

Sistema de dos competidores

$$\begin{cases} \dot{u} = \lambda(u,v)u, & u \geq 0 \\ \dot{v} = \mu(u,v)v, & v \geq 0 \end{cases}$$

$$\lambda(u,v) = a - bu - cv, \quad \mu(u,v) = d - eu - fv; \quad a, b, c, d, e, f > 0.$$

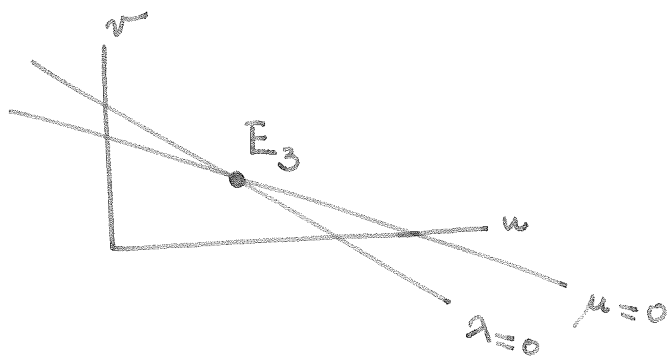
Espacio de fases $\Omega = \mathbb{R}_+^2$, ~~\mathbb{R}_+^2~~ $\mathbb{R}_+^2 = [0, \infty[^2$

Equilibrios

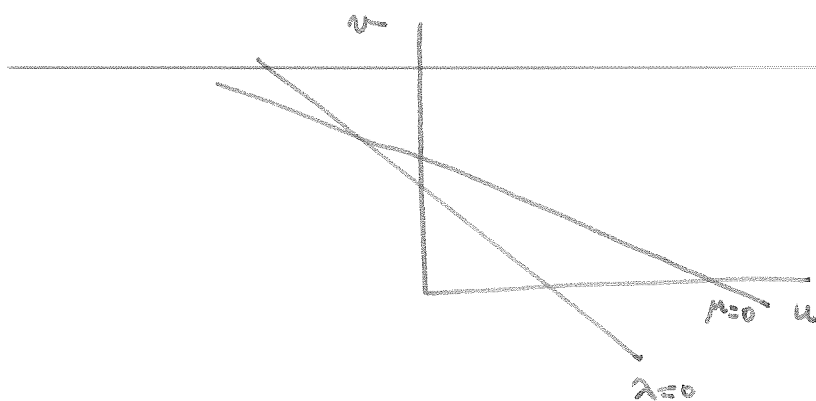
$$E_0 = (0,0), \quad E_1 = \left(\frac{a}{b}, 0\right), \quad E_2 = \left(0, \frac{d}{f}\right)$$

En ocasiones aparecen equilibrios en $\text{int}(\mathbb{R}_+^2)$. Consideramos las rectas $R_1: \lambda=0$, $R_2: \mu=0$ y distinguimos casos según su posición relativa

(a) R_1 y R_2 se cortan en $\text{int}(\mathbb{R}_+^2)$

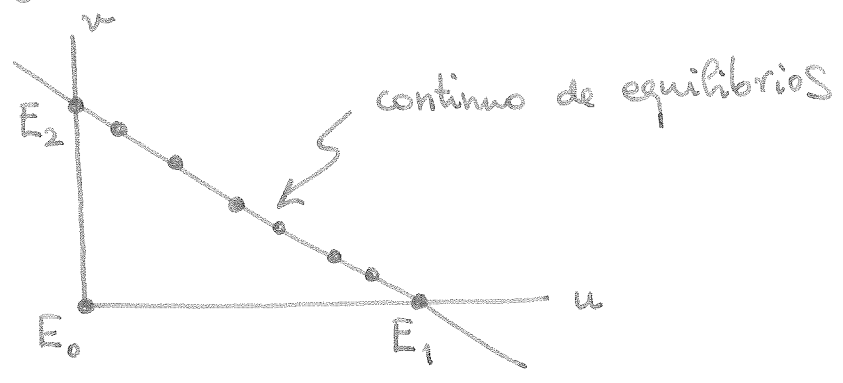


(b) R_1 y R_2 no se cortan o lo hacen fuera de $\text{int}(\mathbb{R}_+^2)$



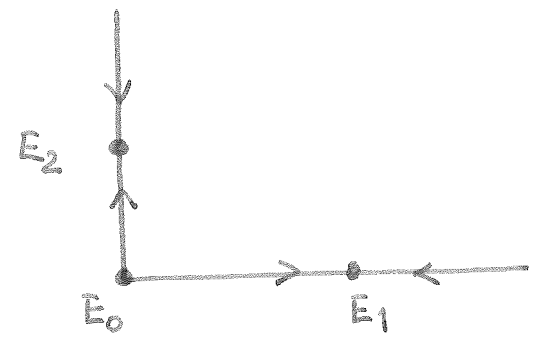
No hay equilibrio en $\text{int}(\mathbb{R}_+^2)$

(c) R_1 y R_2 coinciden



Dinámica en los ejes

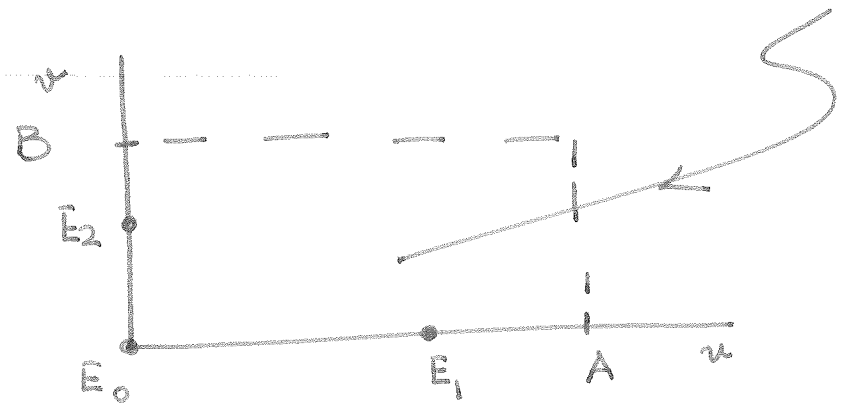
$\dot{u} = \lambda(u, 0)u$ Ecuaciones logísticas
 $\dot{v} = \mu(0, v)v$



Sistema disipativo

Probaremos que existen números $A, B > 0$ tales que toda solución $(u(t), v(t))$ está definida en el futuro y existe τ (que depende de la solución) de manera que

$$u(t) \leq A, \quad v(t) \leq B \quad \text{si } t \geq \tau$$



"Todas las órbitas entran en el rectángulo $[0, A] \times [0, B]$ y permanecen en el futuro"

El término disipativo lo introdujo Norman Levinson en los cuarenta para ~~mod~~ describir dinámicas de sistemas mecánicos o eléctricos en los que había pérdida de energía. Observamos que el modelo de Volterra no ~~es~~ disipativo. En Ecología el carácter disipativo suele venir de la hipótesis logística sobre cada población.

Para probar que nuestro sistema es disipativo vamos a hacer uso de las inecuaciones diferenciales:

Suponemos que $\varphi, \psi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones de clase C^1 que cumplen

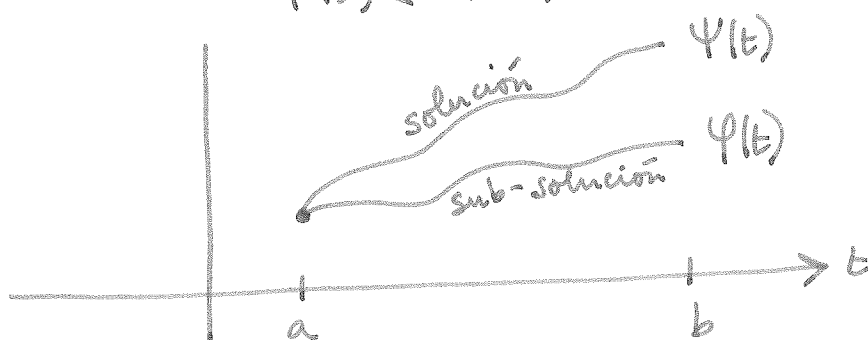
$$\dot{\varphi}(t) \leq f(t, \varphi(t)), \quad \dot{\psi}(t) = f(t, \psi(t)), \quad t \in [a, b]$$

Sub-solución Solución

donde $f: [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^1 (para que haya unicidad del p.v.i.).

Entonces, si $\varphi(a) \leq \psi(a)$ se cumple

$$\varphi(t) \leq \psi(t) \quad \forall t \in [a, b]$$



Fijamos $A > \frac{a}{b}$. Sea $(u(t), v(t))$ una solución del sistema definida en $] \alpha, \omega [$ con $\alpha < t_0 < \omega$. Observamos que $u(t)$ cumple

$$\dot{u} = (a - bu - cv)u \leq (a - bu)u$$

y es por tanto una sub-solución de la ecuación logística

$$\dot{\Psi} = (a - b\Psi)\Psi, \quad \Psi \geq 0.$$

Conocemos bien las soluciones de esta ecuación

$$\Psi(t) = \frac{a}{b + ce^{-at}}$$



Escogemos c de manera que $\Psi(t_0) \geq u(t_0)$. Se ha de cumplir

$$\Psi(t) \geq u(t), \quad t \in [t_0, \omega[.$$

De modo análogo fijamos $B > \frac{d}{f}$ y obtenemos

$$\tilde{\Psi}(t) = \frac{d}{f + \tilde{c}e^{-dt}}, \quad \tilde{\Psi}(t) \geq v(t), \quad t \in [t_0, \omega[.$$

Estas cotas impiden que $(u(t), v(t))$ explote en un tiempo finito mayor que t_0 (Nótase que $u \geq 0, v \geq 0$ en $] \alpha, \omega [$)

Por tanto $\omega = +\infty$ y se cumple

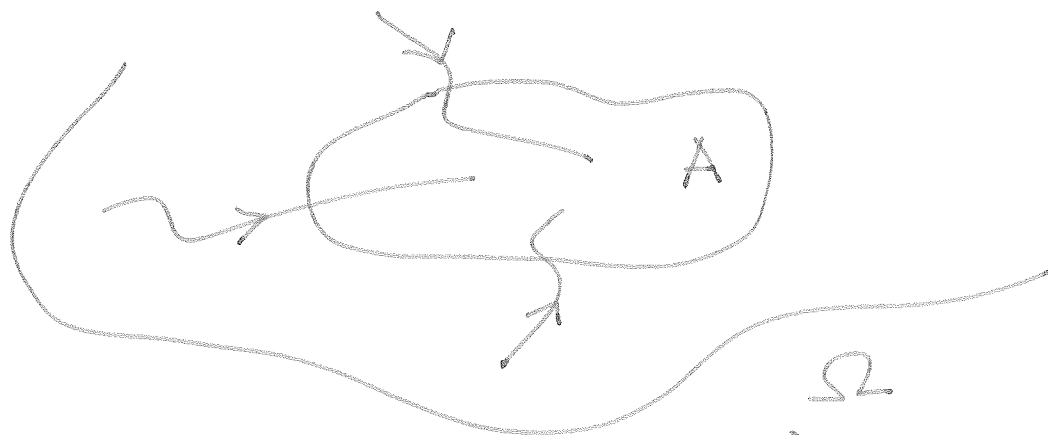
$$u(t) \leq \Psi(t), \quad v(t) \leq \tilde{\Psi}(t), \quad t \in [t_0, +\infty[$$

Como $\psi(t) \rightarrow \frac{a}{b} < A$, $\tilde{\psi}(t) \rightarrow \frac{d}{f} < B$ ($t \rightarrow +\infty$)

se concluye que la solución entra (y permanece) en $[0, A] \times [0, B]$ cuando t es grande.

Regiones invariantes

Sea $\dot{x} = X(x)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$ con $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ de clase C^1 . Un conjunto $A \subset \Omega$ se dice invariante en el futuro o positivamente invariante si, dado $p \in A$, la solución $\phi_t(p)$ está definida en $[0, +\infty[$ y cumple

$$\phi_t(p) \in A, \quad t \in [0, +\infty[$$


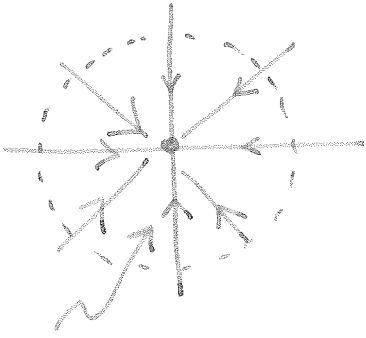
"Lo que entra en A , allí permanece"

De modo análogo podemos definir conjunto invariante para el pasado. Se dice que A es invariante cuando lo es para el pasado y para el futuro.

Veamos cuatro ejemplos simples con

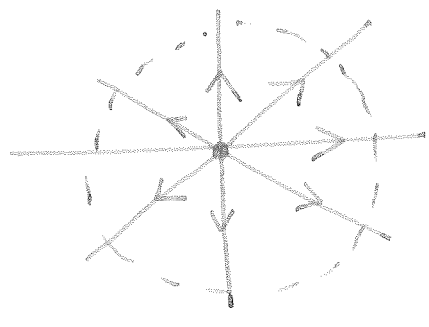
$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1 \}$$

$$\dot{x} = -x, \dot{y} = -y$$



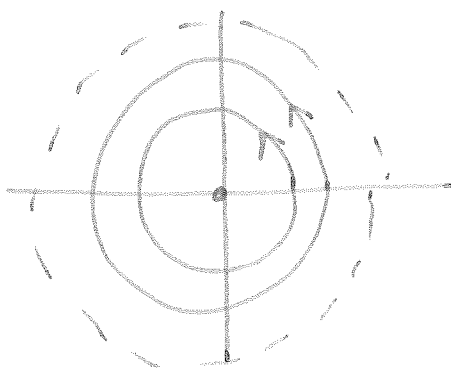
A invariante para el futuro

$$\dot{x} = +x, \dot{y} = +y$$



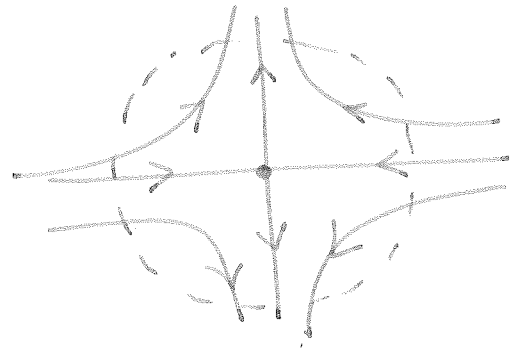
A invariante para el pasado

$$\dot{x} = y, \dot{y} = -x$$



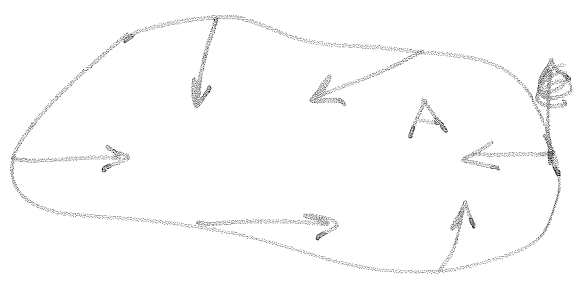
A invariante

$$\dot{x} = -x, \dot{y} = y$$

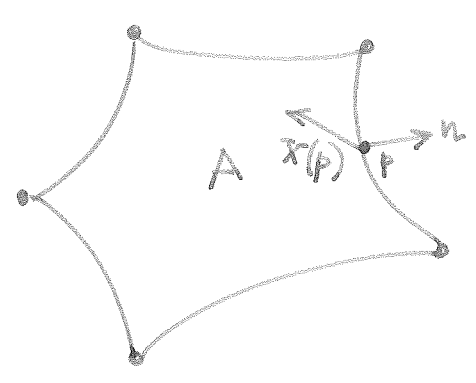


A no es invariante para el futuro o para el pasado

Vamos a buscar regiones invariantes para nuestro sistema. En la práctica se busca una región de manera que el campo de vectores apunte hacia adentro



Por ejemplo, imaginemos que $A \subset \mathbb{R}^2$ está definido como el interior de una curva de Jordan de clase C^1 a trozos

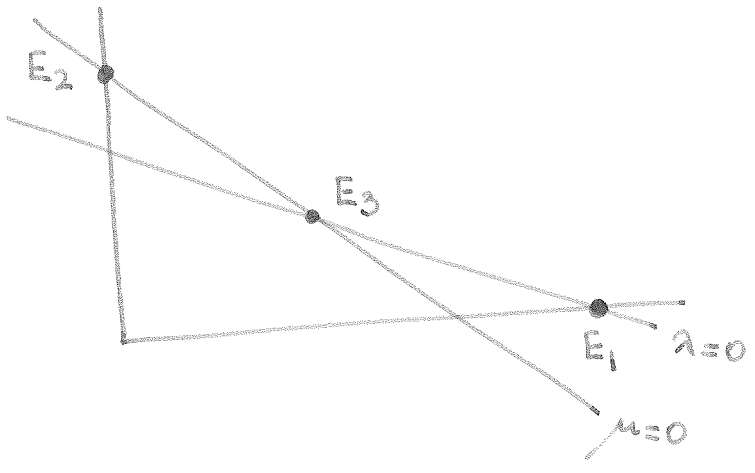


y se cumple
 $\langle X(p), n(p) \rangle \leq 0$
 $\forall p \in \partial A \setminus \{\text{esquinas}\}$
 $n(p) = \text{normal exterior}$

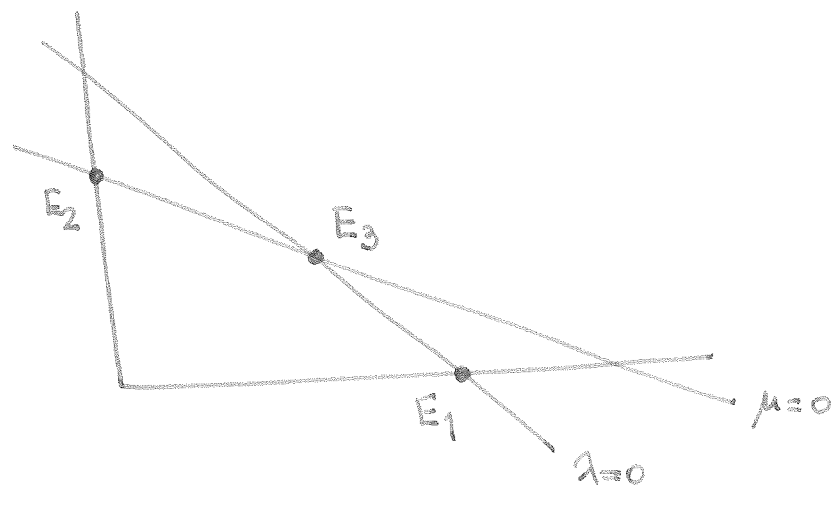
Entonces A es positivamente invariante.

Nos ayudaremos de las rectas R_1 y R_2 . Discutimos el caso (a), que a su vez bifurcamos en dos sub-casos:

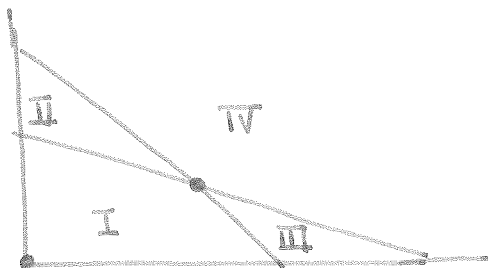
(a1)



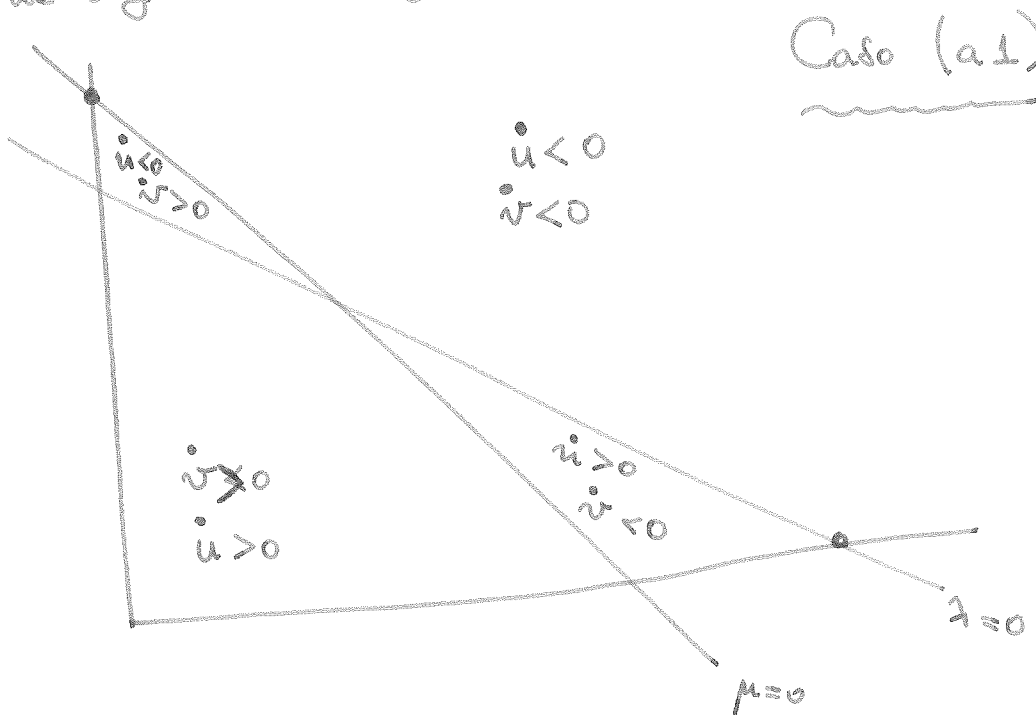
(a2)



Consideramos las regiones

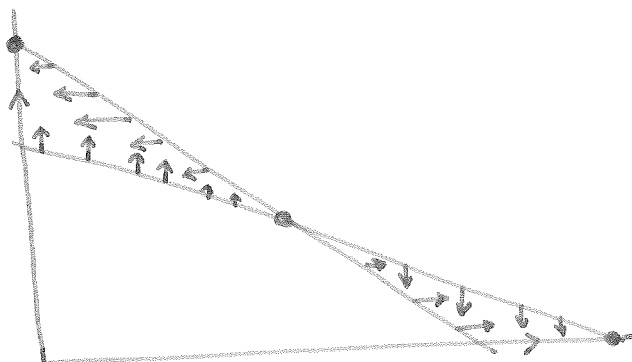


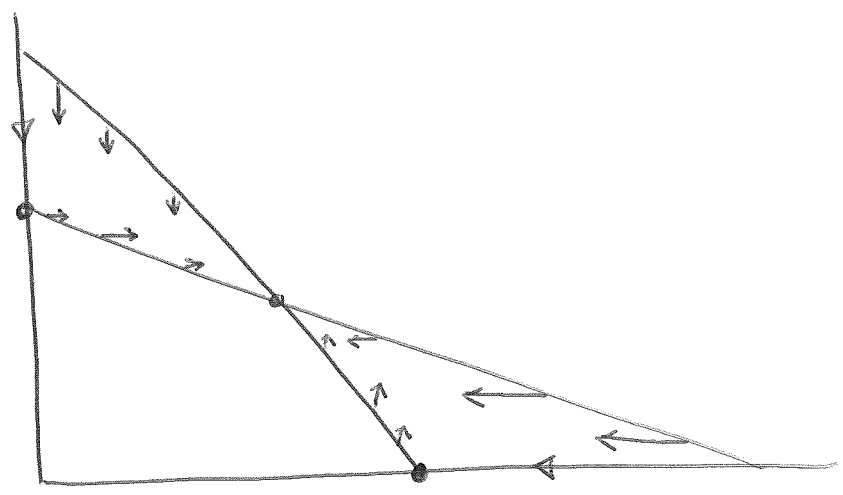
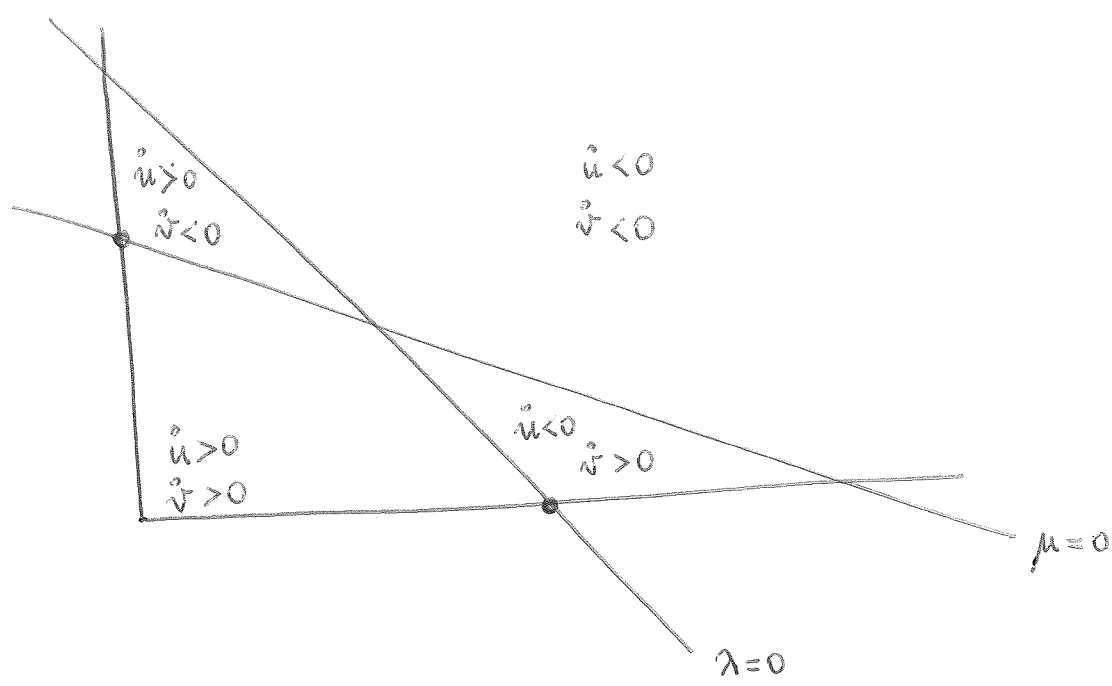
y vamos a probar que II y III son invariantes para el futuro. Para ello observamos que $u' > 0 \Leftrightarrow \lambda > 0$,
 $v' > 0 \Leftrightarrow \mu > 0$ en $\text{int}(\mathbb{R}_+^2)$ y hacemos un estudio de las signos de u' y v'



Caso (a.1)

Las líneas $\lambda = 0$ y $\mu = 0$ son a veces llamadas nul-clinas, en ellas el campo tiene dirección horizontal o vertical





Vamos a estudiar la dinámica en las regiones II y III.

Suponemos $(u(0), v(0)) \in \text{int}(\text{II})$. Como la solución permanece en II en el futuro (de hecho en $\text{int}(\text{II})$)

$$\dot{u}(t) \leq 0, \dot{v}(t) \geq 0 \quad \text{Caso (a1)}$$

$$\dot{u}(t) \geq 0, \dot{v}(t) \leq 0 \quad \text{Caso (a2)}$$

si $t \geq 0$.

En consecuencia existen los límites

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = \delta, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = \Pi$$

y $(\delta, \Pi) \in \text{III}$. Vamos a probar que (δ, Π) es un equilibrio.

Sea $t_n \rightarrow +\infty$ de manera que $\dot{u}(t_n) \rightarrow 0$ (Lema ya estudiado).

Entonces

$$\dot{u}(t_n) = u(t_n) (a - bu(t_n) - cv(t_n))$$

$$\begin{array}{ccc}
 \swarrow & & \searrow \\
 0 & & \delta(a - b\delta - c\Pi)
 \end{array}$$

Extrayendo $t_n^* \rightarrow +\infty$ con $\dot{v}(t_n) \rightarrow 0$ se obtiene también

$$0 = \Pi (d - e\delta - f\Pi).$$

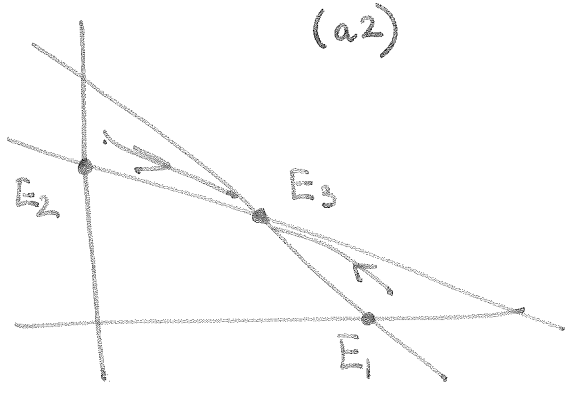
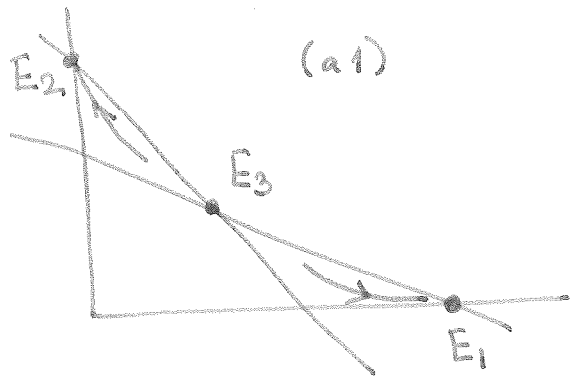
Es decir, (δ, Π) es un equilibrio en III. Por tanto,

$(\delta, \Pi) = E_2$ o E_3 . En el caso (a1) $v(t)$ es creciente

y como E_3 es el punto de III donde la coordenada y es mínima, se ha de cumplir $v(t) > 0$ que $(\delta, \Pi) = E_2$.

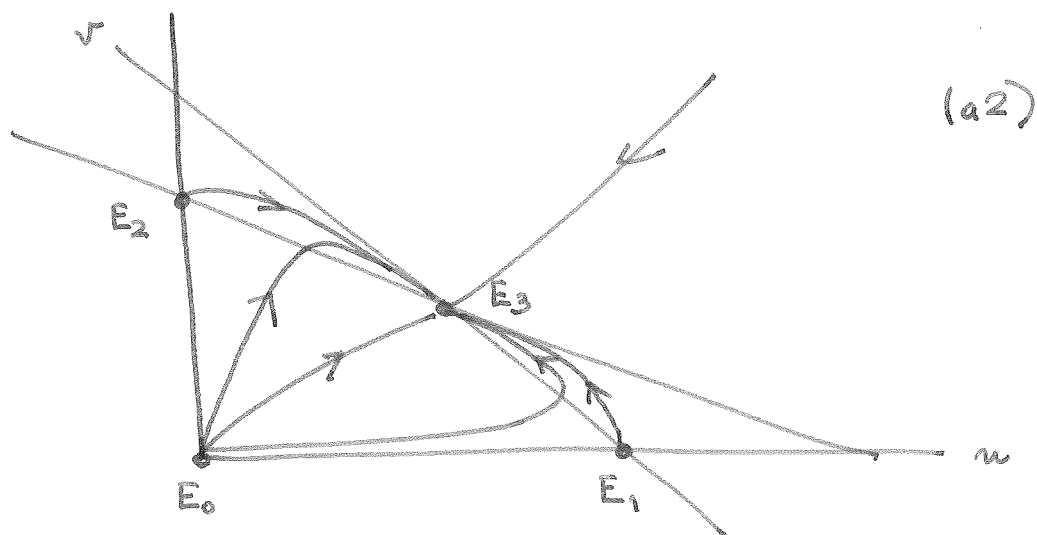
Por el contrario, si estamos en (a2), $u(t)$ es creciente y $\delta > 0$, de donde $\delta > 0$ y $(\delta, \Pi) = E_3$. La discusión

en III es similar. Resumimos el resultado en el siguiente dibujo

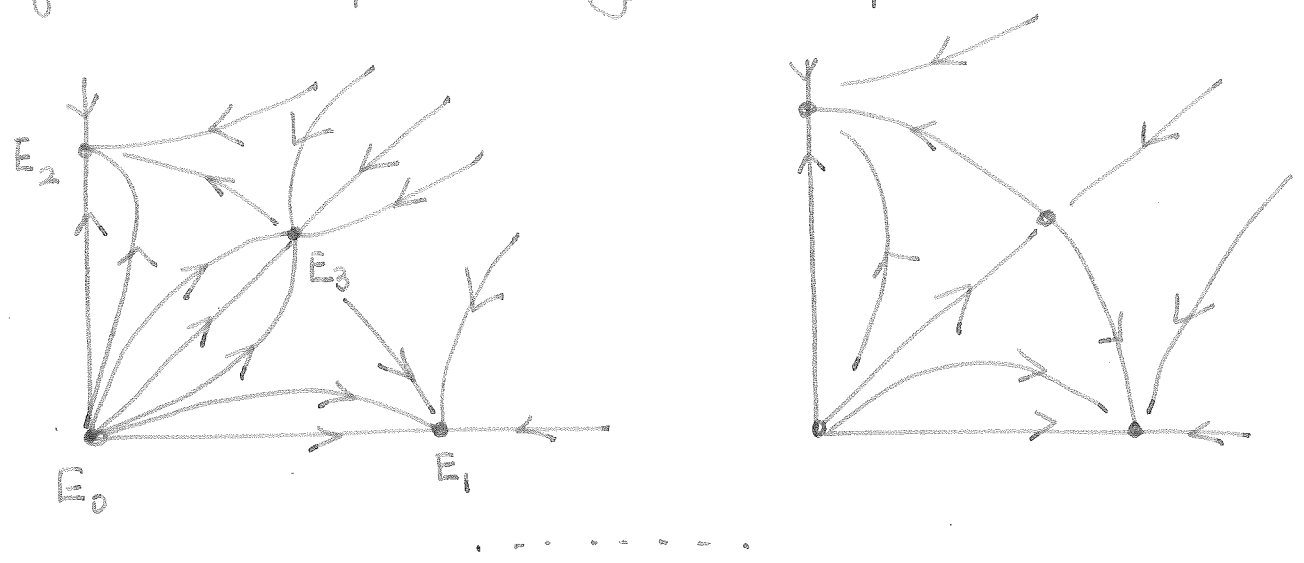


Discutimos ahora lo que ocurre si empezamos en I. Esta región es negativamente invariante; por tanto, si $(u(0), v(0)) \in \text{int}(I)$ $\Rightarrow (u(t), v(t)) \in I \forall t < 0$, $\dot{u}(t) > 0, \dot{v}(t) > 0$. De aquí se sigue que $\lim_{t \rightarrow -\infty} (u(t), v(t)) = (0, 0)$. La región I no es invariante para el futuro, puede ocurrir que una solución que empieza en I penetre en II o III o bien permanece para siempre en I. En este último caso la solución tiene coordenadas monótonas y su límite es un equilibrio. En principio podría ser E_1, E_2 o E_3 en el caso (a2) y sólo E_3 en el caso (a1). Como $\dot{u} > 0, \dot{v} > 0$ los equilibrios E_2 y E_3 quedan descartados. El análisis de lo que ocurre en IV es análogo. Hay que tener un poco de cuidado, pues IV es negativamente invariante en un sentido generalizado (las soluciones pueden explotar en tiempo negativo).

Tenemos ya una información bastante precisa del comportamiento del sistema: todas las soluciones en $\text{int}(\mathbb{R}_+^2)$ convergen a un equilibrio si $t \rightarrow +\infty$. En el caso (a1) puede ser E_1, E_2 o E_3 ; en el caso (a2) es siempre E_3 y el estado de coexistencia es un atractor global.



En el caso (a1) no tenemos una situación tan clara. Con la información disponible hay muchas posibilidades

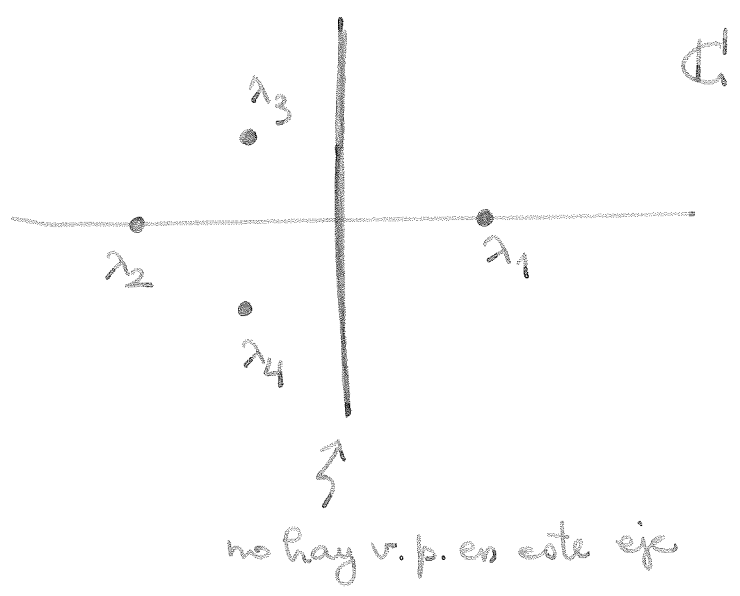


Para afinar el análisis pondremos una lupa en E_3 .

Análisis local alrededor de equilibrios

Sea $X: \Omega \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ un campo C^1 y $p \in \Omega$ un equilibrio, $X(p) = 0$. Decimos que p es hiperbólico si la matriz Jacobiana $DX(p)$ no tiene valores propios en el eje imaginario; es decir

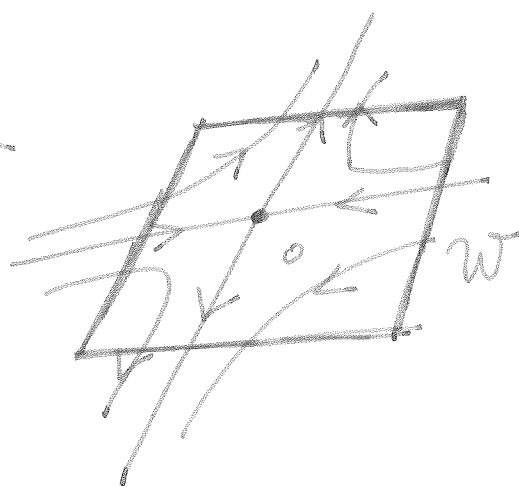
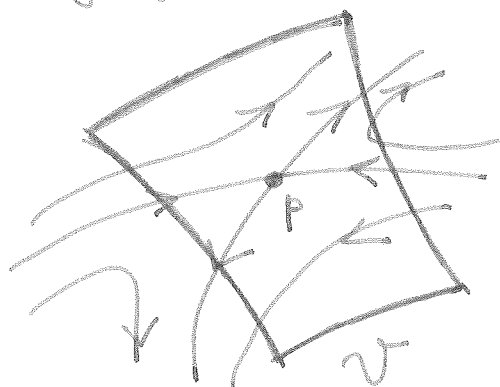
$$\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset \quad \text{con} \quad A = DX(p)$$



En los puntos hiperbólicos es posible linealizar:

Teorema de Hartman-Großman

Si p es un equilibrio hiperbólico entonces existen entornos compactos $\mathcal{V}(p)$ y $\mathcal{W}(0)$ y un homeomorfismo $h: \mathcal{V} \xrightarrow{\cong} \mathcal{W}$ de manera que las órbitas en \mathcal{V} del flujo $\dot{x} = X(x)$ se transforman en las órbitas ^{en \mathcal{W}} del flujo linealizado $\dot{y} = Ay$



Ejemplo
$$\begin{cases} \dot{u} = u \lambda(u, v) \\ \dot{v} = v \mu(u, v) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lambda(u, v) &= a - bu - cv \\ \mu(u, v) &= d - eu - fv \end{aligned}$$

Caso (a1)

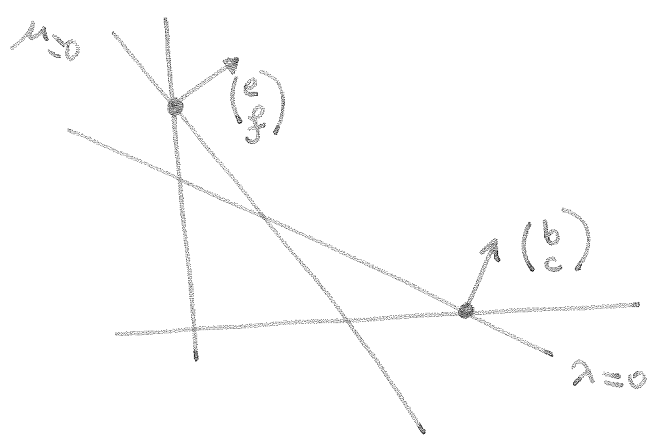
$$E_3: \lambda = \mu = 0$$

$$x = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad X(u, v) = \begin{pmatrix} u \lambda(u, v) \\ v \mu(u, v) \end{pmatrix}$$

$$DX(u, v) = \begin{pmatrix} \lambda + u \frac{\partial \lambda}{\partial u} & u \frac{\partial \lambda}{\partial v} \\ v \frac{\partial \mu}{\partial u} & \mu + v \frac{\partial \mu}{\partial v} \end{pmatrix}$$

$$A = DX(E_3) = \begin{pmatrix} -bu_* & -cv_* \\ -eu_* & -fv_* \end{pmatrix}, \quad E_3 = (u_*, v_*)$$

Observamos ahora que en el caso (a1) $\det \begin{pmatrix} b & c \\ e & f \end{pmatrix} < 0$



Así, el polinomio característico de A ,

$$\det (A - \lambda I_2) = \lambda^2 + (bu_* + fv_*)\lambda + (bf - ce)u_*v_*$$

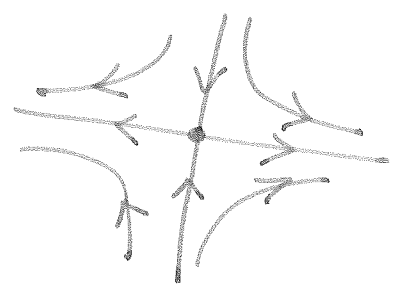
es de la forma $\lambda^2 + A\lambda - B$ con $A, B > 0$.

Deducimos que los valores propios

$$\lambda_{\pm} = \frac{-A \pm \sqrt{A^2 + 4B}}{2}$$

cumplen $\lambda_- < 0 < \lambda_+$.

Por tanto el equilibrio E_3 es hiperbólico y localmente (salvo homeomorfismos) la dinámica es del tipo

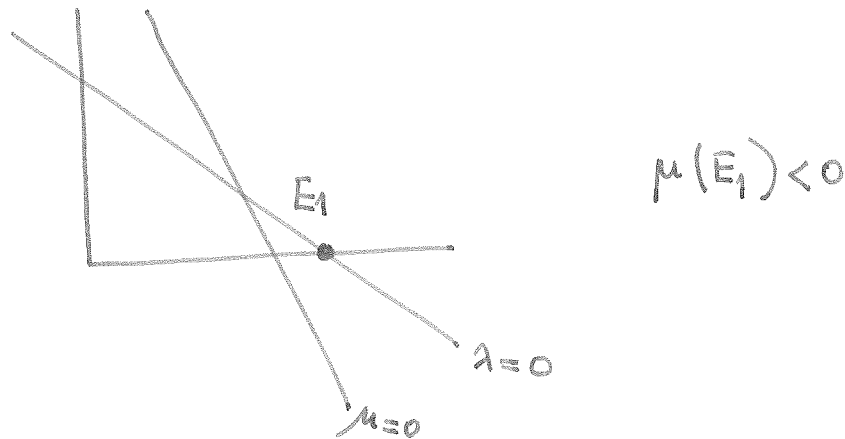


Estudiamos ahora los equilibrios semi-triviales, por ejemplo

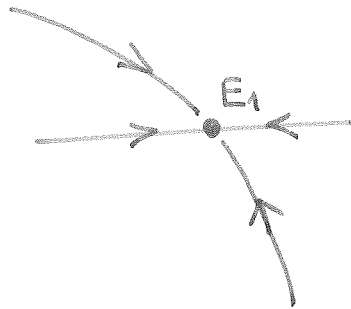
$$E_1 = \left(\frac{a}{b}, 0 \right), \quad (v=0, \lambda=0)$$

$$A = DX(E_1) = \begin{pmatrix} -a & -\frac{ca}{b} \\ 0 & d - e\frac{a}{b} \end{pmatrix}$$

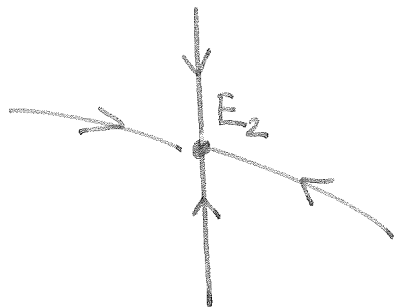
La cantidad $d - e\frac{a}{b} = \mu(E_1)$ es negativa; esto se debe a la posición relativa de las rectas $\lambda=0$ y $\mu=0$,



Como consecuencia los dos valores propios de A son negativos y E_1 es un atractor local

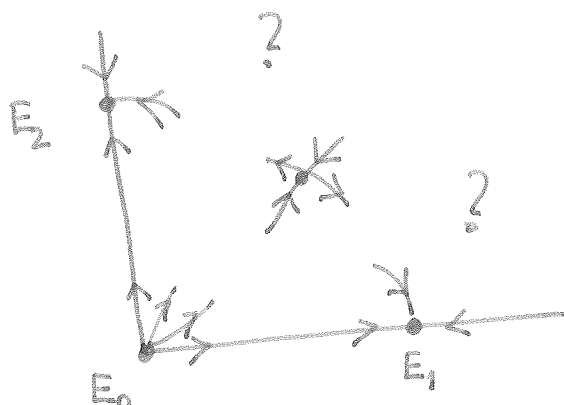


De manera análoga concluimos que E_2 es un atractor local,



Por último, E_0 es un repulsor, los dos valores propios de $DX(E_0)$ son positivos.

En resumen, el análisis local de los equilibrios nos lleva a



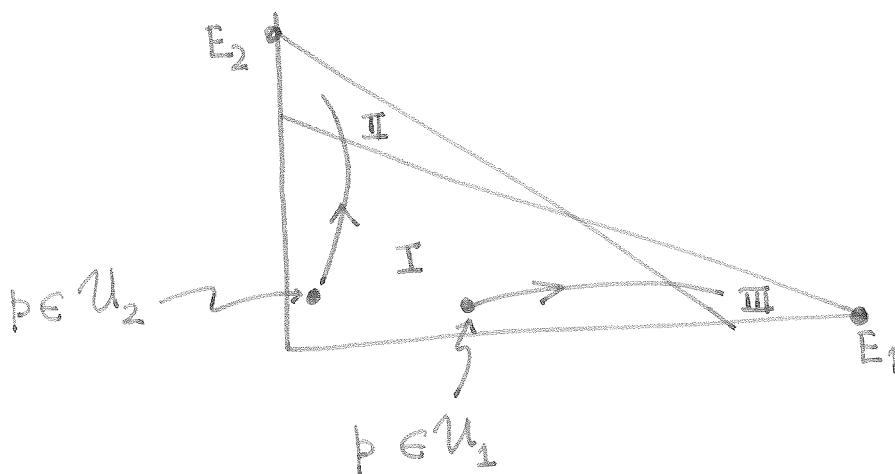
Para hacer un análisis global usamos las muchas propiedades del flujo que ya conocemos:

- todas las órbitas tienden a un equilibrio
- las que entran en II (resp III) convergen a E_2 (resp E_1)
- las órbitas que pasan por I (resp IV) provienen de E_0 (resp de ∞)

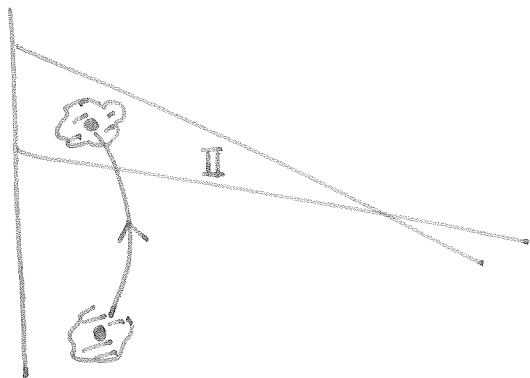
Sean U_1 y U_2 las regiones dentro de I que son atraídas por E_1 o E_2 ,

$$U_i = \{ p \in \text{int}(I) : \Phi_E(p) \rightarrow E_i \text{ si } t \rightarrow +\infty \}, \quad i=1,2$$

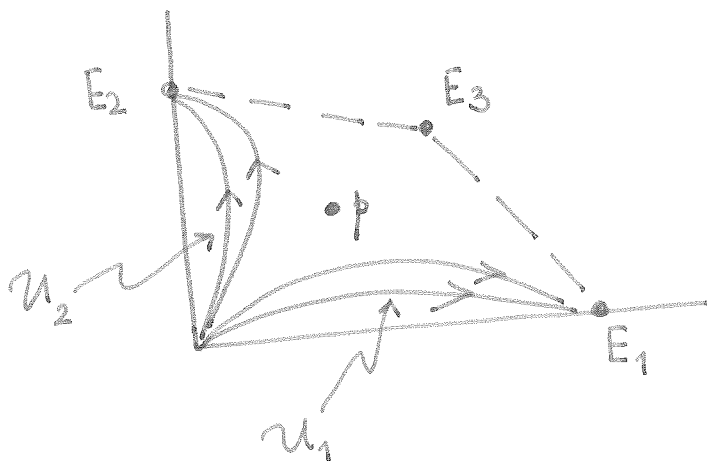
Observamos que U_i (resp U_2) también podría ser definido como el conjunto de puntos en $\text{int}(I)$ que acaba entrando en III (resp II)



Por dependencia continua, tanto U_1 como U_2 han de ser abiertos: si un punto entra en I , también lo hace un pequeño entorno



Como U_1 y U_2 son disjuntos por definición ($U_1 \cap U_2 = \emptyset$), el conjunto conexo $\text{int}(I)$ ha de contener algo más que $U_1 \cup U_2$. Sea $p \in \text{int}(I) - (U_1 \cup U_2)$

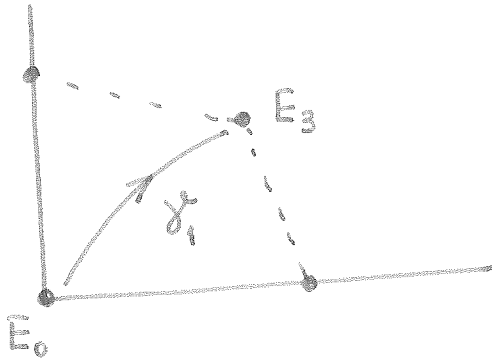


Como p no va ni a E_1 , ni a E_2 , ha de permanecer en I en el futuro; así p ha de converger a E_3 ,

$$\Phi_t(p) \rightarrow E_3 \text{ si } t \rightarrow +\infty.$$

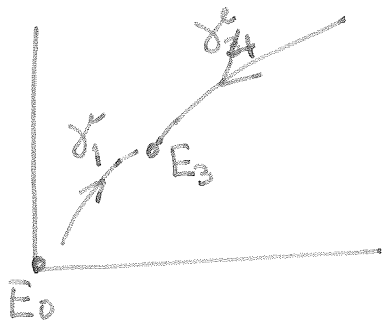
Como sabemos que $\Phi_t(p) \rightarrow E_0$ si $t \rightarrow -\infty$,

hemos obtenido una órbita heteroclina que conecta E_0 y E_3 ; la llamaremos γ_1^t .

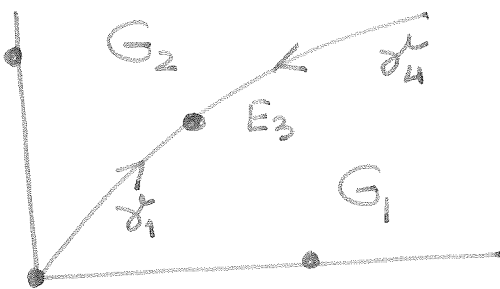


Por el teorema de Hartman - Grobmann (en E_3)
concluimos que γ_1 es única.

De modo análogo concluimos que hay una única órbita
 γ_4 en $\text{int}(\mathbb{T})$ que viaja de ∞ a E_3



El primer cuadrante abierto queda descompuesto
por $\gamma_1 \cup \{E_3\} \cup \gamma_4$ en dos regiones G_1 y G_2



$$\text{int}(\mathbb{R}_+^2) \setminus (\gamma_1 \cup \{E_3\} \cup \gamma_4) = G_1 \cup G_2$$

Las puntas en G_1 han de converger a E_1 y los
de G_2 a E_2 . De ahí el nombre de las regiones,
en G_1 "gana" E_1 y en G_2 "gana" E_2 .

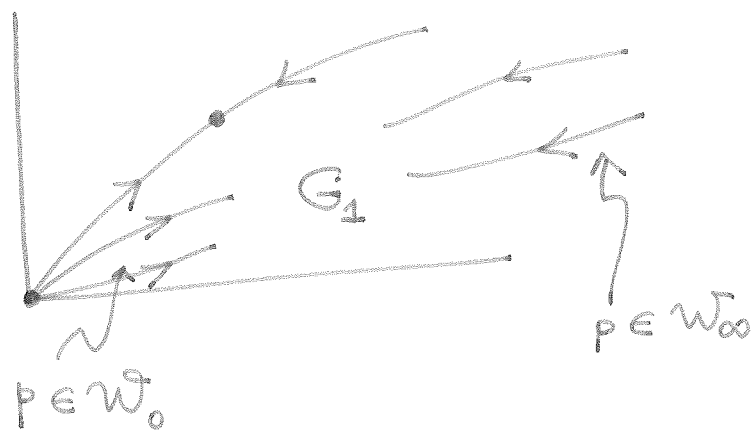
Las órbitas $\gamma_1^s \cup \{E_3\} \cup \gamma_4^s$ constituyen la variedad estable de E_3 y son importantes: separan las regiones de atracción de E_1 y E_2 .

Para terminar nos fijamos por ejemplo en G_1 y definimos

$$W_0 = \{p \in G_1 : \Phi_t(p) \rightarrow 0 \text{ si } t \rightarrow -\infty\}$$

$$W_\infty = \{p \in G_1 : |\Phi_t(p)| \rightarrow \infty \text{ si } t \rightarrow \infty\}$$

Podemos caracterizar W_0 [resp W_∞] como el conjunto de puntos p de G_1 que alguna vez estuvieron en I [resp IV]



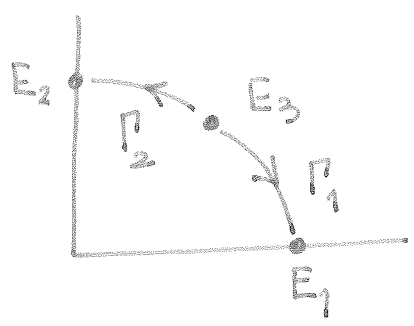
Por dependencia continua deducimos que W_0 y W_∞ son abiertos. Además son disjuntos y por tanto el conexo G_1 contiene algo más, sea

$$p \in G_1 \setminus (W_0 \cup W_\infty).$$

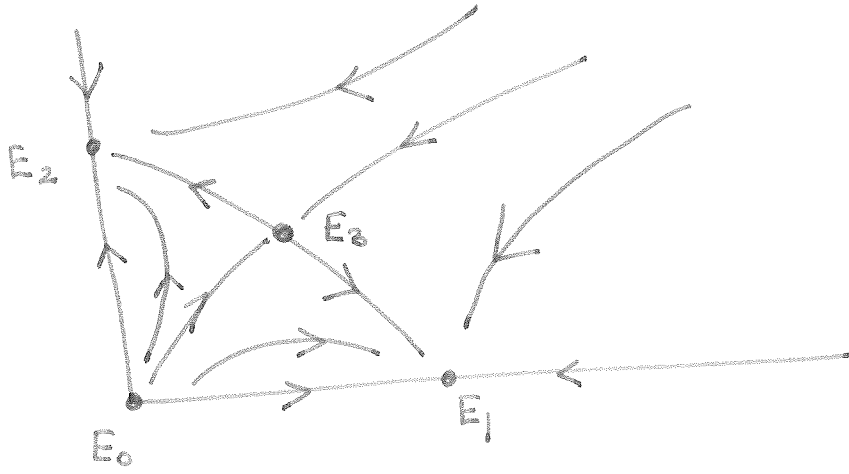
Como p no emana de E_0 o ∞ , lo ha de hacer de E_3 o de E_1 . Pero sabemos que E_1 es un atractor local, así que p ha de provenir de E_3 ,

$$\Phi_t(p) \rightarrow E_3 \text{ si } t \rightarrow -\infty$$

La correspondiente órbita Γ_1 ha de converger si $t \rightarrow +\infty$ a uno de los equilibrios E_0, E_3 y E_1 . E_0 se excluye por ser repulsor y E_3 porque Γ_1 no coincide con δ_1 o δ_4 así Γ_1 es una heteroclina de E_3 a E_1



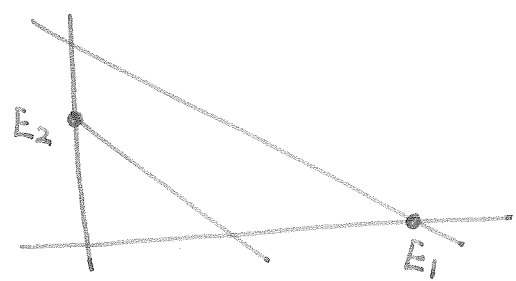
De igual manera construimos $\Gamma_2 \subset G_2$. Por el Teorema de Hartman-Grobmann estas heteroclinas son únicas. Ahora sí podemos dibujar el retrato de fases



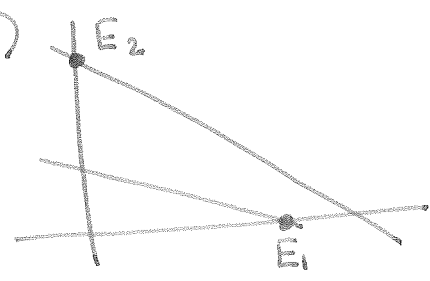
Ejercicio Demuestra que este sistema no tiene integrales primeras definidas en \mathbb{R}_+^2 [En $\text{int}(\mathbb{R}_+^2)$ sí la tiene, pues el flujo es homeomorfo a una silla]

Ejercicio Análisis riguroso de los casos

(b1)

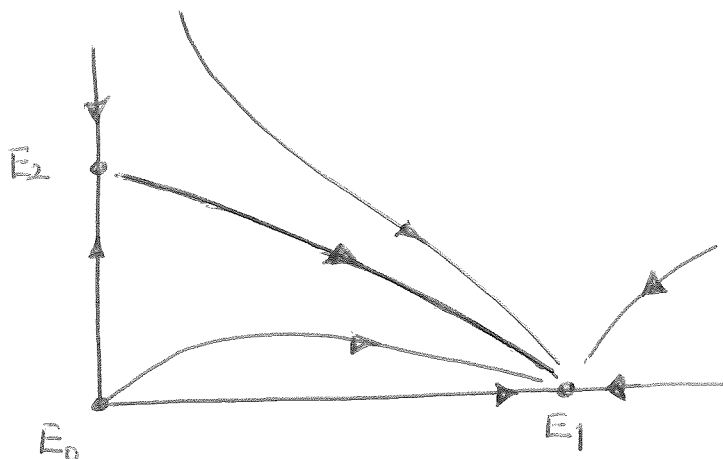


(b2)



Respuesta:

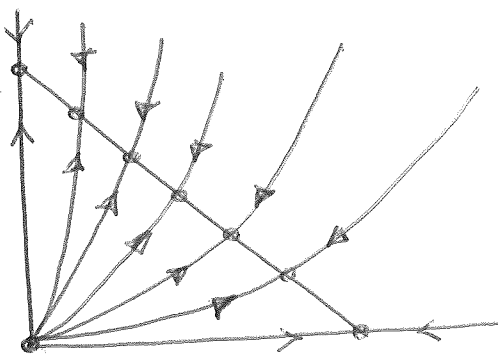
(b1)



El caso (c) es más delicado pues no es posible usar H-G (los equilibrios en el continuo no son hiperbólicos). En este caso se puede combinar la información disponible con el cálculo de una integral primera del tipo

$$I(u, v) = \frac{v}{u^k}$$

donde $k > 0$ es un parámetro a determinar. El diagrama de fases es del tipo



Ejercicio Análisis de Presa-Depredador logístico

$$\begin{cases} \dot{u} = u(a - bu - cv) \\ \dot{v} = v(d + eu - fv) \end{cases}$$