Universidad de Granada. Informática y Matemáticas.
Ecuaciones Diferenciales II. Examen final, 26 de junio de 2015

1. Se considera el sistema

$$x(t) = 7 + \int_0^t y(s)ds, \quad y(t) = -\int_0^t x(s)ds.$$

¿Existe solución? ¿Es única? En caso afirmativo calcula dicha solución.

2. Encuentra dos soluciones maximales distintas del problema

$$\dot{x} = +\sqrt{|x|}, \quad x(0) = 1.$$

Demuestra que hay unicidad local.

3. Se considera la sucesión de funciones $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } t \leq -n \\ \frac{t}{n} & \text{si } |t| < n \\ 1 & \text{si } t \geq n. \end{cases}$
Demuestra que la sucesión es equicontinua. ¿Es uniformemente acotada? Calcula $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$. ¿Hay convergencia uniforme de f_n a f?

4. Demuestra que todas las soluciones maximales de la ecuación

$$\ddot{x} + x^5 = 0$$

están definidas en $]-\infty, +\infty[$.

5. Dado $h \in \mathbb{R}$, la solución de

$$\dot{x} = \operatorname{sen} x, \quad x(0) = \pi + h$$

se denota por $x(t; h)$. Calcula $\Delta(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}[x(t; h) - x(t; 0)]$.

6. Se supone que $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ es una función continua que cumple

$$f(t) \leq 5e^{-t} + 3\int_0^t e^{s-t} f(s)ds$$

si $t \geq 0$. Encuentra números a y b para los que se cumpla

$$f(t) \leq ae^{bt}$$

si $t \geq 0$.

7. En el espacio de las matrices $\mathbb{R}^{4\times 4}$ se considera la norma $\|A\| = \max_{1\le i\le 4}\sum_{j=1}^{4}|a_{ij}|$. Encuentra un polinomio $p(t)$ para el que se cumpla la desigualdad

$$\|e^{Bt}\| \le p(t)e^{3t}$$

si $t \ge 0$ y B es la matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

8. Estudia la estabilidad del equilibrio $x = y = 0$ para el sistema

$$\dot{x} = y^5, \quad \dot{y} = -x^7.$$