Universidad de Granada. Informática y Matemáticas.
Ecuaciones Diferenciales II. Segundo examen, 9 de junio de 2015

1. Encuentra la solución general de la ecuación diferencial $\dot{x} = tx^3$. En particular se especificará el dominio de definición $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$.

2. Calcula un número real μ para el que se cumpla $\lim_{t\to+\infty} \frac{\|e^{At}\|}{e^{\mu t}} = 0$ si A es la matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

3. La solución del problema de valores iniciales

$$\ddot{x} + x + x^3 = 0,\ x(0) = 2\alpha,\ \dot{x}(0) = \alpha$$

se denota por $x(t;\alpha)$. Calcula $x(t;0)$ y $\frac{\partial x}{\partial \alpha}(t;0)$ para cada $t \in \mathbb{R}$. Explica los teoremas que se emplean para justificar el cálculo anterior.

4. Se considera una sucesión de funciones continuas $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ que converge uniformemente a $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ y una sucesión de números $t_n \in [0,1]$ que converge a t_*. Demuestra que $f_n(t_n) \to f(t_*)$.

5. Se considera el problema de valores iniciales

$$\dot{x} = \frac{f(t,x)}{t^2 + x^2},\ \ x(0) = 1$$

donde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es continua y cumple la condición $|f(t,x)| \leq 2|x| + 7$ para cada $(t,x) \in \mathbb{R}^2$. Demuestra que existe una solución con intervalo maximal $]-\infty, +\infty[$.