Universidad de Granada. Informática y Matemáticas.
Ecuaciones Diferenciales II. 17 de septiembre de 2015

1. Calcula la solución maximal del problema

$$\dot{x} = x^2 + 1, \; x(0) = 1.$$

2. Encuentra una retracción del plano en el conjunto

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + 4y^2 \leq 1\}.$$

3. Encuentra una sucesión de funciones continuas $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ de manera que $\{f_n\}$ sea uniformemente acotada pero no sea equicontinua.

4. Se considera la sucesión de funciones $\{x_n\}$, $x_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definidas de manera inductiva por las fórmulas

$$x_0(t) = 1, \;\; x_{n+1}(t) = 1 + \int_0^t \operatorname{sen} x_n(\tau) d\tau.$$

Demuestra que existe una sucesión parcial que converge uniformemente.

5. Dado $n \geq 1$ se considera la solución $x_n(t)$ del problema

$$\dot{x} = \cos\left(\frac{x}{n}\right), \;\; x(0) = 1.$$

Calcula, si existe, $\lim_{n\to\infty} x_n(t)$.

6. Se considera la ecuación $\ddot{x} + \dot{x} + \operatorname{sen} x = 0$. ¿Es el equilibrio $x = 0$ asintóticamente estable?

7. Encuentra un plano que sea invariante para el sistema $\dot{x} = Ax$ donde A es la matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

8. Se supone que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\;(t, x) \mapsto f(t, x)$ es continua y cumple

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq 7|x - y|.$$

Demuestra que la ecuación integral

$$x(t) = 2 + \int_0^t \frac{1}{\sqrt{|s|}} f(s, x(s)) ds$$

tiene a lo sumo una solución continua y definida en todo $\mathbb{R}$.