Universidad de Granada. Informática y Matemáticas.
Ecuaciones Diferenciales II. Primer examen, 17 de marzo de 2015

1. Se considera el problema $\dot{x} = g(x),\ x(0) = 1$ donde

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ g(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & \text{si } x \geq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

Calcula su solución maximal ¿es única?

2. Resuelve cada uno de los siguientes problemas:
(a) $\dot{x} = x^{1/5},\ x(0) = 0$
(b) $x(t) = 2 + 4\int_3^t x(s)ds$
(c) $\dot{x} = tx,\ x(0) = 1, x(2) = 0.$

3. Se considera una sucesión de funciones $\{f_n\}$ donde cada $f_n \in C^1([0,1], \mathbb{R}^d)$ cumple

$$\|f_n'(t)\| \leq 7 \quad \text{para cada } t \in [0,1].$$

Demuestra que la sucesión es equicontinua. ¿Es siempre uniformemente acotada?

4. Se considera el problema de valores iniciales

$$(PC_1) \quad \dot{x} = x + f(t,x),\ x(0) = x_0$$

con $f :]-1,1[\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ continua y acotada. Dado $\epsilon \in]0,1[$ se define la función

$$x_\epsilon(t) = \begin{cases} e^t x_0 & \text{si } t \in [-\epsilon, \epsilon] \\ e^t x_0 + \int_0^{t-\epsilon} e^{t-s} f(s, x_\epsilon(s))ds & \text{si } t \in]\epsilon, 1[\\ e^t x_0 + \int_0^{t+\epsilon} e^{t-s} f(s, x_\epsilon(s))ds & \text{si } t \in]-1, -\epsilon[. \end{cases}$$

Demuestra que existe una sucesión $\{\epsilon_n\}$ de manera que x_{ϵ_n} converge uniformemente en $]-1,1[$ a una solución de (PC_1).

5. Sea $f_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f_n(x,y)$ una sucesión de funciones que cumplen

$$|f_n(x,y)| \leq 2 \ \text{ para cada } n \in \mathbb{N}, (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Demuestra que existe un subconjunto denso D de $\mathbb{R}^2$, una función $f : D \to \mathbb{R}$ y una sucesión parcial $\{f_{\sigma(n)}\}$ tales que $f_{\sigma(n)}$ converge a f puntualmente en el conjunto D.