ matriz de un oscilador amortiguado

<u>Ejercicio</u> Demuestra que $\theta=0$ no es asintóticamente estable para $\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\,\text{sen}\,\theta = 0$.

② Un modelo de competición

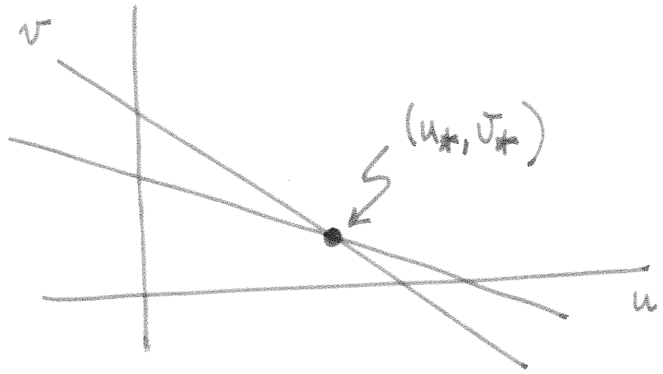
Suponemos que $u=u(t)$, $v=v(t)$ representan el tamaño de dos ~~poblaciones~~ especies que compiten ~~por~~ en un mismo habitat. En ausencia de la otra especie se rigen por logísticas, pero al juntarse se dañan mutuamente. Se propone el modelo

$$\dot{u} = \alpha u \left(1 - \frac{u}{M} - \gamma v\right), \quad \dot{v} = \beta v \left(1 - \delta u - \frac{v}{N}\right)$$

donde los seis parámetros son positivos. Si las rectas

$$1 - \frac{u}{M} - \gamma v = 0, \quad 1 - \delta u - \frac{v}{N} = 0$$

se cortan en el primer cuadrante habrá una posibilidad de coexistencia



pues el punto de corte es un equilibrio para el sistema. Si este equilibrio fuese asintóticamente estable esa coexistencia puede ser viable. Para el campo $X(u,v)$ se cumple

$$X'(u,v) = \begin{pmatrix} \alpha\left(1 - \frac{u}{M} - \gamma v\right) - \frac{\alpha u}{M} & -\alpha\gamma u \\ -\beta\delta v & \beta\left(1 - \delta u - \frac{v}{N}\right) - \frac{\beta v}{N} \end{pmatrix}$$

Además, como (u_*, v_*) pasa por las dos rectas,

$$X(u_*, v_*) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X'(0,0) = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha u_*}{M} & -\alpha\gamma u_* \\ -\beta\delta v_* & -\frac{\beta v_*}{N} \end{pmatrix}$$

Las partes reales de los valores propios de esta matriz nos permitirán decidir ~~en cada caso~~ si hay estabilidad asintótica.

Para la demostración del teorema de la primera aproximación necesitaremos algunos preliminares

① Después de una traslación podemos suponer que el equilibrio es el origen $x_0 = 0$

$\dot{x} = X(x)$, $X(x_0) = 0$. Definimos $y = x - x_0$.

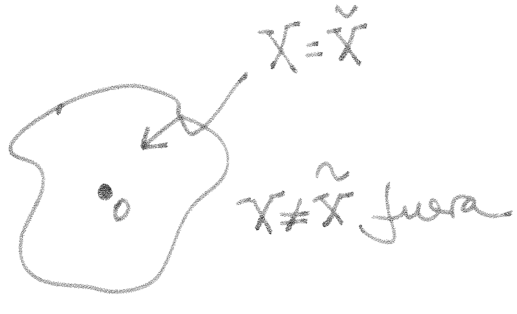
Entonces $\dot{y} = \dot{x} = X(x) = X(y + x_0)$.

Las propiedades de estabilidad de $x = x_0$ para $\dot{x} = X(x)$ son las mismas que las de $y = 0$ para

$\dot{y} = X(y + x_0)$.

② La estabilidad del equilibrio es una propiedad local

Es decir, si X y $\tilde{X}$ son dos campos que coinciden en un entorno del origen, entonces $x = 0$ es asint. estable para $\dot{x} = X(x)$ si y solo si $x = 0$ es asint. estable para $\dot{x} = \tilde{X}(x)$



③ La ecuación lineal completa y una nueva ecuación integral

Recordamos la fórmula para la solución de

$$\dot{x} = Ax + b(t), \quad x(0) = x_0,$$

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} b(s)\, ds$$

Supongamos ahora que b también depende de x, $b = b(t,x)$. Ahora el problema es no lineal

$$\mathring{x} = Ax + b(t,x), \quad x(0) = x_0$$

pero la solución $x(t)$ cumplirá la ecuación integral

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} b(s, x(s))\, ds.$$

Por ejemplo, el problema

$$\mathring{x} = -2x + \underbrace{x^2 - t^4 + 2t^2 + 2t}_{b(t,x)}, \quad x(0) = 0$$

admite la solución $x(t) = t^2$ que cumple la ecuación integral

$$x(t) = \int_0^t e^{-2(t-s)} \left(x(s)^2 - s^4 + 2s^2 + 2s \right) ds.$$

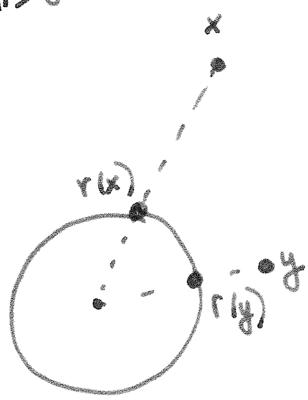
4 De nuevo la retracción

Sea B_δ la bola cerrada de centro el origen y radio δ, definimos

$$r : \mathbb{R}^d \to B_\delta, \quad r(x) = \begin{cases} x & \text{si } \|x\| \le \delta \\ \dfrac{\delta x}{\|x\|} & \text{si } \|x\| > \delta \end{cases}$$

Entonces $r(x) = x$ si $x \in B_\delta$ y

$$\|r(x) - r(y)\| \le \|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d$$



Demostración del Teorema de la primera aproximación

La diferenciabilidad de X en x_0 nos permite escribir

$$X(x) = X(x_0) + X'(x_0)(x - x_0) + R(x) \quad \text{donde}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|R(x)\|}{\|x - x_0\|} = 0 .$$

Por (1) podemos suponer $x_0 = 0$ y obtenemos

$$X(x) = Ax + R(x) \quad \text{con} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\|R(x)\|}{\|x\|} = 0.$$

Vamos a fijar $\varepsilon > 0$, decidiremos su valor exacto al final de la prueba. Por definición de límite encontramos $\delta > 0$ tal que

$$\|R(x)\| \leq \varepsilon \|x\| \quad \text{si} \quad x \in B_\delta .$$

No sabemos si las soluciones del sistema

$$(*) \qquad \dot{x} = Ax + R(x)$$

son prolongables hasta $+\infty$. Para evitar problemas de prolongación vamos a modificar R fuera de B_δ.

Definimos

$$\mathbb{P} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, \quad \mathbb{P}(x) = R(r(x)).$$

Observamos que $\mathbb{P}$ cumple las siguientes propiedades:

i) $\mathbb{P} = R$ en B_δ

ii) $\mathbb{P}$ es ~~localmente~~ Lipschitz-continuo

iii) $\|\mathbb{P}(x)\| \leq \varepsilon \delta \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$

iv) $\|\mathbb{P}(x)\| \leq \varepsilon \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$

En estas condiciones podemos asegurar que hay existencia global y unicidad para los problemas de valores iniciales asociados a

$$(**) \qquad \dot{x} = Ax + P(x).$$

Además, $x=0$ es asint. estable para $(*)$ si y solo si lo es para $(**)$. Aquí hemos usado ii).

Sea $x(t;x_0)$ la solución de $(**)$ que cumple $x(0)=x_0$. Por ③ cumplirá la ecuación integral

$$x(t,x_0) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} P(x(s,x_0))ds.$$

Usamos ahora la hipótesis sobre los valores propios de A y encontramos $\mu<0$ de manera que

$$\operatorname{Re}\lambda < \mu < 0 \quad \forall \lambda \in \sigma(A).$$

Sabemos que para $t \geq 0$ se cumple

$$\|e^{At}\| \leq Me^{\mu t} \quad \text{para algún } M>0.$$

Si tomamos normas en la ecuación integral,

$$\|x(t,x_0)\| \leq \|e^{At}\| \|x_0\| + \int_0^t \|e^{A(t-s)}\| \|P(x(s,x_0))\| ds$$

$$\overset{(iv)}{\leq} Me^{\mu t}\|x_0\| + M\varepsilon\int_0^t e^{\mu(t-s)}\|x(s,x_0)\|ds$$

Multiplicamos la desigualdad por la cantidad positiva $e^{-\mu t}$ y llegamos a

$$e^{-\mu t}\|x(t;x_0)\| \leq M\|x_0\| + M\varepsilon \int_0^t e^{-\mu s}\|x(s,x_0)\|\,ds .$$

Podemos aplicar el lema de Gronwall

$$y(t) \leq a + b\int_0^t y(s)\,ds \Longrightarrow y(t) \leq a e^{bt}$$

con $y(t) = e^{-\mu t}\|x(t,x_0)\|$, $a = M\|x_0\|$, $b = Ms$,

para obtener

$$e^{-\mu t}\|x(t,x_0)\| \leq M\|x_0\|\, e^{M\varepsilon t} \quad \forall t \geq 0 .$$

Es tiempo de elegir $\varepsilon > 0$, impondremos $M\varepsilon < |\mu|$ de manera que $\mu + M\varepsilon < 0$. Entonces

$$\|x(t,x_0)\| \leq M\|x_0\|\, e^{(\mu + M\varepsilon)t} \quad \forall t \geq 0.$$

Como esta desigualdad es válida para cualquier solución de $(**)$ es fácil deducir que $x=0$ es asint. estable para esta ecuación.

Limitaciones del método de la primera aproximación

También es posible probar un resultado de inestabilidad por la primera aproximación: si $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ es C^1, $X(x_0) = 0$ y la derivada $A = X'(x_0)$ cumple que para algún $\lambda \in \sigma(A)$,

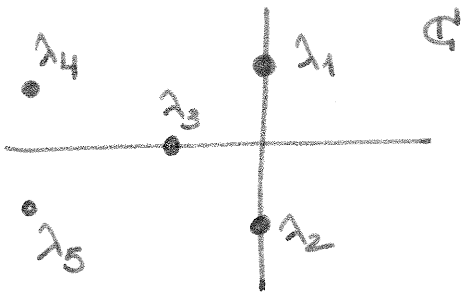
$$\operatorname{Re}\lambda > 0,$$

entonces $x=0$ es inestable para $\dot{x} = X(x)$.

No vamos a probar ese resultado pero conviene mencionarlo para entender el alcance del método de la primera aproximación. Se resuelven el problema de las estabilidad del equilibrio con la excepción del caso

$$\mathrm{Re}\,\lambda \leq 0 \quad \forall \lambda \in \sigma(A)$$

con igualdad para algún λ

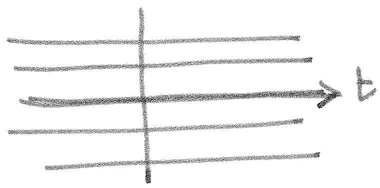


Caso crítico

En este caso crítico no es posible decidir las propiedades de estabilidad de $x = x_0$ a partir de la matriz A.

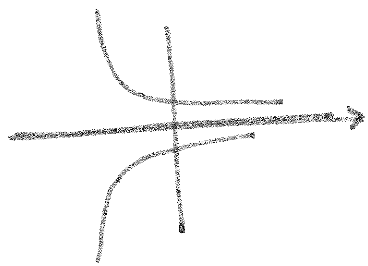
Veamos el caso crítico más simple: $d = 1$, $A = 0$. Los ejemplos que siguen demuestran que puede pasar cualquier cosa:

i) $\dot{x} = 0$



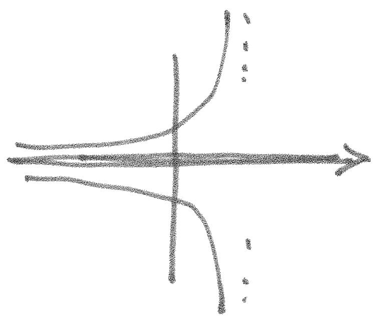
$x = 0$ estable no asint.

ii) $\dot{x} = -x^3$



$x = 0$ asint. estable

iii) $\dot{x} = x^3$



$x = 0$ inestable

En conclusión, el método de la primera aproximación permite probar estabilidad asintótica o inestabilidad pero no puede tratar el caso de estabilidad no asintótica. Esta es la situación típica de la Mecánica conservativa; al no haber fricción se conserva la energía y esto excluye la estabilidad asintótica.

Un argumento energético para probar la estabilidad del equilibrio

Consideramos el oscilador armónico

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

donde $m>0$, $k>0$ pero ahora $c \geq 0$ con lo que incluimos el caso conservativo $(c=0)$.

Pasamos al sistema de primer orden $(y_1 = x,\ y_2 = \dot{x})$

$$(S) \qquad \dot{y}_1 = y_2, \quad \dot{y}_2 = -\frac{k}{m} y_1 - \frac{c}{m} y_2.$$

En la definición de la noción de ~~la norma~~ estabilidad interviene la norma pero la equivalencia de las normas en $\mathbb{R}^d$ hace que podamos escoger la más conveniente en cada caso. Ahora vamos a usar una norma en $\mathbb{R}^2$ que está inspirada en la energía del oscilador,

$$\|(y_1, y_2)\| = \sqrt{\frac{1}{2} m y_2^2 + \frac{1}{2} k y_1^2}\,.$$

Dada una solución $(y_1(t), y_2(t))$ definimos la función energía

$$E(t) = \frac{1}{2} m\, y_2(t)^2 + \frac{1}{2} k\, y_1(t)^2$$

y observamos que cumple

$$\dot{E} = m\, y_2 \dot{y}_2 + k\, y_1 \dot{y}_1 \overset{(S)}{=} m\, y_2 \left(-\frac{k}{m} y_1 - \frac{c}{m} y_2 \right) + k y_1$$

$$= -c\, y_2^2$$

De la desigualdad $\dot{E}(t) = -c\, y_2(t)^2 \leq 0$ deducimos que la energía decrece (en sentido no estricto) y por tanto

$$\| (y_1(t), y_2(t)) \|^2 \leq \| (y_1(0), y_2(0)) \|^2 \text{ si } t \geq 0.$$

A partir de aquí es muy fácil concluir que el equilibri

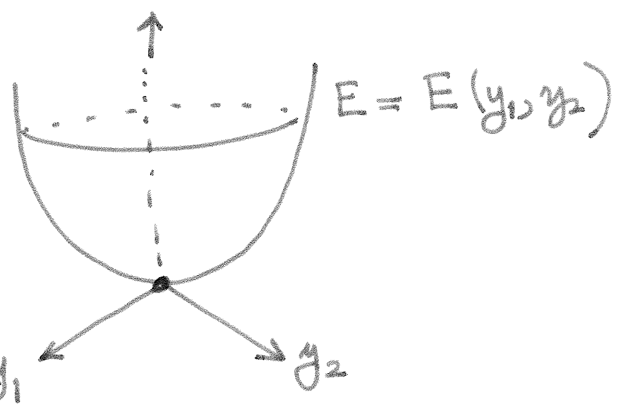
$y_1 = y_2 = 0$ es estable.

Funciones de Lyapunov

Vamos a pensar la demostración anterior con un punto de vista geométrico. En el espacio de fases $\mathbb{R}^2$, y_1 = posición, y_2 = velocidad, hemos considerado la función energía

$$E: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$$

que tiene un mínimo en el origen

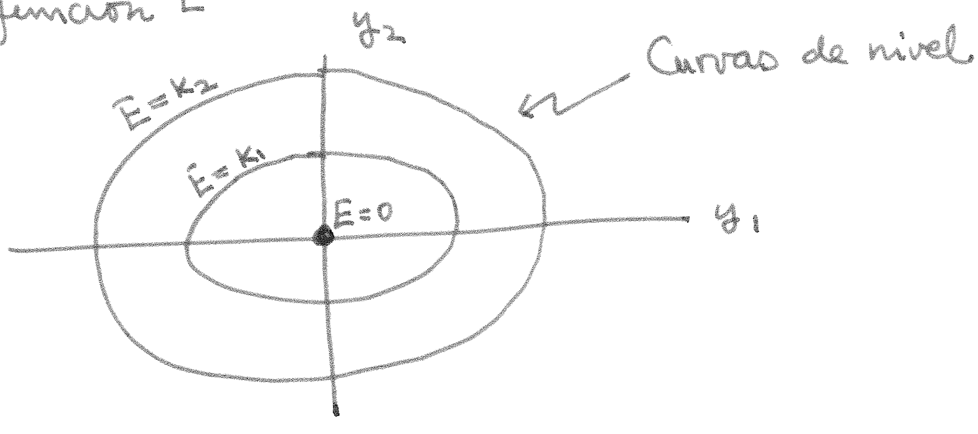


y hemos observado que la energía no puede crecer a lo largo de las soluciones,

$$\frac{d}{dt} E(y_1(t), y_2(t)) \leq 0$$

si $(y_1(t), y_2(t))$ es solución.

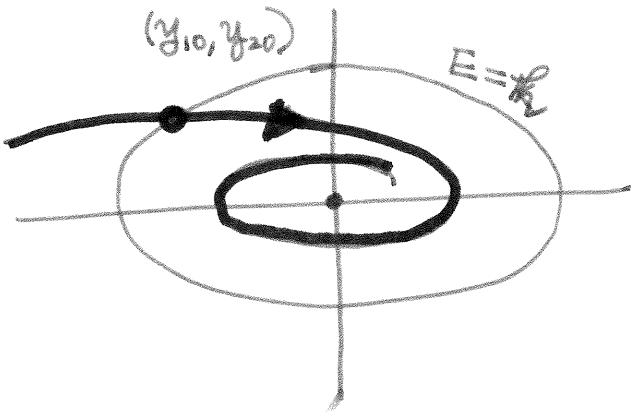
En el plano (y_1, y_2) representamos los conjuntos de nivel de la función E



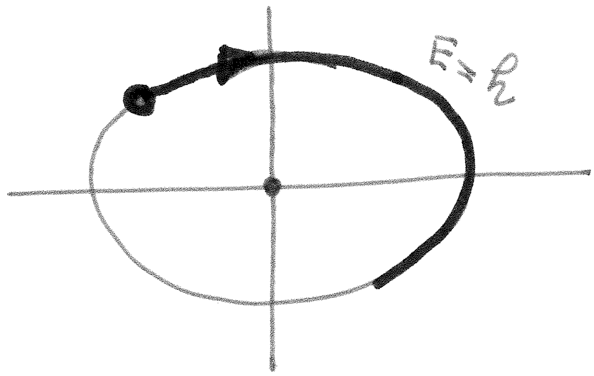
Una solución con condición inicial (y_{10}, y_{20}) no puede escapar en el futuro de la región

$$\{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : E(y_1, y_2) \le h\}$$

con $h = E(y_{10}, y_{20})$.



(Caso $c > 0$)



(Caso $c = 0$)

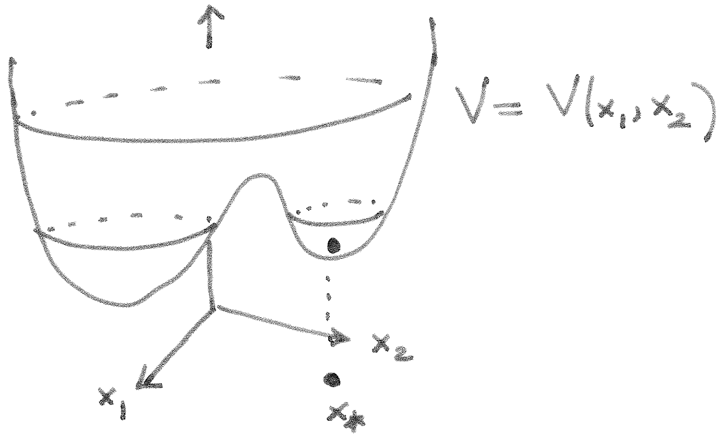
Es decir, las curvas de nivel no permiten la salida de órbitas y esto explica la estabilidad del origen.

Vamos a plantear ahora una situación más general. Nos olvidamos de la mecánica y nos concentramos en el punto de vista geométrico. Consideramos un sistema autónomo

$$\dot{x} = X(x)$$

donde $X : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ es un campo de clase C^1 y $x_* \in \Omega$ es un equilibrio, $X(x_*) = 0$.

Suponemos que existe una función $V : \Omega \to \mathbb{R}$ de clase C^1 que alcanza un mínimo local estricto en $x = x_*$

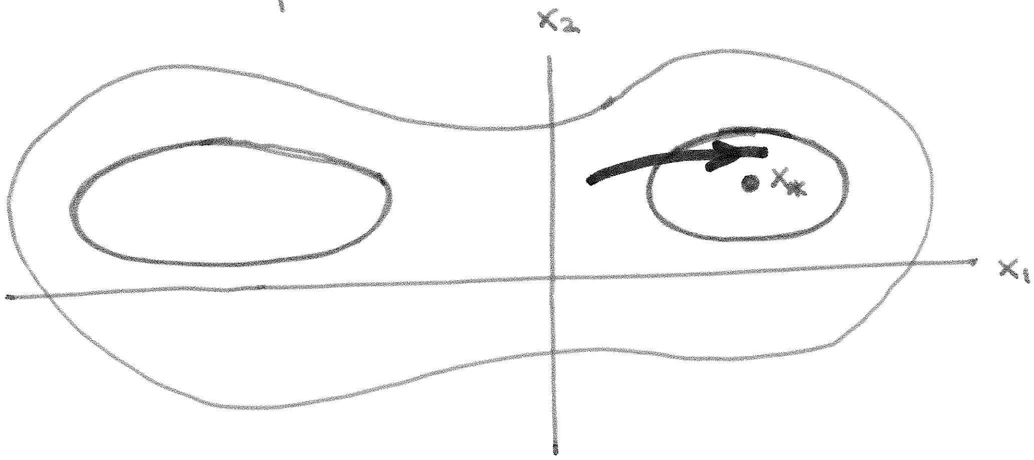


y tal que V no puede crecer a lo largo de las soluciones

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) \leq 0$$

si $x(t)$ es una solución.

Representamos los conjuntos de nivel de V,



y observamos que la solución que entra en $\{V \leq h\}$ no puede escapar de ese conjunto.

En principio la condición $\frac{d}{dt} V(x(t)) \leq 0$ parece difícil de comprobar, pues lo normal es que las soluciones no se conozcan de manera explícita.

Vamos a reformular esta condición y para ello derivamos usando la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = \frac{d}{dt} V(x_1(t), \dots, x_d(t)) =$$

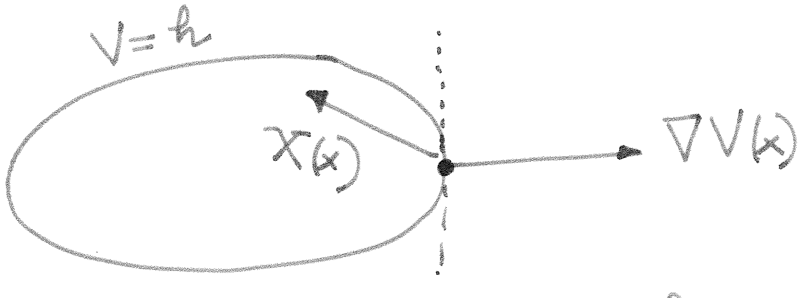
$$\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial V}{\partial x_i}(x_1(t), \dots x_d(t))\, \dot{x}_i(t) = \langle \nabla V(x(t)), \dot{x}(t) \rangle$$

$$\underset{x(t) \text{ es solución}}{=} \langle \nabla V(x(t)), X(x(t)) \rangle$$

Exigiremos

$$\langle \nabla V(x), X(x) \rangle \leq 0 \quad \forall x \in \Omega.$$

Esta condición se impone en todos los puntos de Ω y ya no depende de las soluciones. Además, tiene una interesante interpretación geométrica si recordamos que ∇V marca la dirección de máximo ascenso en el relieve dado por V y ~~por tanto~~ es perpendicular a las curvas de nivel



La velocidad del fluido $X(x)$ apunta hacia adentro y la partícula entra en $V \leq h$.

<u>Teorema</u> Sea Ω un abierto conexo de $\mathbb{R}^d$,

$X : \Omega \to \mathbb{R}^d$, $V : \Omega \to \mathbb{R}$ de clase C^1

tales que $x_* \in \Omega$ cumple $X(x_*) = 0$ y

i) V alcanza un mínimo local estricto en x_*

ii) $< \nabla V(x), X(x) > \leq 0 \quad \forall x \in \Omega$.

Entonces $x = x_*$ es estable para el sistema

$$\dot{x} = X(x).$$

<u>Observaciones</u>

1. La función V se suele llamar función de Lyapunov para el sistema
2. Como veremos en la demostración, no hace falta suponer que X sea de clase C^1; es suficiente que X sea continuo y haya unicidad para el problema de valores iniciales.

<u>Ejemplo</u> Probaremos que $x=0$ es estable para la ecuación

$$\ddot{x} + c\dot{x} + x^3 = 0$$

si $c \geq 0$.

Comenzamos pasando a un sistema de primer orden $y_1 = x$, $y_2 = \dot{x}$

$$\dot{y}_1 = y_2, \quad \dot{y}_2 = -y_1^3 - c y_2 .$$

El campo $Y(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} y_2 \\ -y_1^3 - c y_2 \end{pmatrix}$ está definido en $\Omega = \mathbb{R}^2$ y es C^1. Consideramos la función

$$V : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad V(y_1, y_2) = \frac{1}{2} y_2^2 + \frac{1}{4} y_1^4$$

y vamos a comprobar que es una función de Lyapunov para el equilibrio $y_* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

i) V alcanza un mínimo global estricto en y_*

$$V(0,0) = 0 < \frac{1}{2} y_2^2 + \frac{1}{4} y_1^4 = V(y_1, y_2) \text{ si } (y_1, y_2) \neq (0,0)$$

ii) $\nabla V = \begin{pmatrix} y_1^3 \\ y_2 \end{pmatrix}$,

$$< \nabla V(y), Y(y) > = y_1^3 y_2 - (y_1^3 + c y_2) y_2$$

$$= -c y_2^2 \leq 0 .$$

Demostración del Teorema

A partir de ahora B_r será una bola centrada en x_*, abierta y de radio r. Pretendemos probar que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de manera que si $x_0 \in B_\delta$ entonces

(i) $x(t, x_0)$ está definida en $[0, \infty[$

(ii) $x(t, x_0) \in B_\varepsilon \quad \forall t \geq 0$.

Comenzamos usando que V tiene un mínimo estricto en x_* y por tanto existe $R>0$ de manera que $\overline{B_R} \subset \Omega$ y

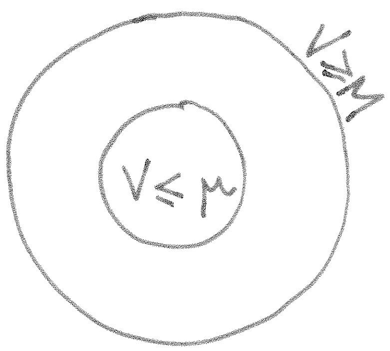
$$V(x) > V(x_*) \quad \text{si } x \in B_R \setminus \{x_*\}.$$

Supondremos $\varepsilon < R$ (lo que no es restrictivo). Diseñamos el mecanismo para construir δ,

Definimos $\displaystyle M = \min_{\partial B_\varepsilon} V(x).$

Como V es continua y $V(x_*) < M$, podemos encontrar $\delta > 0$, $\delta < \varepsilon$, de manera que

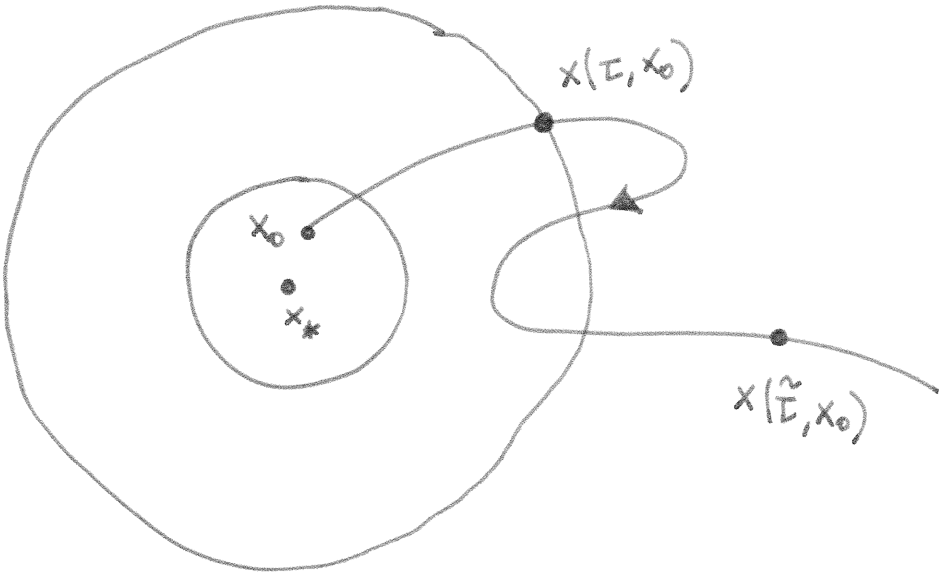
$$\mu = \max_{\overline{B_\delta}} V(x) < M$$



"Los puntos de ∂B_ε están a más altura que los puntos de B_δ"

Veamos que este δ es el apropiado. Si existiese $x_0 \in B_\delta$ que no cumpliera (i) o (ii), la solución $x(t, x_0)$ tendría que salir de B_ε. Es decir, existe $\tilde{\tau} \in \,]0, \omega[$ tal que $\|x(\tilde{\tau}, x_0)\| \geq \varepsilon$.

Esto es evidente si no se cumple (ii). En el caso de que no se cumpla (i) usamos el teorema de prolongación, si $\omega<\infty$ la solución explota o toca la frontera. Como $B_\varepsilon \subset \bar{B}_R \subset \Omega$ en cualquiera de los dos casos saldría de B_ε.



Seleccionamos ahora $\tau \in]0, \tilde{\tau}]$ de manera que

$$x(\tau, x_0) \in \partial B_\varepsilon \quad \text{y} \quad \|x(t, x_0)\| < \varepsilon \text{ si } t \in [0, \tau[$$

Por otra parte observamos que $V(x(t,x_0))$ es decreciente (no estricta) en t, pues

$$\frac{d}{dt} V(x(t,x_0)) = \langle \nabla V(x(t,x_0)), \dot{x}(t,x_0) \rangle$$

$$= \langle \nabla V(x(t,x_0)), X(x(t,x_0)) \rangle \leq 0.$$

Entonces

$$\mu \geq V(x_0) \geq V(x(\tau, x_0)) \geq M$$

y hemos llegado a contradicción.

Teorema de Lagrange

Consideramos un sistema de la forma

$$M\ddot{x} = -\nabla V(x)$$

donde $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$, $M = \operatorname{diag}(m_1 \ldots m_N) = \begin{pmatrix} m_1 & & \\ & \ddots & \\ & & m_N \end{pmatrix}$, $m_i > 0$

y la función potencial $V = V(x)$ es de clase C^2, $V : G \to \mathbb{R}$, donde G es un abierto conexo de $\mathbb{R}^N$.

Los puntos críticos de V producen soluciones constantes

$$x_* \in G,\quad \nabla V(x_*) = 0 \longrightarrow x(t) \equiv x_* \text{ es solución.}$$

Vamos a probar que si V alcanza un mínimo estricto en x_*, entonces $x = x_*$ es estable.

Para ello comenzamos transformando el sistema a primer orden,

$$y_1 = x \in \mathbb{R}^N,\quad y_2 = \dot{x} \in \mathbb{R}^N,$$

lo que conduce al sistema

$$\dot{y}_1 = y_2,\quad \dot{y}_2 = -M^{-1}\nabla V(y_1).$$

El campo $Y(y_1, y_2) = (y_2, -M^{-1}\nabla V(y_1))$ es de clase C^1 en $G \times \mathbb{R}^N \subset \mathbb{R}^{2N}$. El punto $x_* \in G$ con $\nabla V(x_*) = 0$

produce la solución $y_1(t) = x_*$, $y_2(t) = 0$, equilibrio de $\dot{y} = \Upsilon(y)$, $y = (y_1, y_2)$. Para probar la estabilidad de este equilibrio usaremos la energía como función de Lyapunov

$$E(y_1, y_2) = \frac{1}{2} < M y_2, y_2 > + V(y_1)$$

donde $< , >$ representa el producto escalar en $\mathbb{R}^N$.

Observamos que $E : G \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^2 que cumple

i) E alcanza un mínimo estricto en $(x_*, 0)$

Como V alcanza un mínimo estricto en x_*, existe $R > 0$:

$$V(x) > V(x_*) \text{ si } x \in B_R(x_*),\ x \neq x_*.$$

Supongamos ahora que $(y_1, y_2) \in B_R(x_*) \times \mathbb{R}^N$ con $(y_1, y_2) \neq (x_*, 0)$ entonces o bien $y_1 \neq x_*$ o bien $y_2 \neq 0$ ($\Rightarrow < M y_2, y_2 > > 0$); en cualquiera de los dos casos

$$E(y_1, y_2) > V(x_*) = E(x_*, 0)$$

ii) $< \nabla E(y), \Upsilon(y) > \leq 0$ (Ahora $< , >$ es el producto escalar en $\mathbb{R}^{2N}$)

$$\nabla E = \begin{pmatrix} \nabla V(y_1) \\ M y_2 \end{pmatrix}, \quad < \nabla E, \Upsilon > = < \nabla V(y_1), y_2 > + < M y_2, -M^{-1} \nabla V(y_1) > = 0$$

Hemos usado que, por ser M simétrica, se cumple

$$\langle M\xi, \eta \rangle = \langle \xi, M^t \eta \rangle = \langle \xi, M\eta \rangle.$$

En la demostración anterior la notación puede resultar confusa. Hemos llamado V al potencial mientras que la función de Lyapunov se ha denotado por E.