Las leyes de la Mecánica y el problema de N cuerpos

La segunda ley de Newton es una de las herramientas básicas para producir ecuaciones diferenciales. Supondremos que se cumple la ley

$$F = m \cdot a$$

para una partícula que se mueve bajo la acción de un campo de fuerzas. La trayectoria de la partícula se describe por una función $x = x(t)$ que toma valores en $\mathbb{R}^d$, y la aceleración se calcula derivando dos veces, $a = \ddot{x}(t)$. El campo de fuerzas puede depender del tiempo, de la posición, de la velocidad...

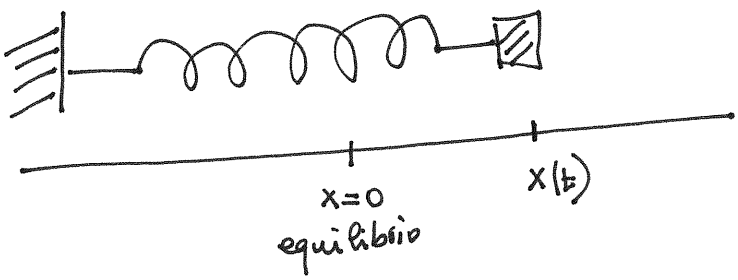
Llegamos a la ecuación diferencial de segundo orden

$$m\ddot{x} = F(t, x, \dot{x}).$$

Observamos la diferencia que hay entre los campos de velocidades, que conducían a ecuaciones de primer orden, y los campos de fuerzas que llevan a ecuaciones de segundo orden.

La dimensión d del espacio es el número de grados de libertad. Comentamos con dos ejemplos en un grado de libertad.

Ejemplo 1 Oscilaciones de un muelle



$$F = F(x)$$

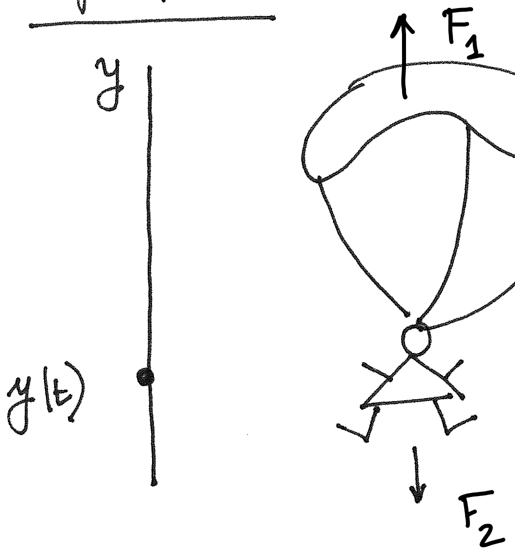
$$F(x) = -kx$$

$$k > 0$$

Ley de Hooke

$$m\ddot{x} = -kx$$

Ejemplo 2 Fricción y caída libre



$$F_1 = F_1(\dot{y}) \qquad F_2 = -mg$$

$$F_1(\dot{y}) = -k|\dot{y}|\dot{y} \quad , k>0$$

(Rozamiento cuadrático)

$$m\ddot{y} = -k|\dot{y}|\dot{y} - mg$$

Imaginemos ahora dos masas puntuales m_1 y m_2 situadas en $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^3$, $p_1 \neq p_2$. De acuerdo a la ley de gravitación universal cada masa ejerce una fuerza sobre la otra

de acuerdo a las fórmulas $\quad F_{12} = -F_{21}$

$$\|F_{12}\| = G\,\frac{m_1 m_2}{\|p_1 - p_2\|^2} \quad , \quad \frac{F_{12}}{\|F_{12}\|} = \frac{p_2 - p_1}{\|p_2 - p_1\|} \, . \qquad (*)$$

Un sistema con dos masas nos lleva al problema de 2 cuerpos

$$\begin{cases} m_1 \ddot{p}_1 = G\, m_1 m_2 \dfrac{(p_2 - p_1)}{\|p_2 - p_1\|^3} \\[2ex] m_2 \ddot{p}_2 = G\, m_1 m_2 \dfrac{(p_1 - p_2)}{\|p_1 - p_2\|^3} \end{cases}$$

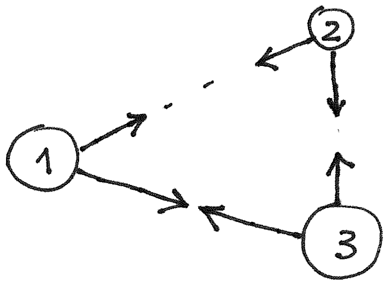
(*) Importante, $\|\cdot\|$ es la norma euclídea en $\mathbb{R}^3$

Observamos que se trata de un sistema de 6 ecuaciones de 2° orden, pues cada p_i tiene tres coordenadas, $p_i = (x_i, y_i, z_i)$

Por ejemplo, escribimos la 2ª ecuación

$$\ddot{y}_1 = G m_2 \frac{y_2 - y_1}{\left[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 \right]^{3/2}}$$

Un sistema de N masas $m_1, \ldots, m_N$ situadas en $p_1, \ldots, p_N$ nos lleva al problema de N cuerpos



Hay un truco sencillo para adaptar las ecuaciones de 2° orden al marco de la lección anterior: declaramos incógnitas las posiciones p_i y también las velocidades $v_i = \dot{p}_i$. Llegamos a un sistema de primer orden con 6N ecuaciones

$$\dot{x} = X(x), \quad x = (p, v)$$

$$\dot{p}_i = v_i, \quad \dot{v}_i = G \sum_{j \neq i} \frac{m_j (p_j - p_i)}{\| p_j - p_i \|^3}, \quad i = 1, \ldots N.$$

Observamos que se trata de un sistema autónomo (X independiente de t) porque suponemos que la ley de Newton ha sido y será siempre la misma ($G = \text{cte}$)

No es difícil aplicar el Teorema de Cauchy-Peano a este sistema y asegurar así la existencia de soluciones locales, pero nos gustaría saber más ¿estará la solución definida para toda la eternidad? ¿dejará de estar definida en algún tiempo finito? Esta segunda posibilidad se podría dar si dos masas chocaran (colisión: $p_i = p_j$, $i \neq j$) o quizás por alguna otra razón menos obvia.

El marco general de la lección será el problema

$$(PC) \qquad \dot{x} = X(t,x), \quad x(t_0) = x_0$$

con $X : D \to \mathbb{R}^d$ continuo, $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ abierto y conexo, $(t_0, x_0) \in D$. La cuestión central será determinar el mayor intervalo sobre el que se puede definir una solución. Después de desarrollar la teoría general volveremos al problema de N cuerpos.

Prolongación de soluciones

Una solución $x : I \to \mathbb{R}^d$ de (PC) se dice prolongable si existe otra solución $\tilde{x} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^d$ de (PC), definida en un intervalo mayor y que extiende a x; es decir,

$$I \subsetneq \tilde{I}, \quad x(t) = \tilde{x}(t) \quad \forall t \in I .$$

Por ejemplo, $x(t) = e^t$, $t \in \mathbb{R}$, es una solución maximal de $\dot{x} = x$, $x(0) = 1$. La función

$$x(t) = \frac{1}{1-t}, \quad t \in \left]-\infty, 1\right[,$$

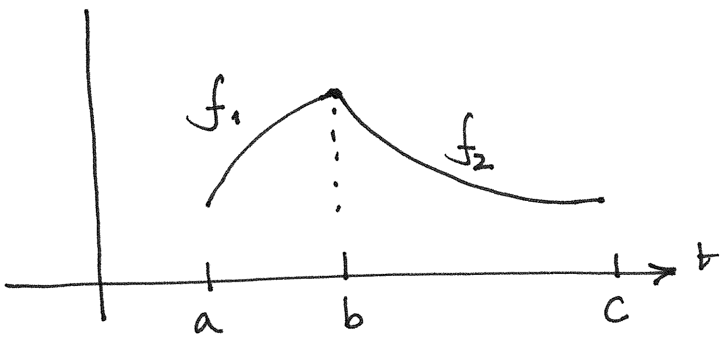
es solución maximal de $\dot{x}=x^2$, $x(0)=1$.

Una técnica básica en esta lección será la yuxtaposición de soluciones.

Dadas dos funciones $f_1:]a,b] \to \mathbb{R}^d$, $f_2: [b,c[\to \mathbb{R}^d$ con $f_1(b)=f_2(b)$ podemos definir una nueva función

$$f:]a,c[\to \mathbb{R}^d, \quad f(t) = \begin{cases} f_1(t), & t \in]a,b[\\ f_2(t), & t \in [b,c[. \end{cases}$$

Sabemos que si f_1 y f_2 son continuas, también lo será f.
Sin embargo, si f_1 y f_2 son C^1 no podemos asegurar que f lo sea



a menos que $f_1'(b-0)=f_2'(b+0)$.

Las soluciones de $\dot{x}=X(t,x)$ tienen la propiedad de que siempre pegan bien. Dadas $x_1:]a,b] \to \mathbb{R}^d$, $x_2: [b,c[\to \mathbb{R}^d$ soluciones con $x_1(b)=x_2(b)$, la función

$$x:]a,c[\to \mathbb{R}^d, \quad x(t) = \begin{cases} x_1(t), & t \in]a,b[\\ x_2(t), & t \in [b,c[\end{cases}$$

también es solución. La razón última de esto se encuentra en la identidad $\dot{x}_1(b-0)=\dot{x}_2(b+0)$ que viene de la ecuación

$$\dot{x}_1(t) = X(t, x_1(t)) \xrightarrow{t=b} \dot{x}_1(b) = X(b, x_1(b))$$

$$\dot{x}_2(t) = X(t, x_2(t)) \xrightarrow[t=b]{} \dot{x}_2(b) = X(b, x_2(b))$$

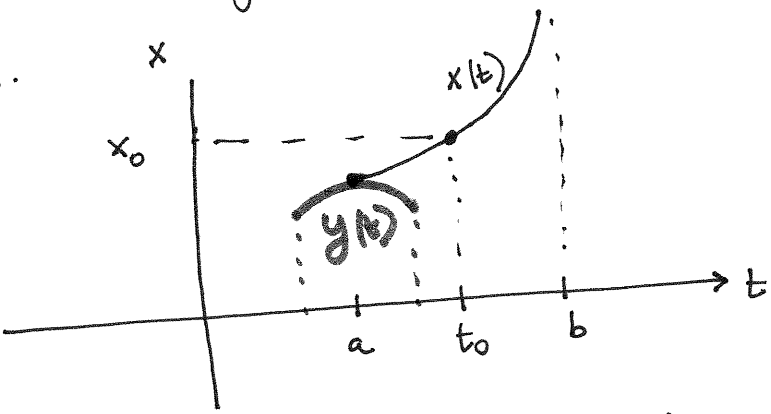
Una vez hecha esta observación podemos obtener muchos resultados sobre prolongación.

Lema 1 Toda solución definida en un intervalo $(\neq \mathbb{R})$ cerrado o semi-cerrado es prolongable.

Dem Sea $x : I \to \mathbb{R}^d$ una solución de (PC) con $I = [a, b[$, $a < t_0 < b$. El punto $(a, x(a))$ está en D (por definición de solución) y podemos aplicar el Teorema de Cauchy Peano al problema

$$(PC^*) \quad \begin{cases} \dot{y} = X(t, y) \\ y(a) = x(a) \end{cases}$$

para obtener una solución $y : J \to \mathbb{R}^d$ definida en un intervalo $J =]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$.



Entonces $\tilde{x} :]a-\varepsilon, b[\to \mathbb{R}^d$, $\tilde{x}(t) = \begin{cases} y(t), & t \in]a-\varepsilon, a[\\ x(t), & t \in [a, b[\end{cases}$

es una solución de (PC) que extiende a $x(t)$.

Lema 2 Toda solución maximal está definida en un intervalo abierto

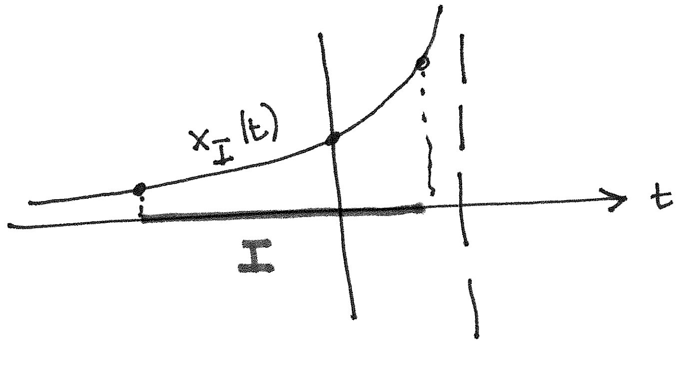
Este resultado es consecuencia directa del anterior. Dada una solución maximal $x: I \to \mathbb{R}^d$ de (PC), diremos que I es el intervalo maximal y emplearemos la notación $I =]\alpha, \omega[$ donde $-\infty \leq \alpha < t_0 < \omega \leq +\infty$. Las letras griegas α y ω, primera y última del alfabeto, refieren al inicio y al fin de los tiempos.

En principio se podría pensar en la posibilidad de que un problema de Cauchy no tuviera solución maximal (siempre sería posible prolongar). El resultado que sigue demuestra que esto no ocurre : siempre hay solución maximal. Lo probaremos con la hipótesis de unicidad.

Proposición Suponemos que el problema de Cauchy asociado a la ecuación $\dot{x} = X(t,x)$ tiene solución única para cualquier condición inicial en D. Entonces existe una solución maximal de (PC).

Dem Usaremos la notación $x_I = x_I(t)$ para ~~de~~ la solución de (PC) definida en un intervalo I. La familia de todos los intervalos abiertos sobre los que hay definida una solución de (PC) se designará por $\mathcal{J}$.

Ejemplo $\dot{x} = x^2$, $x(0) = 1$, $\mathcal{J} = \{]a,b[\ / -\infty \leq a < 0 < b \leq 1 \}$



Definimos $I_* = \bigcup\limits_{I\in \mathcal{J}} I$ y observamos que se trata de un intervalo abierto (como $t_0\in I$ para cada I, I_* es conexo)

$$x_* : I_* \longrightarrow \mathbb{R}^d, \quad x_*(t) = x_I(t), \text{ si } t\in I.$$

En principio no está claro que x_* esté bien definida. El instante t pertenecerá a muchos intervalos I y pareciera que la función x_* es multívoca. No es así porque hay unicidad, si $t\in I_1\cap I_2$ con $I_1, I_2\in \mathcal{J}$, $x_1(t)=x_2(t)$.

Para comprobar que x_* es solución de (PC) es bastante observar que si $t\in I$, entonces $x_*(s) = x_I(s)$ para $s\in\,]t-\delta, t+\delta[$ y algún $\delta>0$. Entonces x_* es derivable en $]t-\delta, t+\delta[$ y $(s, x_*(s))\in D$, $\dot{x}_*(s) = X(s, x_*(s))$, pues $x_I(s)$ es solución.

Finalmente, $x_*(t)$ es maximal gracias a la definición de I_*. Si $x_*(t)$ fuese prolongable, existiría $\tilde{x} : J \to \mathbb{R}^d$ solución de (PC) con $I_* \subsetneq J$, $x_*(t) = \tilde{x}(t)$ si $t\in I_*$. Por el lema 1 podemos suponer que J es abierto y, por la definición de la clase $\mathcal{J}$, $J\in\mathcal{J}$. Esto implica $J\subseteqq I_*$ y llegamos a contradicción.

El resultado principal de la teoría de prolongación dice que si una solución maximal no está definida hasta $+\infty$, entonces o bien la solución explota o bien toca la frontera. Veamos dos ejemplos que muestran estas alternativas:

i) <u>Explosión</u> $\dot{x} = x^2, \ x(0) = 1$

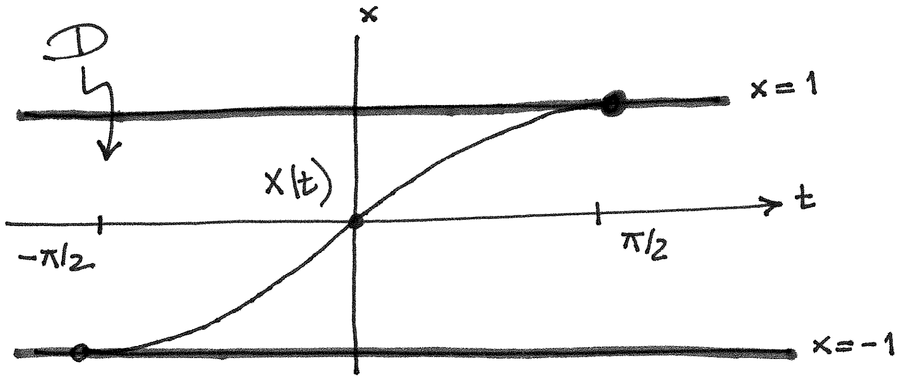
$D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad x(t) = \dfrac{1}{1-t}, \quad t \in]-\infty, 1[.$

En este caso $\omega = 1 < \infty$ y $|x(t)| \to \infty$ si $t \to \omega^-$

ii) <u>Contacto con la frontera</u> $\dot{x} = +\sqrt{1-x^2}, \ x(0) = 0$

$D = \mathbb{R} \times]-1, 1[, \quad x(t) = \operatorname{sen} t, \quad t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

En este caso $\omega = \frac{\pi}{2} < \infty$ y $(t, \operatorname{sen} t)$ se acerca al punto $(\frac{\pi}{2}, 1) \in \partial D$ si $t \nearrow \frac{\pi}{2}$



Ahora enunciamos el resultado de manera precisa.

<u>Teorema de prolongación</u> Se supone que $x(t)$ es una solución maximal definida en $]\alpha, \omega[$ y que

$$\omega < +\infty.$$

Entonces se ha de cumplir alguna de las siguientes alternativas:

i) $\lim_{t \to \omega^-} \|x(t)\| = \infty$

ii) $\exists\, t_n \nearrow \omega, \ x(t_n) \to \xi$ con $(\omega, \xi) \in \partial D$

Nota Hay un resultado análogo para el pasado, suponiendo $\alpha > -\infty$.

Para la demostración del teorema necesitaremos dos lemas.

Lema 3 Se supone que $x:]a,b[\to \mathbb{R}^d$ es una solución de (PC) con $b<\infty$ y tal que existe el siguiente límite,

$$\lim_{t \to b^-} x(t) = \xi .$$

Además, $(b,\xi) \in D$. Entonces $x(t)$ es prolongable.

Dem Definimos $\tilde{x} :]a,b] \to \mathbb{R}^d$, $\tilde{x}(t) = \begin{cases} x(t) & \text{si } t \in]a,b[\\ \xi & \text{si } t = b. \end{cases}$

Esta función es continua y su gráfica queda dentro de D. Como $x(t)$ es solución de (PC), también lo es de la ecuación integral

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} X(s, x(s))\, ds \ , \quad t \in]a,b[.$$

La función $t \mapsto X(t, x(t))$ admite una extensión continua a $]a,b]$ y por tanto es integrable en $[t_0, b]$. Si hacemos $t \to b^-$ en la identidad anterior,

$$\xi = x_0 + \int_{t_0}^{b} X(s, x(s))\, ds .$$

A partir de aquí es inmediato verificar

$$\tilde{x}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} X(s, \tilde{x}(s))\, ds, \quad t \in]a,b].$$

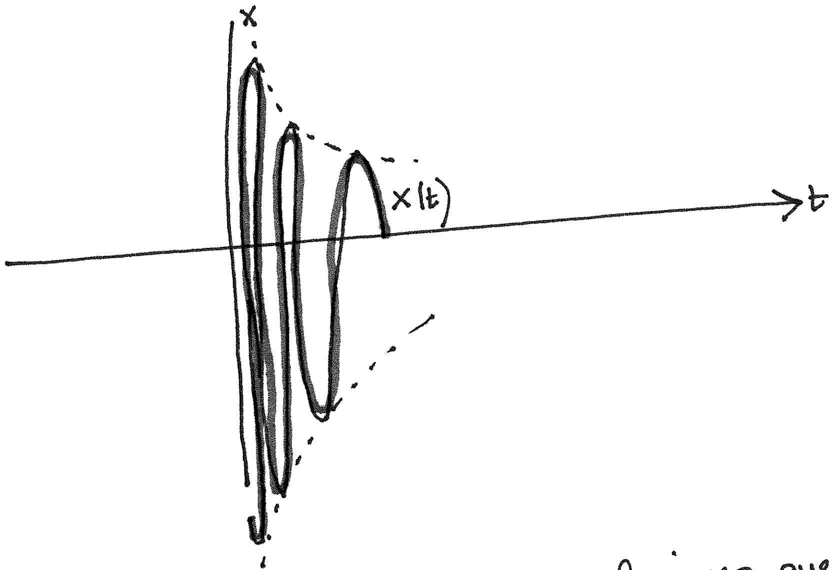
Nota Hemos usado la propiedad $\lim_{t \to b} \int_{t_0}^{t} f(s)\, ds = \int_{t_0}^{b} f(t)\, ds$, que se cumple para cualquier función $f:]t_0, b[\to \mathbb{R}^d$ que sea integrable.

<u>Lema 4</u> Se supone que $x :]a,b[\to \mathbb{R}^d$ es una solución de (PC) con $b<\infty$ y tal que existe una sucesión $t_n \to b$ de manera que

$$x(t_n) \to \xi .$$

Además, $(b,\xi) \in D$. Entonces $x(t)$ es prolongable.

<u>Nota</u> Este resultado implica que la función $x(t) = e^{1/t} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{t}\right)$, $t \in]0,\infty[$ no puede ser solución de una ecuación $\dot{x} = X(t,x)$ con $X : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua.



La gráfica de $x(t)$ tiene infinitas oscilaciones que se concentran en $t=0$ y son de amplitud cada vez mayor. Es fácil encontrar una sucesión $t_n \searrow 0$ de manera que $x(t_n) \to 0$. Si existiera una ecuación, por la versión hacia el pasado del lema, $a=0$, $\xi=0$, $x(t)$ debería ser una solución prolongable y esto es absurdo pues

$$\liminf_{t\to 0^+} x(t) = -\infty , \quad \limsup_{t\to 0^+} x(t) = +\infty$$

<u>Dem</u> Como $(b,\xi)\in D$ construimos un "rectangulo" cerrado centrado este punto y contenido en D,

$$R = \{ (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \ / \ |t-b| \leq \delta, \ \|x - \xi\| \leq \varepsilon \} \subset D$$

Definimos $M = \max\limits_{R} \|X(t,x)\|$ y escogemos $N \in \mathbb{N}$ de manera que

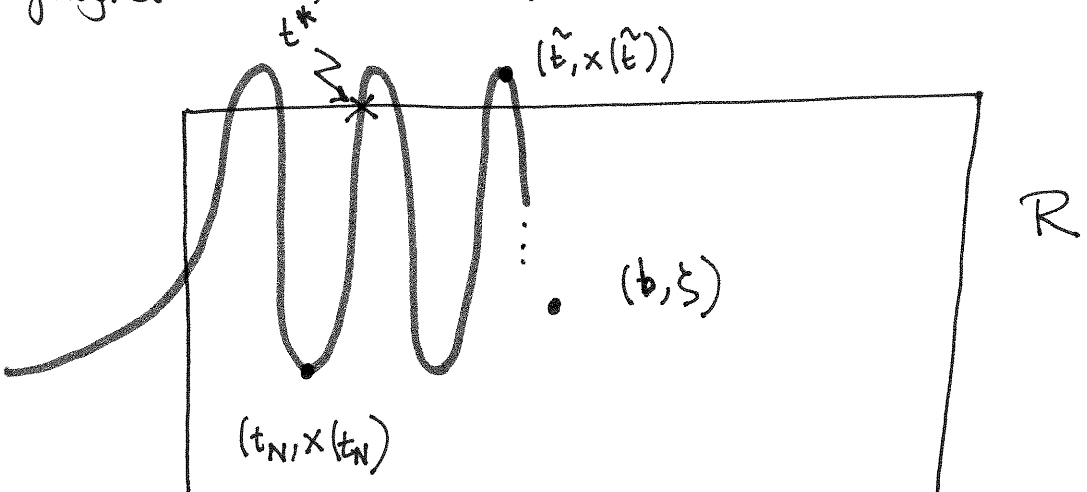
$$b - t_N < \delta, \quad M(b - t_N) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \|\xi - x(t_N)\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces la gráfica de $x(t)$ se queda en R en el intervalo $[t_N, b[$.

Es decir,

(▨) $$\|x(t) - \xi\| \leq \varepsilon \text{ si } t \in [t_N, b[.$$

Probaremos esta estimación por reducción al absurdo. Si no fuera cierta existiría algún tiempo $\tilde{t} \in [t_N, b[$ de manera que $\|x(\tilde{t}) - \xi\| > \varepsilon$ (la solución se saldría del rectángulo). Entonces podríamos seleccionar el primer instante en el que la gráfica de $x(t)$ toca la frontera de R



$$t^* = \min \{ t \in [t_N, \tilde{t}[\ : \ \|x(t) - \xi\| \geq \varepsilon \}$$

Como $x(t)$ es continua, el conjunto es cerrado y existe el mínimo. Se cumple $(t^*, x(t^*)) \in \partial R$ y

$$\|x(t) - \xi\| < \varepsilon \quad \forall t \in [t_N, t^*[$$

En el intervalo $[t_N, t^*]$ la gráfica de $x(t)$ queda dentro del rectángulo y se cumple

$$\|X(t, x(t))\| \leq M \quad \text{si} \quad t \in [t_N, t^*].$$

Entonces, si $t \in [t_N, t^*]$

$$\|x(t) - \xi\| \leq \|x(t) - x(t_N)\| + \|x(t_N) - \xi\| \overset{\text{ec. Volterra}}{\leq}$$

$$\left\| \int_{t_N}^{t} X(s, x(s))\, ds \right\| + \|x(t_N) - \xi\| \leq$$

$$M|t - t_N| + \|x(t_N) - \xi\| \leq M(b - t_N) + \|x(t_N) - \xi\| < \varepsilon.$$

Haciendo $t = t^*$ llegamos a la desigualdad, $\|x(t^*) - \xi\| < \varepsilon$, lo que no es compatible con la definición de t^*.

Una vez que hemos probado $(\diamond)$, el lema se prueba con facilidad. La función $t \in [t_N, b[\mapsto X(t, x(t))$ es continua y su norma está acotada por M, se trata por tanto de una función integrable. Esto implica la existencia del límite

$$\lim_{t \to b^-} \int_{t_N}^{t} X(s, x(s))\, ds.$$

Entonces

$$x(t) = x(t_N) + \int_{t_N}^{t} X(s, x(s))\, ds$$

también tiene límite. Como $x(t_n) \to \xi$, ese límite ha de ser ξ,

$$\lim_{t \to b^-} x(t) = \xi.$$

Ahora se aplica el lema anterior.

Demostración del Teorema. Supondremos que la alternativa i) no se cumple y probaremos que entonces ii) ha de ser válida.

La negación de i) lleva a la existencia de una sucesión $t_n \nearrow \omega$ de manera que $\{x(t_n)\}$ es una sucesión acotada. Entonces existirá una parcial convergente, $\{x(t_{\sigma(n)})\} \to \xi \in \mathbb{R}^d$.

Para aligerar la notación llamaremos $\{t_k\}$ y $\{x(t_k)\}$ a estas parciales. Como $(t_k, x(t_k)) \to (\omega, \xi)$, deducimos que (ω, ξ) está en la adherencia de D. Como $\overline{D} = D \cup \partial D$, será suficiente probar que $(\omega,\xi) \notin D$. Procedemos por reducción al absurdo, si $(\omega,\xi) \in D$ el lema 4 es aplicable y entonces $x(t)$ sería prolongable, una contradicción con la hipótesis de partida.

En la práctica este teorema se suele usar para probar que la solución es prolongable en el futuro $(\omega = +\infty)$. El argumento típico es por reducción al absurdo, se supone $\omega < +\infty$ y se buscan razones que impidan la explosión i) o el contacto con la frontera ii).

Veamos un ejemplo: $\dot{x} = \dfrac{2}{x} + \dfrac{\operatorname{sen} t}{x^2}, \quad x(0) = 2$

El dominio de la ecuación será $D = \mathbb{R} \times]0,\infty[$ y vamos a probar que la solución maximal está definida en $]\alpha, \infty[$. Comenzamos con dos observaciones sobre el campo $X(t,x) = \dfrac{2}{x} + \dfrac{\operatorname{sen} t}{x^2}$. Se cumple:

(a) $X(t,1) = 2 + \operatorname{sen} t \geq 1 > 0$

(b) $|X(t,x)| \leq \dfrac{2}{x} + \dfrac{|\operatorname{sen} t|}{x^2} \leq 3$ si $t \in \mathbb{R}$, $x \geq 1$.

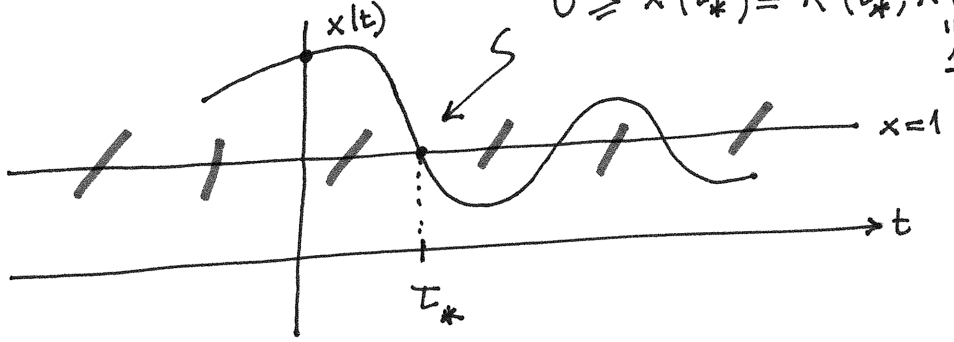
De estas propiedades vamos a deducir que la solución cumple

(α) $x(t) > 1 \quad \forall t \in [0, \omega[$

(β) $x(t) \leq 2 + 3t \quad \forall t \in [0, \omega[$.

La propiedad (α) se debe a que la línea $x = 1$ actuá como una barrera, si la solución llegara a tocar $x = 1$, la primera vez lo tendría que hacer con derivada $\dot{x} \leq 0$, lo que contradice (a)

$$0 \geq \dot{x}(\tau_*) = X(\tau_*, \underset{1}{\underset{\shortparallel}{x(\tau_*)}}) > 0$$



Con más precisión, supongamos que (α) no se cumple. Existirá $\tilde{t} \in [0, \omega[$ tal que $x(\tilde{t}) \leq 1$. Entonces el conjunto

$$A = \{\tau \in [0, \omega[\; : \; x(t) > 1 \quad \forall t \in [0, \tau[\}$$

está contenido en $[0, \tilde{t}]$. Además, A no es vacío y podemos tomar su supremo $\tau_* = \sup A$. Se cumple $0 < \tau_* \leq \tilde{t} < \omega$, $x(\tau_*) = 1$, $x(t) > 1$ si $t \in [0, \tau_*[$. De aquí,

$$0 \geq \dot{x}(\tau_*) = X(\tau_*, x(\tau_*)) = X(\tau_*, 1) \overset{\text{por (a)}}{>} 0.$$

Para probar (β) combinamos (b) y (α) para deducir

$|X(t,x(t))| \leq 3$ si $t \in [0,\omega[$. Entonces

$$x(t) = 2 + \int_0^t X(s,x(s))ds \implies x(t) \leq 2 + 3t \quad \text{si } t \in [0,\omega[.$$

Una vez que sabemos que (α) y (β) son ciertas es fácil probar que $\omega = \infty$. En otro caso se cumpliría $\omega < \infty$ y una de las alternativas

i) $|x(t)| \longrightarrow \infty$ si $t \uparrow \omega$ ii) $\exists t_n \nearrow \omega$: $(t_n, x(t_n)) \to (\omega, \xi) \in \partial D$

De (α) y (β), $1 < x(t) \leq 2+3t < 2+3\omega$, y esto impide i)

Como $\partial D = \mathbb{R} \times \{0\}$, si se cumpliera ii), $\xi = 0$ y $x(t_n) \longrightarrow 0$.

Esto es imposible por (α).

Lema de Gronwall

Vamos a presentar un resultado sobre desigualdades integrales que resulta ser una herramienta muy útil en la teoría de prolongación. Se considera una función continua $\varphi : [\tau, T[\longrightarrow \mathbb{R}$, $-\infty < \tau < T \leq +\infty$, que cumple

$$\varphi(t) \leq a + b \int_\tau^t \varphi(s)ds, \quad t \in [\tau, T[,$$

donde a y b son números reales y $b \geq 0$.

Entonces
$$\varphi(t) \leq a e^{b(t-\tau)}, \quad t \in [\tau, T[.$$

Para interpretar este resultado conviene pensar primero en el caso en el que la desigualdad se convierte en igualdad.

La ecuación integral de Volterra

$\varphi(t) = a + b\int_\tau^t \varphi(s)\,ds$ es equivalente al problema de Cauchy

$\dot{x} = bx$, $x(\tau) = a$ cuya única solución es $x(t) = ae^{b(t-\tau)}$.

Entonces el lema de Gronwall nos dice que las soluciones de la inecuación quedan por debajo de la solución de la ecuación.

Demostración del lema Suponemos $b \neq 0$, pues el caso $b=0$ es trivial.

Consideramos la primitiva de $\varphi(t)$,

$$\phi(t) = \int_\tau^t \varphi(s)\,ds \quad \text{que cumple} \quad \phi \in C^1([\tau, T[),$$

$$\phi'(t) \leq a + b\phi(t), \quad \phi(\tau) = 0.$$

Hemos transformado la inecuación integral en una inecuación diferencial. Calculamos la derivada de $e^{-bt}\phi(t)$,

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-bt}\phi(t)\right) = e^{-bt}\left(\phi'(t) - b\phi(t)\right) \leq e^{-bt}a.$$

Integrando entre τ y t, y aplicando la regla de Barrow,

$$e^{-bt}\phi(t) - \underbrace{e^{-b\tau}\phi(\tau)}_{=0} \leq a\int_\tau^t e^{-bs}\,ds = \frac{a}{b}\left(e^{-b\tau} - e^{-bt}\right)$$

$$\Rightarrow \phi(t) \leq \frac{a}{b}\left(e^{b(t-\tau)} - 1\right).$$

Volviendo a la inecuación integral, y usando que b es positivo,

$$\varphi(t) \leq a + b\phi(t) \leq ae^{b(t-\tau)}.$$

Ecuaciones con crecimiento lineal

Vamos a obtener un resultado global más profundo que el de la lección primera.

Teorema Suponemos $D =]a,b[\times \mathbb{R}^d$ con $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ y $X : D \to \mathbb{R}^d$ continuo y tal que existen funciones no negativas $m, n \in C(]a,b[)$:

$$\|X(t,x)\| \leq m(t)\|x\| + n(t) \qquad \forall (t,x) \in D.$$

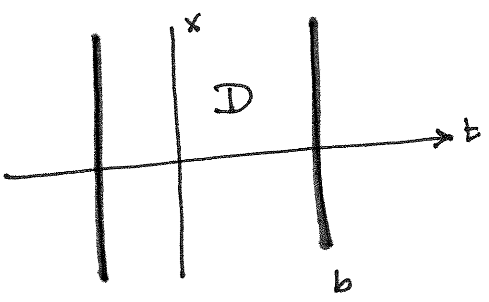
Entonces, si $(t_0, x_0) \in D$, toda solución maximal de

$$(PC) \qquad \dot{x} = X(t,x), \quad x(t_0) = x_0$$

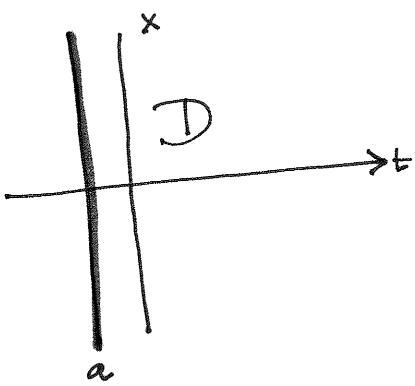
está definida en $]a,b[$.

Vamos a ver que este teorema extiende varios resultados conocidos y además permite obtener resultados nuevos interesantes.

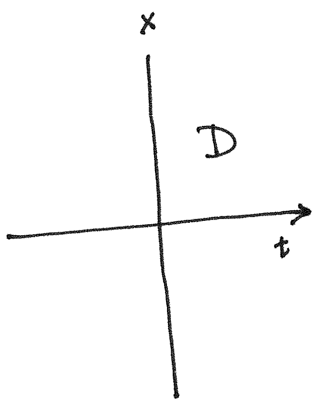
(i) Teorema global de la lección 1 Se suponía $D =]a,b[\times \mathbb{R}^d$ con a y b finitos. Ahora también admitimos la posibilidad de semi-espacios e incluso del espacio completo



$-\infty < a < b < +\infty$



$-\infty < a, \ b = +\infty$



$a = -\infty, \ b = +\infty$

En el teorema de la lección 1 se suponía que el campo era acotado $\|X(t,x)\| \leq M$, $(t,x) \in D$. Entonces se cumple la condición de crecimiento lineal con $m(t) = 0$, $n(t) = M$.

(ii) Teorema de existencia y unicidad para ecuaciones lineales

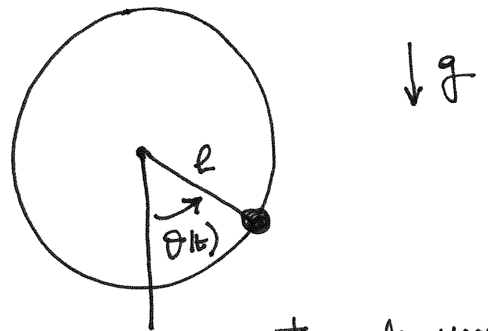
Consideramos $\dot{x} = A(t)x_0 + b(t)$, $x(t_0) = x_0$, donde $A: I \to \mathbb{R}^{d\times d}$, $b: I \to \mathbb{R}^d$ son funciones continuas definidas en un intervalo abierto I.

El dominio de la ecuación es $D =]I[\times \mathbb{R}^d$ y el campo es $X(t,x) = A(t)x + b(t)$. Entonces $X : D \to \mathbb{R}^d$ es continuo y existe $\frac{\partial X}{\partial x}(t,x) = A(t)$. Además la condición de crecimiento lineal se cumple con $m(t) = \|A(t)\|$, $n(t) = \|b(t)\|$.

<u>Nota</u> Hay una norma vectorial $\|x\|$ si $x \in \mathbb{R}^d$ y una norma matricial asociada $\|A\|$ si $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$. Se cumple $\|Ax\| \leq \|A\|\,\|x\|$.

Combinamos este Teorema con el de unicidad y deducimos que para ecuaciones lineales el problema de Cauchy tiene una única solución definida en el mismo intervalo sobre el que son continuos los coeficientes $A(t)$ y $b(t)$.

(iii) La ecuación del péndulo



$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\,\mathrm{sen}\,\theta = 0$$

Se trata de la ecuación que describe el movimiento de una partícula que se mueve en una circunferencia vertical de radio l y está sometida a la acción de la gravedad g. Hay algunas soluciones evidentes $(\theta = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots)$ y $(\theta = \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \ldots)$ que corresponden al equilibrio estable e inestable. Las restantes soluciones son complicadas y no se pueden describir mediante funciones elementales. Vamos a demostrar que todas las soluciones se extienden a $]-\infty, +\infty[$.

Consideramos el sistema $\begin{cases} \dot{\theta} = v \\ \dot{v} = -\frac{g}{l}\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$ y definimos

$x = (\theta, v) \in \mathbb{R}^2$, $X(t, \theta, v) = (v, -\frac{g}{l}\,\mathrm{sen}\,\theta)$. El sistema

se escribe en la forma $\dot{x} = X(t, x)$ con $D = \mathbb{R}^2$ y las soluciones de la ecuación del péndulo se corresponden con la primera coordenada de las soluciones del sistema.

El campo es muy regular (en particular C^1) y por tanto hay unicidad. Además se cumple la condición de crecimiento lineal, que vamos a verificar con la norma de la suma

$\|x\| = |\theta| + |v|$,

$$\|X(t,\theta,v)\| = |v| + \frac{g}{l}\,|\mathrm{sen}\,\theta| \leq |v| + \frac{g}{l} \leq \|x\| + \frac{g}{l}$$

$m(t) = 1$, $n(t) = \frac{g}{l}$.

<u>Demostración del Teorema</u> Suponemos que $x(t)$ es solución maximal de (PC) definida en $]\alpha, \omega[$ y razonamos por reducción al absurdo. Si $\omega < b$ o $\alpha > a$ debemos llegar a contradicción. Para concretar supondremos

$$\omega < b$$

y el otro caso queda como ejercicio.

Si $\omega < b \leq \infty$ podemos aplicar el teorema de prolongación y se dará una de las situaciones siguientes:

i) $\lim_{t \to \omega^-} \|x(t)\| = b$

ii) $\exists t_n \nearrow \omega$, $x(t_n) \to \xi$, $(\omega, \xi) \in \partial D$.

La segunda posibilidad sin más que observar la estructura de la frontera de D en este caso,

$$\partial D = \{a,b\}\times\mathbb{R}^d \quad \text{si } -\infty<a<b<+\infty, \qquad \partial D = \{a\}\times\mathbb{R}^d \quad \text{si } -\infty<a,\ b=+\infty, \qquad \partial D=\phi \quad \text{si } a=-\infty,\ b=+\infty$$

$$\partial D = \{b\}\times\mathbb{R}^d \quad \text{si } a=-\infty,\ b<\infty.$$

Como $\omega>t_0>a$, $(\omega,\xi)\in\partial D$ implicaría $\omega=b$, lo que va contra la hipótesis $\omega<b$.

Vamos a descartar la primera posibilidad usando la ecuación integral y el Lema de Gronwall, para $t\in[t_0,\omega[$

$$x(t) = x_0+\int_{t_0}^{t} X(s,x(s))\,ds \Rightarrow$$

$$\|x(t)\| \leq \|x_0\| + \int_{t_0}^{t}[m(s)\|x(s)\|+n(s)]\,ds$$

Como $\omega<b$ podemos calcular $M=\max\limits_{t\in[t_0,\omega]} m(t)$, $N=\max\limits_{t\in[t_0,\omega]} n(t)$.

Entonces

$$\|x(t)\| \leq \|x_0\| + \int_{t_0}^{b}[M\|x(s)\|+N]\,ds,$$

$$\|x(t)\| \leq \|x_0\| + N(\omega-t_0) + M\int_{t_0}^{t}\|x(s)\|\,ds$$

Aplicamos el Lema de Gronwall con $\varphi(t)=\|x(t)\|$, $a=\|x_0\|+N(\omega-t_0)$, $b=M$. Entonces

$$\|x(t)\| \leq a\,e^{b(t-t_0)}, \quad t\in[t_0,\omega[$$

Esto hace imposible que $\|x(t)\|$ explote en $t=\omega$ pues

$$\|x(t)\| \leq a\,e^{b(\omega-t_0)} \quad \forall t\in[t_0,\omega[\quad \text{y } \omega \text{ es finito.}$$

Soluciones no prolongables en el problema de N cuerpos

Consideramos el sistema

$$\dot{p}_i = v_i \ , \quad m_i \dot{v}_i = F_i \ , \quad i = 1, \dots, N$$

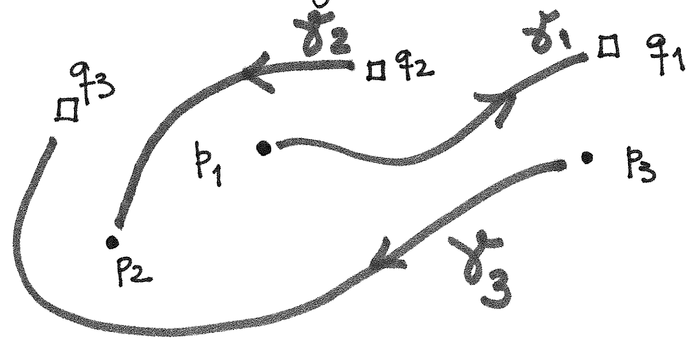
donde $p_1, \dots p_N, v_1, \dots, v_N \in \mathbb{R}^3$ y $F_i = \sum_{j \neq i} \frac{G m_i m_j (p_j - p_i)}{\| p_j - p_i \|^3}$

Las funciones $F_i = F_i(p_1, \dots p_N)$ tienen singularidades si $p_i = p_j$ para algún $i \neq j$. Por eso definimos el espacio de colisiones

$$\Delta = \{ (p_1, \dots p_N) \in (\mathbb{R}^3)^N : \ p_i = p_j \text{ para algún } i \neq j \}$$

Observamos que Δ es un subconjunto cerrado de $(\mathbb{R}^3)^N$ compuesto por una unión finita de variedades lineales de codimensión 3. Las funciones $F_i : (\mathbb{R}^3)^N \setminus \Delta \to \mathbb{R}^3$ son muy regulares (en particular C^1). Además el conjunto $(\mathbb{R}^3)^N \setminus \Delta$ es abierto y conexo.

"Probaremos" de manera intuitiva que $(\mathbb{R}^3)^N \setminus \Delta$ es arco-conexo para el caso $N=3$. Un punto de $(\mathbb{R}^3)^N \setminus \Delta$ consistirá en la elección ordenada de N puntos distintos de $\mathbb{R}^3$. Dados (p_1, p_2, p_3) y (q_1, q_2, q_3), unimos p_1 y q_1 por un arco γ_1 que no pase



por los otros puntos, a continuación unimos p_2 y q_2 por un arco que no pase por los otros puntos o por γ_1, etcétera

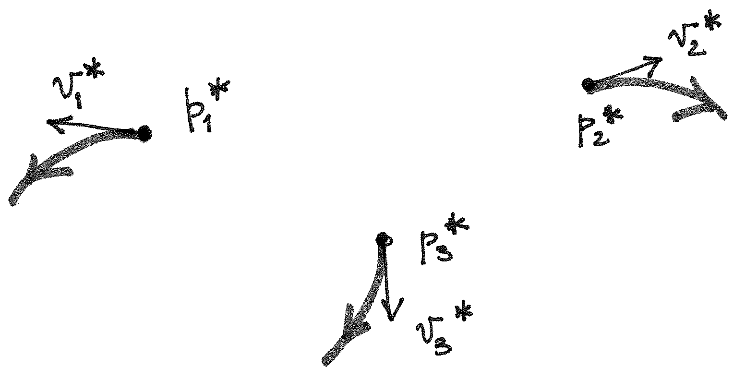
Consideramos $\dot{x} = X(t,x)$ con $D = \mathbb{R} \times ((\mathbb{R}^3)^N \setminus \Delta) \times (\mathbb{R}^3)^N$,

$$X(t, p_1 \dots p_N, v_1 \dots v_N) = \left(v_1 \dots v_N, \frac{1}{m_1} F_1, \dots, \frac{1}{m_N} F_N\right).$$

Entonces X es de clase C^1 en D y dadas condiciones iniciales

$$p_i(0) = p_i^*, \quad \dot{p}_i(0) = v_i^*, \quad i = 1, \dots N$$

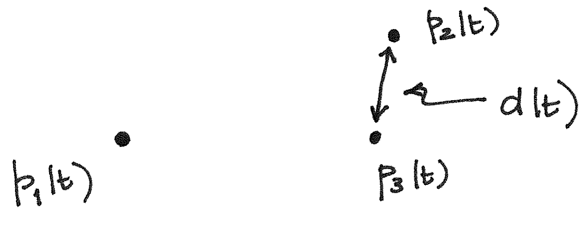
con $(p_1^* \dots p_N^*) \notin \Delta$, existe una única solución maximal



Definimos

$$d(t) = \min \{ \|p_i(t) - p_j(t)\| : i \neq j \}, \quad t \in \,]\alpha, \omega[.$$

<u>Teorema</u> Dada una solución maximal con $\omega < \infty$, existe una sucesión $t_n \to \omega$ tal que $d(t_n) \to 0$.



<u>Notas</u> 1. El teorema nos dice que si la solución deja de estar definida en tiempo finito, entonces al menos dos masas se han de acercar infinitamente.

2. Con más trabajo se puede probar que $\lim_{t \to \omega^-} d(t) = 0$.

Para preparar la demostración introducimos la función

$$U : (\mathbb{R}^3)^N \setminus \Delta \to \mathbb{R}, \quad U(p_1, \dots p_N) = \sum_{i<j} \frac{G m_i m_j}{\|p_i - p_j\|}.$$

Esta función es C^∞ y tiene una propiedad importante:

$$\frac{\partial U}{\partial p_i} = F_i, \quad i = 1, \dots N.$$

Conviene pensar un poco en la notación, $p_i = (x_i, y_i, z_i)$ y por tanto $\frac{\partial U}{\partial p_i} = \left(\frac{\partial U}{\partial x_i}, \frac{\partial U}{\partial y_i}, \frac{\partial U}{\partial z_i} \right)$ es un vector de $\mathbb{R}^3$.

Para comprobar la identidad $\frac{\partial U}{\partial p_i} = F_i$ conviene entender primero la identidad $\frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\frac{1}{\|\xi\|}\right) = -\frac{\xi_i}{\|\xi\|^3}$ si $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $\|\xi\| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}$.

Dada una solución $(p_1(t), \dots, p_N(t))$ del problema de N cuerpos, definimos la energía

$$E(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \|\dot{p}_i(t)\|^2 - U(p_1(t), \dots, p_N(t)), \quad t \in]\alpha, \omega[.$$

<u>Lema</u> (Conservación de la energía) $E(t)$ es constante

<u>Dem</u> Observamos que $E(t)$ es una función derivable (*),

$$\frac{d}{dt} E(t) = \sum_{i=1}^{N} m_i \langle \dot{p}_i(t), \ddot{p}_i(t) \rangle - \sum_{i=1}^{N} \left\langle \frac{\partial U}{\partial p_i}(p_1(t), \dots p_N(t)), \dot{p}_i(t) \right\rangle$$

donde $\langle \, , \rangle$ es el producto escalar en $\mathbb{R}^3$. Como $m_i \ddot{p}_i = F_i = \frac{\partial U}{\partial p_i}$, deducimos que $\frac{d}{dt} E(t) = 0$ y por tanto $E(t)$ es una función constante.

(*) $\xi \in \mathbb{R}^3 \mapsto \|\xi\|^2$ es ~~derivable~~ diferenciable en todo punto

<u>Demostración del Teorema</u> Razonamos por reducción al absurdo y suponemos que existen números positivos δ y r de manera que

$$d(t) \geq \delta > 0 \quad \text{si } t \in [\omega - r, \omega[.$$

De la definición de $d(t)$,

$$(*) \qquad \|p_i(t) - p_j(t)\| \geq \delta \quad \text{si } i \neq j, \; t \in [\omega - r, \omega[.$$

De la definición de la función U,

$$U(p_1(t), \ldots, p_N(t)) \leq \frac{1}{\delta} \sum_{i<j} G m_i m_j =: C_1, \quad t \in [\omega - r, \omega[$$

(el potencial está acotado sobre la solución)

Sabemos que la energía total es una constante, que llamaremos E_0. Entonces

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \|\dot{p}_i(t)\|^2 = E_0 + U(p_1(t), \ldots p_N) \leq E_0 + C_1 =: C_2$$

(la energía cinética está acotada sobre la solución).

En particular, $m_i \|\dot{p}_i(t)\|^2 \leq C_2$ y las velocidades permanecen acotadas,

$$(**) \qquad \|v_i(t)\| \leq \left[\frac{C_2}{m_i}\right]^{1/2}, \quad t \in [\omega - r, \omega[.$$

Entonces tambien las posiciones q. permanecen acotadas cerca del tiempo ω,

$$p_i(t) = p_i(\omega - r) + \int_{\omega - r}^{t} v_i(s)\, ds \Longrightarrow \|p_i(t)\| \leq \|p_i(\omega - r)\| + \left[\frac{C_2}{m_i}\right]^{1/2} |t - \omega$$

$$(***) \qquad \|p_i(t)\| \leq \|p_i(\omega - r)\| + \left[\frac{C_2}{m_i}\right]^{1/2} r \ , \quad t \in [\omega - r, \omega[.$$

Estas estimaciones nos permitirán llegar a la contradicción que buscamos. Como $\omega < \infty$ sabemos por el Teorema de prolongación que se ha de cumplir una de las alternativas siguientes:

(i) $\lim_{t \to \omega^-} \{\|p_1(t)\| + \dots + \|p_N(t)\| + \|v_1(t)\| + \dots + \|v_N(t)\|\} = \infty$

(ii) $\exists t_n \nearrow \omega : \ p_i(t_n) \to \xi_i \ , \ v_i(t_n) \to \eta_i \ , \ (\omega, \xi_1 .. \xi_N, \eta_1 .. \eta_N) \in \partial D.$

Las estimaciones $(**)$ y $(***)$ demuestran que (i) es imposible. Para probar que tampoco (ii) es posible observamos que $\partial D = \mathbb{R} \times \Delta \times (\mathbb{R}^3)^N$. Como t_n debería estar en $[\omega - r, \omega[$ para n grande, si usamos $(*)$, con $i \neq j$,

$$0 < \delta \leq \|p_i(t_n) - p_j(t_n)\| \longrightarrow \|\xi_i - \xi_j\| .$$

Esto impide que $(\xi_1, .., \xi_N)$ esté en Δ y por tanto (ii) es imposible.